RENDICONTI

DEL

CIRCOLO MATEMATICO

DI PALERMO

RENDICONTI

DEL

CIRCOLO MATEMATICO

DI PALERMO

Direttore: G. B. GUCCIA.

TOMO XXVIII

(2° semestre 1909).

PALERMO,
SEDE DELLA SOCIETÀ
30, VIA RUGGIERO SETTIMO, 30.

1909

COMITATO DI REDAZIONE

PEL TRIENNIO 1909-1910-1911.

RENDICONTI DEL CIRCOLO MATEMATICO DI PALERMO.

ZUR ELEKTRODYNAMIK BEWEGTER KÖRPER.

Von **Max Abraham** (Göttingen).

Adunanza del 17 gennajo 1909.

§ 1.

Einleitung.

Wie bekannt, erweisen sich die von H. Hertz [1]) aufgestellten Grundgleichungen der Elektrodynamik bewegter Körper, die als nächstliegende Verallgemeinerung der Maxwell'schen Feldgleichungen für ruhende Körper gelten konnten, als unzulänglich; sie widersprechen den Experimenten, die A. Eichenwald [2]) und H. A. Wilson [3]) über das Verhalten bewegter Dielektrika angestellt haben.

Diese Versuchsergebnisse befinden sich im Einklange mit den elektrodynamischen Theorieen von H. A. Lorentz [4]) und von E. Cohn [5]). Die heuristischen Ideen, von denen sich die beiden Forscher leiten lassen, sind von einander durchaus verschieden; während H. A. Lorentz von Hypothesen über das Verhalten der Elektronen und der Moleküle ausgeht, wird von E. Cohn die einfachste Beschreibung der elektromagnetischen Vorgänge im Sinne Kirchhoff's angestrebt.

Die Ergebnislosigkeit aller der bisherigen Versuche, einen Einfluss der Erdbewegung auf die an der Erdoberfläche sich abspielenden elektromagnetischen Vorgänge zu entdecken, erklärt die Theorie von E. Cohn in befriedigender Weise. Dagegen legte die Lorentz'sche Elektronentheorie, indem sie von dem elektromagnetischen Felde im Aether ausging, die Auffassung nahe, dass die Bewegung eines Systemes durch den Aether auf

[1]) H. Hertz, *Über die Grundgleichungen der Elektrodynamik für bewegte Körper.* 1890. [Gesammelte Werke, Bd. II, pp. 256-285].

[2]) A. Eichenwald, *Über die magnetischen Wirkungen bewegter Körper im elektrostatischen Felde* [Annalen der Physik, Bd. XI (1903), pp. 421-441].

[3]) H. A. Wilson, *On the Electric Effect of Rotating a Dielectric in a Magnetic Field* [Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A, Vol. CCIV (1905), pp. 121-137].

[4]) H. A. Lorentz, *Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern* (Leiden 1895).

[5]) E. Cohn, *Zur Elektrodynamik bewegter Systeme.* II. [Sitzungsberichte der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften (Berlin), Jahrgang 1904, pp. 1404-1416].

die Wahrnehmungen eines mitbewegten Beobachters von Einfluss sein möchte. Doch ist es H. A. LORENTZ [6]) gelungen, durch geeignete Hypothesen über die Veränderungen, welche die elektrischen und mechanischen Eigenschaften der Materie bei der Bewegung durch den Aether erfahren sollen, seine Theorie dem Postulat der Relativität anzupassen. Dass dies möglich ist, erklärt sich bekanntlich aus der Eigenschaft der Feldgleichungen für den Aether, durch gewisse Transformationen von Koordinaten und Lichtweg, die sogenannten [7]) « LORENTZ'schen Transformationen » in sich selbst überzugehen.

Es ist nicht meine Absicht, in dieser Arbeit den gesamten Komplex der Fragen zu erörtern, die man mit dem Postulate der Relativität in Verbindung gebracht hat; ich habe an anderem Orte [8]) zu einigen dieser Fragen Stellung genommen. Hier interessiert uns dieses Postulat nur insofern, als es mit der Elektrodynamik der ponderablen Materie zusammenhängt. Eine kürzlich erschienene Arbeit von H. MINKOWSKI [9]) stellt gerade diesen Zusammenhang an die Spitze; es wird hier den Grundgleichungen für bewegte Körper eine solche Form gegeben, dass sie durch die LORENTZ'sche Transformation in die MAXWELL'schen Feldgleichungen für ruhende Körper übergehen.

Die MINKOWSKI'schen Grundgleichungen erklären, ebenso wie diejenigen von E. COHN und von H. A. LORENTZ, alle vorliegenden Versuchsergebnisse; ihnen und den COHN'schen Grundgleichungen, mit denen sie, bei Vernachlässigung von Grössen zweiter Ordnung (in dem Quotienten aus der Geschwindigkeit der Materie und des Lichtes), übereinstimmen, ist die Symmetrie der elektrischen und magnetischen Grössen gemeinsam. Die LORENTZ'schen Grundgleichungen in ihrer ursprünglichen Form hingegen, bei denen diese Symmetrie nicht vorhanden ist, weichen bereits in Gliedern erster Ordnung von denen der beiden anderen Theorieen ab; doch betrifft diese von E. COHN [10]) bemerkte Abweichung nur die para- und diamagnetischen Isolatoren, und entzieht sich durch ihre Geringfügigkeit der experimentellen Prüfung.

Es ist jedoch nicht schwer, die von LORENTZ angenommenen Beziehungen der elektrischen und magnetischen Vektoren so abzuändern, dass die Symmetrie gewahrt bleibt; mit der so modificierten Form der LORENTZ'schen Theorie werden sich die Paragraphen (8) und (10) der vorliegenden Untersuchung beschäftigen. Es wird sich zeigen, dass sie dem tatsächlichen Inhalt nach mit der MINKOWSKI'schen Theorie sich völlig deckt. Der formelle Unterschied liegt in der Deutung, die den mit $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$

---

[6]) H. A. LORENTZ, *Electromagnetische verschijnselen in een stelsel dat sich met willekeurige snelheid, kleiner dan die van het licht, beweegt* [Koningklijde Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, Deel XII (1904), 2, pp. 986-1009].

[7]) H. POINCARÉ, *Sur la dynamique de l'électron* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXI (1° semestre 1906), pp. 129-176].

[8]) M. ABRAHAM, *Theorie der Elektrizität*, Bd. II, Auflage 2 (Leipzig 1908), pp. 356-397.

[9]) H. MINKOWSKI, *Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern* [Nachrichten der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1908, pp. 53-111].

[10]) E. COHN, *Zur Elektrodynamik bewegter Systeme*. I. [Sitzungsberichte der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften (Berlin), Jahrgang 1904, pp. 1294-1303], p. 1301.

bezeichneten Vektoren gegeben wird; bei H. A. LORENTZ stellen sie die elektrische und magnetische Erregung des Aethers dar, während sie bei MINKOWSKI einer anschaulichen Bedeutung ermangeln. Gerade in dem Verzicht auf eine anschauliche Interpretation liegt nach meiner Meinung das aktuelle der MINKOWSKI'schen Theorie. Nachdem die Elektronentheorie so reiche Früchte getragen hat, scheint jetzt die Elektrodynamik wiederum in eine phänomenologische Phase ihrer Entwickelung einzutreten.

Auch die Methode der vorliegenden Untersuchung ist eine phänomenologische. Angesichts der Verlegenheit, welche die wachsende Zahl rivalisierender Theorieen bereitet, schien es mir erwünscht, ein auf MAXWELL'scher Grundlage aufgebautes System der Elektrodynamik bewegter Körper zu besitzen, welches sich von den speziellen Ansätzen der einzelnen Theorieen zunächst frei hält. Die Voraussetzungen des hier dargestellten Systemes sind in den Impulssätzen und dem Energiesatze (§ 3) und ausserdem in gewissen Gleichungen enthalten, die wir als « Hauptgleichungen » bezeichnen (§ 4). Zwei von diesen verknüpfen, als sinngemässe Verallgemeinerung der im Falle der Ruhe geltenden Hauptgleichungen der MAXWELL'schen Theorie, die Linienintegrale der Vektoren $\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{H}'$ (Kraft auf bewegte elektrische und magnetische Einheitspole) mit den zeitlichen Änderungen der Flächenintegrale der Vektoren $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{D}$ (magnetische und elektrische Erregung). Im Verein mit den hinzutretenden drei Hauptgleichungen, welche die JOULE'sche Wärme, den relativen Strahl, und die relativen elektromagnetischen Spannungen in der bewegten Materie durch jene Vektoren ausdrücken, bilden sie einen mathematischen Rahmen, in den die verschiedenen Bilder der elektromagnetischen Vorgänge sich einfügen lassen. Iedes solche Bild ist, im Sinne unseres Systemes, gekennzeichnet durch zwei Beziehungen zwischen den vier Vektoren $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{H}'$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{B}$; durch Hinzufügung dieser Beziehungen gehen die beiden ersten Hauptgleichungen in die Differentialgleichungen über, welche, der betreffenden Theorie gemäss, die zeitliche Veränderung des elektromagnetischen Feldes darstellen, während die anderen drei Hauptgleichungen die Energievorgänge und die ponderomotorischen Kräfte bestimmen. Es ist indessen bemerkenswert, wie weit man die Konsequenzen aus den Hauptgleichungen verfolgen kann, ohne die speziellen Verknüpfungsgleichungen der betreffenden Theorie heranzuziehen. Insbesondere sind die Abweichungen, die im Ausdrucke der ponderomotorischen Kraft (§ 12) zwischen den verschiedenen Theorieen bestehen, nur geringfügig; im Falle der Ruhe werden sogar die ponderomotorischen Kräfte der LORENTZ'schen, COHN'schen und MINKOWSKI'schen Theorie miteinander identisch.

Indem ich die verschiedenen Theorieen der Elektrodynamik bewegter Körper in ein allgemeines System einordne, beseitige ich diejenigen Züge des einzelnen Bildes, die nicht durch die charakteristischen Verknüpfungsgesetze der elektromagnetischen Vektoren bedingt sind. Dass ich solche Veränderungen an einigen der erwähnten Theorieen vorgenommen habe, wird man mir wohl verzeihen; treten doch bei der gegebenen Darstellungsweise um so deutlicher die wesentlichen Züge der betreffenden Bilder hervor.

§ 2.

Mathematische Hilfsformeln.

Die Zeitdifferentiation für feste Raumpunkte wird durch $\frac{\partial}{\partial t}$ vorgestellt. Die zeitliche Änderung eines Flächenintegrales, erstreckt über eine Fläche, deren Punkte sich mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{w}$ bewegen

$$\frac{d}{dt}\int df\,\mathfrak{A}_n = \int df \left\{\frac{\partial' \mathfrak{A}}{\partial t}\right\}_n$$

definiert eine andere Art der Zeitdifferentiation eines Vektors

$$\frac{\partial' \mathfrak{A}}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} + \mathfrak{w}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{A} + \mathrm{curl}\,[\mathfrak{A}\mathfrak{w}]. \tag{1}$$

Ferner ist der auf bewegte Punkte bezogene Differentialquotient nach der Zeit

$$\dot{\mathfrak{A}} = \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} + (\mathfrak{w}\nabla)\mathfrak{A}. \tag{2}$$

Dieser ist mit der zeitlichen Änderung des Volumintegrales eines Vektors verknüpft durch die Beziehungen

$$\frac{d}{dt}\int dv\,\mathfrak{A} = \int dv \frac{\delta \mathfrak{A}}{\delta t},$$

$$\frac{\delta \mathfrak{A}}{\delta t} = \dot{\mathfrak{A}} + \mathfrak{A}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{w}. \tag{2_a}$$

Aus (2) und (2_a) folgt

$$\frac{\delta \mathfrak{A}}{\delta t} = \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} + (\mathfrak{w}\nabla)\mathfrak{A} + \mathfrak{A}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{w}. \tag{3}$$

Für Skalare ergiebt sich dementsprechend

$$\frac{\delta \psi}{\delta t} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathrm{div}\,\psi\mathfrak{w}. \tag{3_a}$$

Aus (1) und (3) folgt endlich, mit Rücksicht auf die allgemeine Regel

$$\mathrm{curl}\,[\mathfrak{A}\mathfrak{w}] = (\mathfrak{w}\nabla)\mathfrak{A} - (\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{w} + \mathfrak{A}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{w} - \mathfrak{w}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{A},$$

die Beziehung

$$\frac{\partial' \mathfrak{A}}{\partial t} = \frac{\delta \mathfrak{A}}{\delta t} - (\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{w}. \tag{4}$$

Da die in (2) eingeführte Art der Zeitdifferentiation den gewöhnlichen Rechnungsregeln folgt, so gilt, mit Rücksicht auf (2_a)

$$[\dot{\mathfrak{A}}\mathfrak{B}] + [\mathfrak{A}\dot{\mathfrak{B}}] = \frac{\delta}{\delta t}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] - [\mathfrak{A}\mathfrak{B}]\,\mathrm{div}\,\mathfrak{w}.$$

Aus dieser Gleichung, im Verein mit den aus (4) und (2_a) folgenden

$$\frac{\partial' \mathfrak{A}}{\partial t} = \dot{\mathfrak{A}} + \mathfrak{A}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{w} - (\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{w},$$

$$\frac{\partial' \mathfrak{B}}{\partial t} = \dot{\mathfrak{B}} + \mathfrak{B}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{w} - (\mathfrak{B}\nabla)\mathfrak{w},$$

erhält man

$$\left[\frac{\partial'\mathfrak{A}}{\partial t}\mathfrak{B}\right]+\left[\mathfrak{A}\frac{\partial'\mathfrak{B}}{\partial t}\right]=\frac{\delta}{\delta t}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]+[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]\operatorname{div}\mathfrak{w}-[\mathfrak{A},(\mathfrak{B}\nabla)\mathfrak{w}]+[\mathfrak{B},(\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{w}].$$

Auf Grund der unschwer zu verificierenden Identität

$$[\mathfrak{A},(\mathfrak{B}\nabla)\mathfrak{w}]-[\mathfrak{B},(\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{w}]=[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]\operatorname{div}\mathfrak{w}-([\mathfrak{A}\mathfrak{B}]\nabla)\mathfrak{w}-\big[[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]\operatorname{curl}\mathfrak{w}\big]$$

ergiebt sich die Relation

$$\left[\frac{\partial'\mathfrak{A}}{\partial t}\mathfrak{B}\right]+\left[\mathfrak{A}\frac{\partial'\mathfrak{B}}{\partial t}\right]=\frac{\delta}{\delta t}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]+([\mathfrak{A}\mathfrak{B}]\nabla)\mathfrak{w}+\big[[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]\operatorname{curl}\mathfrak{w}\big]. \tag{5}$$

§ 3.

Die Energiegleichung und die Impulsgleichungen.

Wir verstehen unter $x y z t$ Koordinaten und Zeit, gemessen in einem Bezugssystem, in welchem der Beobachter eine feste Lage einnimmt. Die von einem solchen Beobachter gemessene ponderomotorische Kraft, die infolge des elektromagnetischen Processes an der Volumeinheit der bewegten Materie angreift, soll die Komponenten besitzen:

$$(6)\quad \begin{cases} \mathfrak{K}_x=\dfrac{\partial X_x}{\partial x}+\dfrac{\partial X_y}{\partial y}+\dfrac{\partial X_z}{\partial z}-\dfrac{\partial \mathfrak{g}_x}{\partial t}, \\ \mathfrak{K}_y=\dfrac{\partial Y_x}{\partial x}+\dfrac{\partial Y_y}{\partial y}+\dfrac{\partial Y_z}{\partial z}-\dfrac{\partial \mathfrak{g}_y}{\partial t}, \\ \mathfrak{K}_z=\dfrac{\partial Z_x}{\partial x}+\dfrac{\partial Z_y}{\partial y}+\dfrac{\partial Z_z}{\partial z}-\dfrac{\partial \mathfrak{g}_z}{\partial t}. \end{cases}$$

Den hier auftretenden Vektor $\mathfrak{g}$ bezeichnen wir als *«Dichte der elektromagnetischen Bewegungsgrösse»* oder kurz als *«Impulsdichte»*. Das System der *«fiktiven elektromagnetischen Spannungen»* besteht aus sechs Grössen, nämlich den Normalspannungen X_x, Y_y, Z_z, und den paarweise einander gleichen Schubspannungen:

$$(6_a)\quad X_y=Y_x,\qquad Y_z=Z_y,\qquad Z_x=X_z.$$

Den *«Impulsgleichungen»* (6) tritt die *Energiegleichung* an die Seite:

$$(7)\quad \mathfrak{w}\mathfrak{K}+Q=-\operatorname{div}\mathfrak{S}-\frac{\partial\psi}{\partial t}.$$

Hier bedeutet Q die JOULE'sche Wärme, ψ die elektromagnetische Energiedichte, $\mathfrak{S}$ den Energiestrom.

Während die Impulsgleichungen die vom elektromagnetischen Felde abgegebene Bewegungsgrösse bestimmen, giebt die Energiegleichung an, welche Energiemenge pro Raum- und Zeit-Einheit in nicht elektromagnetische Form (Arbeit und Wärme) umgewandelt wird.

Führt man in (6) und (7) den durch (3) und (3_a) definierten zeitlichen Differen-

tialquotienten ein, so erhält man eine andere Form der Impuls- und Energie-Sätze

$$
(8) \quad \left\{ \begin{aligned}
\mathfrak{K}_x &= \frac{\partial X'_x}{\partial x} + \frac{\partial X'_y}{\partial y} + \frac{\partial X'_z}{\partial z} - \frac{\delta \mathfrak{g}_x}{\delta t}, \\
\mathfrak{K}_y &= \frac{\partial Y'_x}{\partial x} + \frac{\partial Y'_y}{\partial y} + \frac{\partial Y'_z}{\partial z} - \frac{\delta \mathfrak{g}_y}{\delta t}, \\
\mathfrak{K}_z &= \frac{\partial Z'_x}{\partial x} + \frac{\partial Z'_y}{\partial y} + \frac{\partial Z'_z}{\partial z} - \frac{\delta \mathfrak{g}_z}{\delta t},
\end{aligned} \right.
$$

$$
(9) \quad \mathfrak{w}\mathfrak{K} + Q = - \operatorname{div}\{\mathfrak{S} - \mathfrak{w}\psi\} - \frac{\delta \psi}{\delta t}.
$$

Hier stellt der Vektor

$$
\mathfrak{S} - \mathfrak{w}\psi
$$

den « *relativen Energiestrom* » dar. Das System der « *relativen Spannungen* »

$$
(10) \quad \left\{ \begin{aligned}
X'_x &= X_x + \mathfrak{w}_x \mathfrak{g}_x, & X'_y &= X_y + \mathfrak{w}_y \mathfrak{g}_x, & X'_z &= X_z + \mathfrak{w}_z \mathfrak{g}_x, \\
Y'_x &= Y_x + \mathfrak{w}_x \mathfrak{g}_y, & Y'_y &= Y_y + \mathfrak{w}_y \mathfrak{g}_y, & Y'_z &= Y_z + \mathfrak{w}_z \mathfrak{g}_y, \\
Z'_x &= Z_x + \mathfrak{w}_x \mathfrak{g}_z, & Z'_y &= Z_y + \mathfrak{w}_y \mathfrak{g}_z, & Z'_z &= Z_z + \mathfrak{w}_z \mathfrak{g}_z,
\end{aligned} \right.
$$

ist so definiert, dass (6) und (8) zu dem gleichen Werte der ponderomotorischen Kraft führen.

Aus (6_a) und (10) folgen die Relationen

$$
\begin{aligned}
Y'_x - X'_y &= \mathfrak{w}_x \mathfrak{g}_y - \mathfrak{w}_y \mathfrak{g}_x, \\
Z'_y - Y'_z &= \mathfrak{w}_y \mathfrak{g}_z - \mathfrak{w}_z \mathfrak{g}_y, \\
X'_z - Z'_x &= \mathfrak{w}_z \mathfrak{g}_x - \mathfrak{w}_x \mathfrak{g}_z,
\end{aligned}
$$

die sich vektoriell schreiben lassen

$$
(11) \quad \mathfrak{N}' = [\mathfrak{w}\mathfrak{g}]
$$

$\mathfrak{N}'$ ist das auf die Volumeinheit bezogene *Drehmoment der relativen Spannungen;* es verschwindet in der gewöhnlichen Mechanik, da hier der Impulsvektor der Richtung nach mit dem Geschwindigkeitsvektor übereinstimmt. In der elektromagnetischen Mechanik ist es im allgemeinen nicht zu vernachlässigen, doch wird es, bei Bezugnahme auf einen festen Momentenpunkt, durch dasjenige Drehmoment, welches von der mitgeführten Bewegungsgrösse herrührt, kompensiert.

Wir können den relativen Energiestrom uns in zwei Teile zerlegt denken, von denen der eine die durch die relativen Spannungen bedingte Energieübertragung darstellt, der andere die « relative Strahlung [11] », die sich z. B. in der Optik durch die Wärmeentwickelung in einer schwarzen Fläche messen lässt:

$$
(12) \quad \left\{ \begin{aligned}
\mathfrak{S}_x - \mathfrak{w}_x \psi &= \mathfrak{S}'_x - \{\mathfrak{w}_x X'_x + \mathfrak{w}_y Y'_x + \mathfrak{w}_z Z'_x\}, \\
\mathfrak{S}_y - \mathfrak{w}_y \psi &= \mathfrak{S}'_y - \{\mathfrak{w}_x X'_y + \mathfrak{w}_y Y'_y + \mathfrak{w}_z Z'_y\}, \\
\mathfrak{S}_z - \mathfrak{w}_z \psi &= \mathfrak{S}'_z - \{\mathfrak{w}_x X'_z + \mathfrak{w}_y Y'_z + \mathfrak{w}_z Z'_z\}.
\end{aligned} \right.
$$

Den Vektor $\mathfrak{S}'$ nennen wir den « *relativen Strahl* ».

---

[11]) M. Abraham, l. c. [8]), p. 324.

Aus den Impulsgleichungen (8) finden wir für die Arbeitsleistung der ponderomotorischen Kraft den Ausdruck

$$\begin{aligned} \mathfrak{w}\mathfrak{K} = -\mathfrak{w}\frac{\delta \mathfrak{g}}{\delta t} &+ \frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{w}_x X'_x + \mathfrak{w}_y Y'_x + \mathfrak{w}_z Z'_x) \\ &+ \frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{w}_x X'_y + \mathfrak{w}_y Y'_y + \mathfrak{w}_z Z'_y) \\ &+ \frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{w}_x X'_z + \mathfrak{w}_y Y'_z + \mathfrak{w}_z Z'_z) \\ -\Big\{X'_x \frac{\partial \mathfrak{w}_x}{\partial x} + Y'_x \frac{\partial \mathfrak{w}_y}{\partial x} + Z'_x \frac{\partial \mathfrak{w}_z}{\partial x} &+ X'_y \frac{\partial \mathfrak{w}_x}{\partial y} + Y'_y \frac{\partial \mathfrak{w}_y}{\partial y} + Z'_y \frac{\partial \mathfrak{w}_z}{\partial y} \\ &+ X'_z \frac{\partial \mathfrak{w}_x}{\partial z} + Y'_z \frac{\partial \mathfrak{w}_y}{\partial z} + Z'_z \frac{\partial \mathfrak{w}_z}{\partial z}\Big\}. \end{aligned}$$

Setzen wir hier, zur Abkürzung

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} P' = X'_x \frac{\partial \mathfrak{w}_x}{\partial x} + X'_y \frac{\partial \mathfrak{w}_x}{\partial y} + X'_z \frac{\partial \mathfrak{w}_x}{\partial z} \\ + Y'_x \frac{\partial \mathfrak{w}_y}{\partial x} + Y'_y \frac{\partial \mathfrak{w}_y}{\partial y} + Y'_z \frac{\partial \mathfrak{w}_y}{\partial z} \\ + Z'_x \frac{\partial \mathfrak{w}_z}{\partial x} + Z'_y \frac{\partial \mathfrak{w}_z}{\partial y} + Z'_z \frac{\partial \mathfrak{w}_z}{\partial z}, \end{aligned} \right.$$

so ergiebt die Energiegleichung (9), mit Rüchsicht auf (12)

$$(14) \qquad Q + \operatorname{div} \mathfrak{S}' = -\frac{\delta \psi}{\delta t} + \mathfrak{w}\frac{\delta \mathfrak{g}}{\delta t} + P'.$$

Diese aus Impulssatz und Energiesatz gewonnene Beziehung wird sich weiterhin als wichtig erweisen.

§ 4.

Die Hauptgleichungen.

Allen Theorieen der Elektrodynamik bewegter Körper gemeinsam ist die Form der beiden ersten Hauptgleichungen

$$(\mathrm{I}) \qquad c \operatorname{curl} \mathfrak{H}' = \frac{\partial' \mathfrak{D}}{\partial t} + \mathfrak{J},$$

$$(\mathrm{II}) \qquad c \operatorname{curl} \mathfrak{E}' = -\frac{\partial' \mathfrak{B}}{\partial t}.$$

Sie sind nichts anderes, als ein allgemeines Schema, das erst durch Hinzufügung zweier Beziehungen zwischen den vier auftretenden Vektoren einen physikalischen Sinn erhält; denn zwei solche Beziehungen sind notwendig, um die Zahl der unbekannten Vektoren auf zwei zu reducieren; die zeitliche Veränderung des Feldes dieser beiden Vektoren wird dann durch die beiden ersten Hauptgleichungen beschrieben.

Die Vektoren $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{H}'$, deuten wir als die *Kräfte,* die *an bewegten elektrischen und magnetischen Einheitspolen* angreifen. Die Vektoren $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{B}$ nennen wir, indem wir uns der Terminologie der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften anschliessen, die « *elektrische und magnetische Erregung* ».

Der Bedeutung des Vektors $\mathfrak{E}'$ entspricht es, dass wir für die in Zeit- und Raum-Einheit der bewegten Materie entwickelte *Wärme* den Ansatz machen

(III)
$$Q = \mathfrak{J}\mathfrak{E}'.$$

An diese dritte Hauptgleichung reiht sich als vierte eine Gleichung an, die den *relativen Strahl* mit den Vektoren $\mathfrak{E}'\mathfrak{H}'$ verknüpft

(IV)
$$\mathfrak{S}' = c[\mathfrak{E}'\mathfrak{H}'].$$

Für den Fall der Ruhe geht dieser Vektor in den POYNTING'schen über.

Endlich bedürfen wir eines Ansatzes, welcher die in Gleichung (13) definierte Grösse P', und damit die relativen Spannungen, durch die Vektoren $\mathfrak{E}'\mathfrak{H}'\mathfrak{D}\mathfrak{B}$ ausdrückt. Wir setzen

(V)
$$P' = \mathfrak{E}'(\mathfrak{D}\nabla)\mathfrak{w} + \mathfrak{H}'(\mathfrak{B}\nabla)\mathfrak{w} - \tfrac{1}{2}\{\mathfrak{E}'\mathfrak{D} + \mathfrak{H}'\mathfrak{B}\}\operatorname{div}\mathfrak{w},$$

und erhalten somit für die *relativen Spannungen*

(V_a)
$$\left\{\begin{aligned}
X'_x &= \mathfrak{E}'_x\mathfrak{D}_x + \mathfrak{H}'_x\mathfrak{B}_x - \tfrac{1}{2}\{\mathfrak{E}'\mathfrak{D} + \mathfrak{H}'\mathfrak{B}\},\\
X'_y &= \mathfrak{E}'_x\mathfrak{D}_y + \mathfrak{H}'_x\mathfrak{B}_y,\\
X'_z &= \mathfrak{E}'_x\mathfrak{D}_z + \mathfrak{H}'_x\mathfrak{B}_z;\\
Y'_x &= \mathfrak{E}'_y\mathfrak{D}_x + \mathfrak{H}'_y\mathfrak{B}_x,\\
Y'_y &= \mathfrak{E}'_y\mathfrak{D}_y + \mathfrak{H}'_y\mathfrak{B}_y - \tfrac{1}{2}\{\mathfrak{E}'\mathfrak{D} + \mathfrak{H}'\mathfrak{B}\},\\
Y'_z &= \mathfrak{E}'_y\mathfrak{D}_z + \mathfrak{H}'_y\mathfrak{B}_z;\\
Z'_x &= \mathfrak{E}'_z\mathfrak{D}_x + \mathfrak{H}'_z\mathfrak{B}_x,\\
Z'_y &= \mathfrak{E}'_z\mathfrak{D}_y + \mathfrak{H}'_z\mathfrak{B}_y,\\
Z'_z &= \mathfrak{E}'_z\mathfrak{D}_z + \mathfrak{H}'_z\mathfrak{B}_z - \tfrac{1}{2}\{\mathfrak{E}'\mathfrak{D} + \mathfrak{H}'\mathfrak{B}\}.
\end{aligned}\right.$$

Für den Fall der Ruhe folgen hieraus die bekannten Formeln für die fiktiven Spannungen.

Die Wahl der Ausdrücke (IV) und (V) erscheint auf den ersten Blick als eine ganz willkürliche. Doch ist es die einfachste Verallgemeinerung der in ruhenden Körpern geltenden Gesetze, welche nur die vier in den beiden ersten Hauptgleichungen auftretenden Vektoren verwendet.

Aus (V_a) folgt übrigens:

$$Y'_x - X'_y = \mathfrak{D}_x\mathfrak{E}'_y - \mathfrak{D}_y\mathfrak{E}'_x + \mathfrak{B}_x\mathfrak{H}'_y - \mathfrak{B}_y\mathfrak{H}'_x.$$

Demnach ist das *Drehmoment der relativen Spannungen:*

(V_b)
$$\mathfrak{N}' = [\mathfrak{D}\mathfrak{E}'] + [\mathfrak{B}\mathfrak{H}'].$$

Die im vorigen Paragraphen dargelegten mechanischen Principien, und die fünf Hauptgleichungen sind die Grundlagen, auf denen unser System der Elektrodynamik bewegter Körper beruht.

§ 5.

Bestimmung der Impulsdichte und der Energiedichte.

Die verschiedenen Theorieen der Elektrodynamik bewegter Körper unterscheiden sich durch die Beziehungen, die zwischen den vier in den Hauptgleichungen auftretenden Vektoren $\mathfrak{E}'\,\mathfrak{H}'\,\mathfrak{D}\,\mathfrak{B}$ angenommen werden. Bevor wir jedoch zur Discussion spezieller Theorieen übergehen, wollen wir die allgemeinen Entwickelungen etwas weiter führen; dabei soll über die Form jener Beziehungen nur die recht allgemeine Voraussetzung gemacht werden: Die Vektoren $\mathfrak{E}'\,\mathfrak{H}'\,\mathfrak{D}\,\mathfrak{B}$ sollen durch Gleichungen verknüpft sein, welche zwar den Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{w}$ selbst, aber nicht irgend welche Ableitungen desselben nach der Zeit oder nach den Koordinaten enthalten.

Die Hauptgleichung (IV) ergiebt:

$$\operatorname{div} \mathfrak{S}' = c\{\mathfrak{H}' \operatorname{curl} \mathfrak{E}' - \mathfrak{E}' \operatorname{curl} \mathfrak{H}'\};$$

dies wird, mit Rücksicht auf die beiden ersten Hauptgleichungen:

$$\mathfrak{J}\mathfrak{E}' + \operatorname{div} \mathfrak{S}' = -\mathfrak{E}'\frac{\partial'\mathfrak{D}}{\partial t} - \mathfrak{H}'\frac{\partial'\mathfrak{B}}{\partial t}.$$

Aus der Hauptgleichung (III), und der Relation (14) folgt:

$$(14_a) \qquad \frac{\delta\psi}{\delta t} - \mathfrak{w}\frac{\delta\mathfrak{g}}{\delta t} - P' = \mathfrak{E}'\frac{\partial'\mathfrak{D}}{\partial t} + \mathfrak{H}'\frac{\partial'\mathfrak{B}}{\partial t},$$

eine Bedingung, die man, gemäss (4), auch schreiben kann

$$(14_b) \qquad \frac{\delta\psi}{\delta t} - \mathfrak{w}\frac{\delta\mathfrak{g}}{\delta t} - P' = \mathfrak{E}'\frac{\delta\mathfrak{D}}{\delta t} + \mathfrak{H}'\frac{\delta\mathfrak{B}}{\delta t} - \mathfrak{E}'(\mathfrak{D}\nabla)\mathfrak{w} - \mathfrak{H}'(\mathfrak{B}\nabla)\mathfrak{w},$$

und die endlich, durch Heranziehung der Hauptgleichung (V), übergeht in:

$$(15) \qquad \frac{\delta\psi}{\delta t} - \mathfrak{w}\frac{\delta\mathfrak{g}}{\delta t} = \mathfrak{E}'\frac{\delta\mathfrak{D}}{\delta t} + \mathfrak{H}'\frac{\delta\mathfrak{B}}{\delta t} - \frac{1}{2}\{\mathfrak{E}'\mathfrak{D} + \mathfrak{H}'\mathfrak{B}\} \operatorname{div} \mathfrak{w}.$$

Diese Beziehung dient zur Ermittelung der Dichten der Energie und der Bewegungsgrösse in ihrer Abhängigkeit von den elektromagnetischen Vektoren.

Mit Rücksicht auf (2_a) lautet sie

$$(15_a) \qquad \dot\psi - \mathfrak{w}\dot{\mathfrak{g}} + (\psi - \mathfrak{w}\mathfrak{g}) \operatorname{div} \mathfrak{w} = \mathfrak{E}'\dot{\mathfrak{D}} + \mathfrak{H}'\dot{\mathfrak{B}} + \tfrac{1}{2}\{\mathfrak{E}'\mathfrak{D} + \mathfrak{H}'\mathfrak{B}\} \operatorname{div} \mathfrak{w}.$$

Da die nunmehr verwandte Art der Zeitdifferentiation den gewöhnlichen Rechnungsregeln genügt, so folgt, wenn abkürzungsweise gesetzt wird

$$(16) \qquad \psi - \mathfrak{w}\mathfrak{g} = \varphi,$$

$$(17) \qquad \dot\varphi + \mathfrak{g}\dot{\mathfrak{w}} - \mathfrak{E}'\dot{\mathfrak{D}} - \mathfrak{H}'\dot{\mathfrak{B}} + \{\varphi - \tfrac{1}{2}\mathfrak{E}'\mathfrak{D} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{H}'\mathfrak{B}\} \operatorname{div} \mathfrak{w} = 0.$$

Wie im Eingange dieses Paragraphen erwähnt wurde, sollen die Beziehungen, welche $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{E}'\,\mathfrak{H}'$ verknüpfen, zwar den Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{w}$, aber nicht dessen Differentialquotienten nach Zeit und Ort enthalten. Dasselbe wird von den Aus-

drücken zu verlangen sein, welche ψ und $\mathfrak{g}$ durch die elektromagnetischen Vektoren darstellen, und die zu finden unser nächstes Ziel ist. Demgemäss können wir die Terme in (17), welche nur Differentialquotienten nach der Zeit enthalten, von denjenigen trennen, in welche als Faktor die Divergenz von $\mathfrak{w}$ eingeht; so ergeben sich die Gleichungen

$$(17_a)\qquad \dot{\varphi} + \mathfrak{g}\dot{\mathfrak{w}} = \mathfrak{E}'\dot{\mathfrak{D}} + \mathfrak{H}'\dot{\mathfrak{B}},$$

$$(17_b)\qquad \varphi = \tfrac{1}{2}\mathfrak{E}'\mathfrak{D} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{H}'\mathfrak{B}.$$

Die Elimination von φ ergiebt:

$$(18)\qquad 2\,\mathfrak{g}\dot{\mathfrak{w}} = \mathfrak{E}'\dot{\mathfrak{D}} - \mathfrak{D}\dot{\mathfrak{E}}' + \mathfrak{H}'\dot{\mathfrak{B}} - \mathfrak{B}\dot{\mathfrak{H}}'.$$

Diese Relation wird uns dazu dienen, die Komponenten der Impulsdichte zu ermitteln, nachdem die rechte Seite auf Grund der für die betreffende Theorie charakteristischen Beziehungen zwischen den elektromagnetischen Vektoren als lineare Funktion der Beschleunigungskomponenten ausgedrückt ist.

Für die zu $\mathfrak{w}$ senkrechten Komponenten von $\mathfrak{g}$ ergiebt sich aus (V_b) und (11) die Bedingung

$$(18_a)\qquad [\mathfrak{w}\mathfrak{g}] = [\mathfrak{D}\mathfrak{E}'] + [\mathfrak{B}\mathfrak{H}'].$$

Diese muss in jedem Falle erfüllt sein, da sonst unser System einen inneren Widerspruch aufweisen würde.

Aus (16) und (17_b) bestimmt sich die Energiedichte

$$(19)\qquad \psi = \tfrac{1}{2}\mathfrak{E}'\mathfrak{D} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{H}'\mathfrak{B} + \mathfrak{w}\mathfrak{g}.$$

Nach (V_a) beträgt die Summe der relativen Normalspannungen

$$X'_x + Y'_y + Z'_z = -\{\tfrac{1}{2}\mathfrak{E}'\mathfrak{D} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{H}'\mathfrak{B}\}$$

demnach folgt gemäss (10)

$$X_x + Y_y + Z_z = -\{\tfrac{1}{2}\mathfrak{E}'\mathfrak{D} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{H}'\mathfrak{B} + \mathfrak{w}\mathfrak{g}\}$$

sodass die bemerkenswerte Beziehung besteht

$$(19_a)\qquad X_x + Y_y + Z_z + \psi = 0.$$

Trägt man den Wert (19) von ψ, sowie die Ausdrücke (V_a) der relativen Spannungen in (12) ein, so erhält man für den Energiestrom

$$(20)\qquad \mathfrak{S} = c[\mathfrak{E}'\mathfrak{H}'] + \mathfrak{w}\{\mathfrak{E}'\mathfrak{D} + \mathfrak{H}'\mathfrak{B}\} - \mathfrak{D}(\mathfrak{w}\mathfrak{E}') - \mathfrak{B}(\mathfrak{w}\mathfrak{H}') + \mathfrak{w}(\mathfrak{w}\mathfrak{g}),$$

einen Ausdruck, der auf Grund bekannter Rechnungsregeln übergeht in

$$\frac{\mathfrak{S}}{c} = [\mathfrak{E}'\mathfrak{H}'] + \big[\mathfrak{E}'[\mathfrak{q}\mathfrak{D}]\big] + \big[\mathfrak{H}'[\mathfrak{q}\mathfrak{B}]\big] + \mathfrak{q}(\mathfrak{q}c\mathfrak{g}),$$

wenn abkürzungsweise gesetzt wird

$$\mathfrak{q} = \frac{\mathfrak{w}}{c}.$$

Hierfür kann auch geschrieben werden

$$(21)\qquad \frac{\mathfrak{S}}{c} = \big[\mathfrak{E}' - [\mathfrak{q}\mathfrak{B}],\ \ \mathfrak{H}' + [\mathfrak{q}\mathfrak{D}]\big] - \mathfrak{q}(\mathfrak{q}\mathfrak{W}),$$

wobei unter $\mathfrak{W}$ der Vektor zu verstehen ist

$$\mathfrak{W} = [\mathfrak{D}\mathfrak{B}] - c\mathfrak{g}. \tag{22}$$

Wir gehen nunmehr zu der Discussion spezieller Theorieen über, wobei wir uns durchweg auf isotrope Körper beschränken.

§ 6.

Theorie von H. Hertz.

Die HERTZ'sche Elektrodynamik bewegter Körper setzt die Vektoren $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{B}$ proportional zu $\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{H}'$

$$\mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E}', \qquad \mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H}'. \tag{23}$$

Dementsprechend gilt, wofern ε und μ für einen bestimmten materiellen Punkt eines bewegten Körpers als Konstanten betrachtet werden

$$\mathfrak{E}'\dot{\mathfrak{D}} - \mathfrak{D}\dot{\mathfrak{E}}' = 0, \qquad \mathfrak{H}'\dot{\mathfrak{B}} - \mathfrak{B}\dot{\mathfrak{H}}' = 0.$$

Es folgt somit aus (18)

$$\mathfrak{g} = 0. \tag{24}$$

Die HERTZ'*sche Theorie kennt nicht die elektromagnetische Bewegungsgrösse.* Sie leitet die ponderomotorische Kraft aus den Spannungen allein ab, wobei es, gemäss (10), gleichgültig ist, ob man die Spannungen auf feste oder auf mitbewegte Flächen bezieht. Ein Drehmoment der relativen Spannungen tritt nicht auf, wie denn auch die beiden Seiten von (18_a) gleich Null sind.

Die Energiedichte hat, nach (19), den Wert

$$\psi = \tfrac{1}{2}\varepsilon\mathfrak{E}'^2 + \tfrac{1}{2}\mu\mathfrak{H}'^2. \tag{25}$$

Die einfachen Ansätze, durch welche die HERTZ'sche Theorie die Erregungen $\mathfrak{D}\mathfrak{B}$ mit den elektromagnetischen Kräften $\mathfrak{E}'\mathfrak{H}'$ verknüpft, hat indessen, wie oben erwähnt wurde, das Experiment nicht bestätigt. Es bleibt nur die Wahl zwischen den in den folgenden Paragraphen zu besprechenden Theorieen.

§ 7.

Theorie von E. Cohn.

E. COHN legt der Elektrodynamik bewegter Körper die folgenden Verknüpfungsgleichungen zu Grunde

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{D} &= \varepsilon\mathfrak{E}' - [\mathfrak{q}\mathfrak{H}'], \\ \mathfrak{B} &= \mu\mathfrak{H}' + [\mathfrak{q}\mathfrak{E}']. \end{aligned}\right. \tag{26}$$

Aus ihnen folgt, wenn wiederum $\dot{\varepsilon}$ und $\dot{\mu}$ gleich Null gesetzt werden

$$\mathfrak{E}'\dot{\mathfrak{D}} - \mathfrak{D}\dot{\mathfrak{E}}' = \dot{\mathfrak{q}}[\mathfrak{E}'\mathfrak{H}'] + \mathfrak{q}[\mathfrak{E}'\dot{\mathfrak{H}}'] - \mathfrak{q}[\dot{\mathfrak{E}}'\mathfrak{H}'],$$

$$\mathfrak{H}'\dot{\mathfrak{B}} - \mathfrak{B}\dot{\mathfrak{H}}' = \dot{\mathfrak{q}}[\mathfrak{E}'\mathfrak{H}'] + \mathfrak{q}[\dot{\mathfrak{E}}'\mathfrak{H}'] - \mathfrak{q}[\mathfrak{E}'\dot{\mathfrak{H}}'].$$

Da nun die Relation (18) verlangt

$$2\dot{\mathfrak{q}}c\mathfrak{g} = \mathfrak{E}'\dot{\mathfrak{D}} - \mathfrak{D}\dot{\mathfrak{E}}' + \mathfrak{H}'\dot{\mathfrak{B}} - \mathfrak{B}\dot{\mathfrak{H}}',$$

so ordnet man die COHN'sche Theorie in unser System ein, indem man setzt

(27) $$c\mathfrak{g} = [\mathfrak{E}'\mathfrak{H}'] = \frac{\mathfrak{S}'}{c}.$$

In der COHN'*schen Elektrodynamik ist die Impulsdichte dem durch c^2 geteilten relativen Strahle gleich zu setzen.*

Dass durch (26) und (27) auch der Relation (18_a) Genüge geleistet wird, bestätigt man leicht, indem man beachtet, dass die Identität besteht

$$\left[\mathfrak{q}[\mathfrak{E}'\mathfrak{H}']\right] = \left[\mathfrak{E}'[\mathfrak{q}\mathfrak{H}']\right] - \left[\mathfrak{H}'[\mathfrak{q}\mathfrak{E}']\right].$$

Aus (19) folgt jetzt für die elektromagnetische *Energiedichte*

(28) $$\psi = \tfrac{1}{2}\mathfrak{E}'\mathfrak{D} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{H}'\mathfrak{B} + \mathfrak{q}[\mathfrak{E}'\mathfrak{H}'],$$

ein Ausdruck, der gemäss (26) auch geschrieben werden kann

(28_a) $$\psi = \tfrac{1}{2}\varepsilon\mathfrak{E}'^2 + \tfrac{1}{2}\mu\mathfrak{H}'^2 + 2\mathfrak{q}[\mathfrak{E}'\mathfrak{H}'];$$

er stimmt mit E. COHN's Ansatz überein.

Auf die Berechnung der ponderomotorischen Kraft komme ich weiter unten zurück.

§ 8.

Theorie von H. A. Lorentz.

Wenn wir die Verknüpfungsgleichungen der Theorie von H. A. LORENTZ so abändern, dass Symmetrie der elektrischen und magnetischen Vektoren besteht, so gelangen wir zu dem Ansatze

(29) $$\begin{cases} \mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E}' - [\mathfrak{q}\mathfrak{H}], \\ \mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H}' + [\mathfrak{q}\mathfrak{E}]; \end{cases}$$

(30) $$\begin{cases} \mathfrak{E}' = \mathfrak{E} + [\mathfrak{q}\mathfrak{H}], \\ \mathfrak{H}' = \mathfrak{H} - [\mathfrak{q}\mathfrak{E}]. \end{cases}$$

Hier treten, neben den vier in den Hauptgleichungen enthaltenen Vektoren, zwei neue Vektoren $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ auf. Dieser Umstand macht die LORENTZ'sche Theorie komplicierter, als die COHN'sche. Iene verknüpft unmittelbar die Komponenten von $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{B}$ mit denen von $\mathfrak{E}'\mathfrak{H}'$ durch Gleichungen, die linear in den Geschwindigkeitskomponenten sind; bei dieser dagegen sind die durch Elimination von $\mathfrak{E}\mathfrak{H}$ sich ergebenden Verknüpfungsgleichungen (§ 10, Gl. 37_b) nicht mehr linear in den Geschwindigkeitskomponenten.

Doch kommt den LORENTZ'schen Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ eine anschauliche Bedeutung zu. Es lassen sich nämlich, den Gl. (29), (30) gemäss, die Erregungen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{B}$ in zwei Teile spalten

$$(31)\qquad \begin{cases} \mathfrak{D} = \mathfrak{E} + \mathfrak{P}, & \mathfrak{P} = (\varepsilon - 1)\mathfrak{E}'; \\ \mathfrak{B} = \mathfrak{H} + \mathfrak{M}, & \mathfrak{M} = (\mu - 1)\mathfrak{H}'. \end{cases}$$

Den ersten Bestandteil der elektrischen und magnetischen Erregung, der durch $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ dargestellt wird, deutet LORENTZ als elektrische und magnetische Erregung des *Aethers,* den zweiten, durch die Vektoren $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{M}$ (elektrische und magnetische *Polarisation*) vorgestellten Bestandteil als die elektrische und magnetische Erregung der *Materie;* letztere wird der elektrischen und magnetischen Kraft, $\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{H}'$, die auf mit der Materie bewegte Einheitsladungen wirkt, proportional gesetzt.

Wir wollen in diesem Paragraphen ε und μ, für einen bestimmten materiellen Punkt, als unabhängig von der Geschwindigkeit und von der Zeit betrachten, indem wir uns vorbehalten, diese Einschränkungen später wieder aufzuheben.

Um auf Grund der Relation (18) die Impulsdichte zu ermitteln, berechnen wir die Grössen

$$(31_a)\qquad \begin{cases} \mathfrak{E}'\dot{\mathfrak{D}} - \mathfrak{D}\dot{\mathfrak{E}}' = \mathfrak{E}'\dot{\mathfrak{E}} - \mathfrak{E}\dot{\mathfrak{E}}' + \mathfrak{E}'\dot{\mathfrak{P}} - \mathfrak{P}\dot{\mathfrak{E}}', \\ \mathfrak{H}'\dot{\mathfrak{B}} - \mathfrak{B}\dot{\mathfrak{H}}' = \mathfrak{H}'\dot{\mathfrak{H}} - \mathfrak{H}\dot{\mathfrak{H}}' + \mathfrak{H}'\dot{\mathfrak{M}} - \mathfrak{M}\dot{\mathfrak{H}}'. \end{cases}$$

Aus (30) folgt

$$\mathfrak{E}'\dot{\mathfrak{E}} - \mathfrak{E}\dot{\mathfrak{E}}' = -\mathfrak{q}[\dot{\mathfrak{E}}\mathfrak{H}] + \mathfrak{q}[\mathfrak{E}\dot{\mathfrak{H}}] + \dot{\mathfrak{q}}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}],$$

$$\mathfrak{H}'\dot{\mathfrak{H}} - \mathfrak{H}\dot{\mathfrak{H}}' = -\mathfrak{q}[\mathfrak{E}\dot{\mathfrak{H}}] + \mathfrak{q}[\dot{\mathfrak{E}}\mathfrak{H}] + \dot{\mathfrak{q}}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}].$$

Da nun die beiden anderen Terme in (31_a), gemäss (31), verschwinden, so ergiebt die Relation (18)

$$(32)\qquad c\mathfrak{g} = [\mathfrak{E}\mathfrak{H}]$$

als Wert der *elektromagnetischen Impulsdichte.*

Es ersteht nun die Frage, ob dieser Wert zugleich der Bedingung (18^a) genügt

$$[\mathfrak{q}c\mathfrak{g}] = [\mathfrak{D}\mathfrak{E}'] + [\mathfrak{B}\mathfrak{H}'].$$

Nach (29) ist

$$[\mathfrak{D}\mathfrak{E}'] + [\mathfrak{B}\mathfrak{H}'] = \big[\mathfrak{E}'[\mathfrak{q}\mathfrak{H}]\big] - \big[\mathfrak{H}'[\mathfrak{q}\mathfrak{E}]\big].$$

Aus (30) folgt weiter

$$[\mathfrak{D}\mathfrak{E}'] + [\mathfrak{B}\mathfrak{H}'] = \big[\mathfrak{E}[\mathfrak{q}\mathfrak{H}]\big] - \big[\mathfrak{H}[\mathfrak{q}\mathfrak{E}]\big].$$

Auf Grund der bekannten Identität

$$\big[\mathfrak{q}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]\big] = \big[\mathfrak{E}[\mathfrak{q}\mathfrak{H}]\big] - \big[\mathfrak{H}[\mathfrak{q}\mathfrak{E}]\big]$$

erweist es sich, dass der Ausdruck (32) für die Impulsdichte wirklich der Bedingung (18_a) genügt.

Aus (19) folgt nun der Wert der *Energiedichte*

$$(33)\qquad \psi = \tfrac{1}{2}\mathfrak{E}'\mathfrak{D} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{H}'\mathfrak{B} + \mathfrak{q}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}],$$

den man auch schreiben kann

$$(33_a)\qquad \psi = \tfrac{1}{2}\mathfrak{E}^2 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{H}^2 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{E}'\mathfrak{P} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{H}'\mathfrak{M}.$$

Die ersten beiden Glieder sind im Sinne der LORENTZ'schen Theorie als Beiträge des *Aethers,* die beiden letzten als Beiträge der polarisierten *Materie* zur elektromagnetischen Impulsdichte anzusehen.

Wir schreiten zur Berechnung des Energiestromes. Mit Rücksicht auf (32) und (31) gilt in der LORENTZ'schen Theorie für den am Schlusse des § 5 eingeführten Vektor $\mathfrak{W}$ der Ausdruck

$$\mathfrak{W} = [\mathfrak{D}\mathfrak{B}] - [\mathfrak{E}\mathfrak{H}] = [\mathfrak{E}\mathfrak{M}] + [\mathfrak{P}\mathfrak{H}] + [\mathfrak{P}\mathfrak{M}]. \tag{34}$$

Nach (31) und (30) hat man

$$\mathfrak{E}' - [\mathfrak{q}\mathfrak{B}] = \mathfrak{E} - [\mathfrak{q}\mathfrak{M}],$$
$$\mathfrak{H}' + [\mathfrak{q}\mathfrak{D}] = \mathfrak{H} + [\mathfrak{q}\mathfrak{P}],$$

sodass die Gleichung (21) die Form annimmt

$$\frac{\mathfrak{S}}{c} = \big[\mathfrak{E} - [\mathfrak{q}\mathfrak{M}], \quad \mathfrak{H} + [\mathfrak{q}\mathfrak{P}]\big] - \mathfrak{q}(\mathfrak{q}\mathfrak{W}).$$

Da nun, nach (34), zu setzen ist

$$\mathfrak{q}(\mathfrak{q}\mathfrak{W}) = \big[[\mathfrak{q}\mathfrak{E}][\mathfrak{q}\mathfrak{M}]\big] + \big[[\mathfrak{q}\mathfrak{P}][\mathfrak{q}\mathfrak{H}]\big] + \big[[\mathfrak{q}\mathfrak{P}][\mathfrak{q}\mathfrak{M}]\big],$$

so folgt schliesslich als *Wert des Energiestromes*

$$\frac{\mathfrak{S}}{c} = [\mathfrak{E}\mathfrak{H}] + \big[\mathfrak{E}'[\mathfrak{q}\mathfrak{P}]\big] + \big[\mathfrak{H}'[\mathfrak{q}\mathfrak{M}]\big]. \tag{35}$$

Das erste Glied lässt sich als Anteil des *Aethers,* das zweite als Anteil der elektrisch *polarisierten Materie* am Energiestrome auffassen, wie G. NORDSTRÖM [12]) in einer kürzlich erschienenen, auch sonst bemerkenswerten Arbeit dargelegt hat; das dritte, bei Bewegung magnetisch polarisierter Materie hinzutretende Glied entspricht dem zweiten so, wie es die hier angenommene Symmetrie der elektrischen und magnetischen Vektoren verlangt.

§ 9.

Theorie von H. Minkowski.

In dieser Theorie gelten die folgenden Beziehungen zwischen den elektromagnetischen Vektoren

$$\begin{cases} \mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E}' - [\mathfrak{q}\mathfrak{H}], \\ \mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H}' + [\mathfrak{q}\mathfrak{E}]; \end{cases} \tag{36}$$

$$\begin{cases} \mathfrak{E}' = \mathfrak{E} + [\mathfrak{q}\mathfrak{B}], \\ \mathfrak{H}' = \mathfrak{H} - [\mathfrak{q}\mathfrak{D}]. \end{cases} \tag{37}$$

Auch hier tritt, neben den beiden in den Hauptgleichungen enthaltenen Vektorpaaren, ein neues Vektorpaar auf, welches die Beziehung zwischen jenen vermittelt.

---

[12]) G. NORDSTRÖM, *Die Energiegleichung für das elektromagnetische Feld bewegter Körper* (Dissertation, Helsingfors 1908).

Vom Standpunkte des von uns zu Grunde gelegten Systems entsteht wiederum die Aufgabe, die Impulsdichte aus der Relation (18) abzuleiten. Es folgt aus (36)

$$\mathfrak{E}'\dot{\mathfrak{D}} - \mathfrak{D}\dot{\mathfrak{E}}' = \dot{\mathfrak{q}}[\mathfrak{E}'\mathfrak{H}] + \mathfrak{q}[\mathfrak{E}'\dot{\mathfrak{H}}] - \mathfrak{q}[\dot{\mathfrak{E}}'\mathfrak{H}],$$
$$\mathfrak{H}'\dot{\mathfrak{B}} - \mathfrak{B}\dot{\mathfrak{H}}' = \dot{\mathfrak{q}}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}'] + \mathfrak{q}[\dot{\mathfrak{E}}\mathfrak{H}'] - \mathfrak{q}[\mathfrak{E}\dot{\mathfrak{H}}'].$$

Somit wird die rechte Seite von (18)

$$(38)\quad \begin{cases} \mathfrak{E}'\dot{\mathfrak{D}} - \mathfrak{D}\dot{\mathfrak{E}}' + \mathfrak{H}'\dot{\mathfrak{B}} - \mathfrak{B}\dot{\mathfrak{H}}' = \dot{\mathfrak{q}}\{[\mathfrak{E}'\mathfrak{H}] + [\mathfrak{E}\mathfrak{H}']\} \\ \qquad + \mathfrak{q}\{[\mathfrak{E}'\dot{\mathfrak{H}}] + [\dot{\mathfrak{E}}\mathfrak{H}'] - [\dot{\mathfrak{E}}'\mathfrak{H}] - [\mathfrak{E}\dot{\mathfrak{H}}']\}. \end{cases}$$

Wir drücken, auf Grund von (37), $\mathfrak{E}\mathfrak{H}$ sowie $\dot{\mathfrak{E}}\dot{\mathfrak{H}}$ durch die in den Hauptgleichungen auftretenden Vektoren aus, und finden

$$(38_a)\quad [\mathfrak{E}'\mathfrak{H}] + [\mathfrak{E}\mathfrak{H}'] = 2[\mathfrak{E}'\mathfrak{H}'] + \mathfrak{q}(\mathfrak{E}'\mathfrak{D}) - \mathfrak{D}(\mathfrak{q}\mathfrak{E}') + \mathfrak{q}(\mathfrak{H}'\mathfrak{B}) - \mathfrak{B}(\mathfrak{q}\mathfrak{H}')$$

$$(38_b)\quad \begin{cases} \quad [\mathfrak{E}'\dot{\mathfrak{H}}] + [\dot{\mathfrak{E}}\mathfrak{H}'] - [\dot{\mathfrak{E}}'\mathfrak{H}] - [\mathfrak{E}\dot{\mathfrak{H}}'] \\ = \dot{\mathfrak{q}}(\mathfrak{E}'\mathfrak{D}) - \mathfrak{D}(\dot{\mathfrak{q}}\mathfrak{E}') + \dot{\mathfrak{q}}(\mathfrak{H}'\mathfrak{B}) - \mathfrak{B}(\dot{\mathfrak{q}}\mathfrak{H}') \\ + \mathfrak{q}\{\mathfrak{E}'\dot{\mathfrak{D}} - \mathfrak{D}\dot{\mathfrak{E}}' + \mathfrak{H}'\dot{\mathfrak{B}} - \mathfrak{B}\dot{\mathfrak{H}}'\} \\ - \{\dot{\mathfrak{D}}(\mathfrak{q}\mathfrak{E}') - \mathfrak{D}(\mathfrak{q}\dot{\mathfrak{E}}') + \dot{\mathfrak{B}}(\mathfrak{q}\mathfrak{H}') - \mathfrak{B}(\mathfrak{q}\dot{\mathfrak{H}}')\}. \end{cases}$$

Indem wir $(38_{a,b})$ in (38) einsetzen, erhalten wir

$$(38_c)\quad \begin{cases} \qquad \mathfrak{E}'\dot{\mathfrak{D}} - \mathfrak{D}\dot{\mathfrak{E}}' + \mathfrak{H}'\dot{\mathfrak{B}} - \mathfrak{B}\dot{\mathfrak{H}}' \\ = 2\dot{\mathfrak{q}}\{[\mathfrak{E}'\mathfrak{H}'] + \mathfrak{q}(\mathfrak{E}'\mathfrak{D}) + \mathfrak{q}(\mathfrak{H}'\mathfrak{B}) - \mathfrak{D}(\mathfrak{q}\mathfrak{E}') - \mathfrak{B}(\mathfrak{q}\mathfrak{H}')\} \\ + (\dot{\mathfrak{q}}\mathfrak{D})(\mathfrak{q}\mathfrak{E}') - (\mathfrak{q}\mathfrak{D})(\dot{\mathfrak{q}}\mathfrak{E}') - (\mathfrak{q}\dot{\mathfrak{D}})(\mathfrak{q}\mathfrak{E}') + (\mathfrak{q}\mathfrak{D})(\mathfrak{q}\dot{\mathfrak{E}}') \\ + (\dot{\mathfrak{q}}\mathfrak{B})(\mathfrak{q}\mathfrak{H}') - (\mathfrak{q}\mathfrak{B})(\dot{\mathfrak{q}}\mathfrak{H}') - (\mathfrak{q}\dot{\mathfrak{B}})(\mathfrak{q}\mathfrak{H}') + (\mathfrak{q}\mathfrak{B})(\mathfrak{q}\dot{\mathfrak{H}}') \\ + \mathfrak{q}^2\{\mathfrak{E}'\dot{\mathfrak{D}} - \mathfrak{D}\dot{\mathfrak{E}}' + \mathfrak{H}'\dot{\mathfrak{B}} - \mathfrak{B}\dot{\mathfrak{H}}'\}. \end{cases}$$

Nun folgt aber aus (36)

$$-(\mathfrak{q}\dot{\mathfrak{D}})(\mathfrak{q}\mathfrak{E}') + (\mathfrak{q}\mathfrak{D})(\mathfrak{q}\dot{\mathfrak{E}}') = (\dot{\mathfrak{q}}\mathfrak{D})(\mathfrak{q}\mathfrak{E}') - (\mathfrak{q}\mathfrak{D})(\dot{\mathfrak{q}}\mathfrak{E}'),$$
$$-(\mathfrak{q}\dot{\mathfrak{B}})(\mathfrak{q}\mathfrak{H}') + (\mathfrak{q}\mathfrak{B})(\mathfrak{q}\dot{\mathfrak{H}}') = (\dot{\mathfrak{q}}\mathfrak{B})(\mathfrak{q}\mathfrak{H}') - (\mathfrak{q}\mathfrak{B})(\dot{\mathfrak{q}}\mathfrak{H}');$$

es nehmen somit die zweite und dritte Zeile der rechten Seite von (38_c) die Werte an

$$2\{(\dot{\mathfrak{q}}\mathfrak{D})(\mathfrak{q}\mathfrak{E}') - (\mathfrak{q}\mathfrak{D})(\dot{\mathfrak{q}}\mathfrak{E}')\} = 2([\dot{\mathfrak{q}}\mathfrak{q}][\mathfrak{D}\mathfrak{E}']),$$
$$2\{(\dot{\mathfrak{q}}\mathfrak{B})(\mathfrak{q}\mathfrak{H}') - (\mathfrak{q}\mathfrak{B})(\dot{\mathfrak{q}}\mathfrak{H}')\} = 2([\dot{\mathfrak{q}}\mathfrak{q}][\mathfrak{B}\mathfrak{H}']).$$

Wenn nun in der Tat, wie es (18_a) verlangt, gilt

$$(39)\quad [\mathfrak{q}c\mathfrak{g}] = [\mathfrak{D}\mathfrak{E}'] + [\mathfrak{B}\mathfrak{H}'],$$

so liefern die zweite und dritte Zeile zusammen

$$2([\dot{\mathfrak{q}}\mathfrak{q}][\mathfrak{q}c\mathfrak{g}]) = 2(\dot{\mathfrak{q}}\mathfrak{q})(\mathfrak{q}c\mathfrak{g}) - \mathfrak{q}^2(\dot{\mathfrak{q}}\,2c\mathfrak{g}).$$

Daher folgt aus (18) schliesslich

$$(39_a)\quad c\mathfrak{g} = [\mathfrak{E}'\mathfrak{H}'] + \mathfrak{q}(\mathfrak{E}'\mathfrak{D}) + \mathfrak{q}(\mathfrak{H}'\mathfrak{B}) - \mathfrak{D}(\mathfrak{q}\mathfrak{E}') - \mathfrak{B}(\mathfrak{q}\mathfrak{H}') + \mathfrak{q}(\mathfrak{q}c\mathfrak{g}).$$

Die Vergleichung mit (20) ergiebt die wichtige Beziehung

$$(40)\quad \mathfrak{g} = \frac{\mathfrak{S}}{c^2}.$$

Fügt man die MINKOWSKI'*schen Verknüpfungsgleichungen zwischen den elektromagnetischen Vektoren in unser System ein, so wird die Impulsdichte im bewegten Körper gleich dem durch c^2 geteilten Energiestrome.*

Aus (40) und (21) folgt, mit Rücksicht auf (37)

$$c\mathfrak{g} = [\mathfrak{E}\mathfrak{H}] - \mathfrak{q}(\mathfrak{q}\mathfrak{W}), \tag{40$_a$}$$

wobei sich der Vektor

$$\mathfrak{W} = [\mathfrak{D}\mathfrak{B}] - c\mathfrak{g} \tag{40$_b$}$$

bestimmt aus

$$\mathfrak{W} - \mathfrak{q}(\mathfrak{q}\mathfrak{W}) = [\mathfrak{D}\mathfrak{B}] - [\mathfrak{E}\mathfrak{H}]. \tag{40$_c$}$$

Lassen wir die x-Achse in die Richtung von $\mathfrak{q}$ weisen, und setzen

$$k^2 = 1 - |\mathfrak{q}|^2 \tag{40$_d$}$$

so werden die Komponenten von $\mathfrak{W}$

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{W}_x &= k^{-2}\{[\mathfrak{D}\mathfrak{B}]_x - [\mathfrak{E}\mathfrak{H}]_x\}, \\ \mathfrak{W}_y &= [\mathfrak{D}\mathfrak{B}]_y - [\mathfrak{E}\mathfrak{H}]_y, \\ \mathfrak{W}_z &= [\mathfrak{D}\mathfrak{B}]_z - [\mathfrak{E}\mathfrak{H}]_z, \end{aligned}\right. \tag{41}$$

und es folgt aus (40$_a$),

$$\left\{\begin{aligned} c\mathfrak{g}_x &= \frac{\mathfrak{S}_x}{c} = k^{-2}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]_x - |\mathfrak{q}|^2 k^{-2}[\mathfrak{D}\mathfrak{B}]_x, \\ c\mathfrak{g}_y &= \frac{\mathfrak{S}_y}{c} = [\mathfrak{E}\mathfrak{H}]_y, \\ c\mathfrak{g}_z &= \frac{\mathfrak{S}_z}{c} = [\mathfrak{E}\mathfrak{H}]_z. \end{aligned}\right. \tag{42}$$

Die obige Ableitung hat eine Lücke; es fehlt der Nachweis, dass die als geltend angenommene Gleichung (39) wirklich erfüllt ist. Um ihn zu führen, berechnen wir den Vektor

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}' &= [\mathfrak{D}\mathfrak{E}'] + [\mathfrak{B}\mathfrak{H}'] = \big[\mathfrak{E}'[\mathfrak{q}\mathfrak{H}]\big] - \big[\mathfrak{H}'[\mathfrak{q}\mathfrak{E}]\big] \\ &= \mathfrak{q}(\mathfrak{E}'\mathfrak{H}) - \mathfrak{q}(\mathfrak{E}\mathfrak{H}') + \mathfrak{E}(\mathfrak{q}\mathfrak{H}') - \mathfrak{H}(\mathfrak{q}\mathfrak{E}'). \end{aligned}$$

Da man hat

$$\mathfrak{E}'\mathfrak{H} - \mathfrak{E}\mathfrak{H}' = \mathfrak{q}\{[\mathfrak{D}\mathfrak{E}'] + [\mathfrak{B}\mathfrak{H}']\} = (\mathfrak{q}\mathfrak{N}'),$$

$$\mathfrak{E}(\mathfrak{q}\mathfrak{H}') - \mathfrak{H}(\mathfrak{q}\mathfrak{E}') = \mathfrak{E}(\mathfrak{q}\mathfrak{H}) - \mathfrak{H}(\mathfrak{q}\mathfrak{E}) = \big[\mathfrak{q}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]\big],$$

so wird mit Rücksicht auf (40$_a$)

$$\mathfrak{N}' - \mathfrak{q}(\mathfrak{q}\mathfrak{N}') = [\mathfrak{q}c\mathfrak{g}].$$

Man kann, weil hiernach die in die Richtung des Vektors $\mathfrak{q}$ fallende Komponente von $\mathfrak{N}'$ gleich Null ist, auch schreiben

$$\mathfrak{N}' = [\mathfrak{D}\mathfrak{E}'] + [\mathfrak{B}\mathfrak{H}'] = [\mathfrak{q}c\mathfrak{g}]. \tag{43}$$

Damit ist die Bedingung (18$_a$) als giltig dargetan, und gleichzeitig die Lücke in der obigen Ableitung des Wertes von $\mathfrak{g}$ ausgefüllt.

Aus (19) folgt der Wert der *Energiedichte*

$$\psi = \tfrac{1}{2}\mathfrak{E}'\mathfrak{D} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{H}'\mathfrak{B} + \mathfrak{q}c\mathfrak{g}, \tag{44}$$

der gemäss (37) und (40_b) auf die Form zu bringen ist

$$(44_a)\qquad \psi = \tfrac{1}{2}\mathfrak{E}\mathfrak{D} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{H}\mathfrak{B} - \mathfrak{q}\mathfrak{W}.$$

Um die Vergleichung unserer Ergebnisse mit den Ansätzen MINKOWSKI's zu erleichtern, schreiben wir

$$c\mathfrak{g}_x = X_t, \qquad c\mathfrak{g}_y = Y_t, \qquad c\mathfrak{g}_z = Z_t,$$
$$\mathfrak{S}_x = cT_x, \qquad \mathfrak{S}_y = cT_y, \qquad \mathfrak{S}_z = cT_z,$$
$$ct = l, \qquad \mathfrak{w}\mathfrak{K} + Q = c\mathfrak{K}_t, \qquad \psi = T_t.$$

Dann lauten die Impulsgleichungen (6) und die Energiegleichung (7)

$$\mathfrak{K}_x = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} - \frac{\partial X_t}{\partial l},$$
$$\mathfrak{K}_y = \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} - \frac{\partial Y_t}{\partial l},$$
$$\mathfrak{K}_z = \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} - \frac{\partial Z_t}{\partial l},$$
$$\mathfrak{K}_t = -\frac{\partial T_x}{\partial x} - \frac{\partial T_y}{\partial y} - \frac{\partial T_z}{\partial z} - \frac{\partial T_t}{\partial l}.$$

Dabei besteht, gemäss (19_a), die Beziehung

$$X_x + Y_y + Z_z + T_t = 0.$$

Nun besagt die Relation (40)

$$X_t = T_x, \qquad Y_t = T_y, \qquad Z_t = T_z.$$

Im Verein mit (6_a) enthalten diese Beziehungen eine merkwürdige Symmetrieeigenschaft jenes Gleichungssystemes, die sich in MINKOWSKI's Ansätzen nicht findet. Was das Verhalten bei LORENTZ'schen Transformationen anbelangt, so transformieren sich die 10 Grössen

$$X_x, \quad Y_y, \quad Z_z, \quad -T_t, \quad X_y = Y_x, \quad Y_z = Z_y,$$
$$Z_x = X_z, \quad -X_t = -T_x, \quad -Y_t = -T_y, \quad -Z_t = -T_z,$$

wie die Quadrate und Produkte der Koordinaten xyz und des Lichtweges l. Demgemäss genügt dieser « *Raum- Zeit- Tensor* » dem « *Principe der Relativität* » im Sinne MINKOWSKI's; dasselbe gilt von dem aus ihm abgeleiteten « *Raum- Zeit- Vektor erster Art* » $\mathfrak{K}$. Auch die *ponderomotorische Kraft,* die wir im § 12 berechnen werden, *genügt somit dem Relativitätsprincipe.*

§ 10.

Beziehung zwischen den Theorieen von Lorentz und von Minkowski.

Wir haben die anschauliche Bedeutung hervorgehoben, welche in der LORENTZ'schen Theorie den Vektoren $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ zukommt, als Anteil des Aethers an der elektrischen und der magnetischen Erregung. In der Theorie von MINKOWSKI entbehren die Vektoren,

durch deren Vermittelung $\mathfrak{D}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{E}'\mathfrak{H}'$ mit einander verknüpft werden, einer solchen Veranschaulichung. Es liegt auch, wenn man sich auf den Standpunkt des Relativitätsprincipes stellt, kein Grund vor, vom Aether und dessen elektromagnetischen Eigenschaften zu sprechen. Dieses Princip betrachtet nur die Materie in ihrer Bewegung relativ zum Beobachter, und die elektromagnetischen Vorgänge in dieser Materie.

Für unser System der Elektrodynamik bewegter Körper sind indessen die Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ von geringerer Bedeutung, als die Vektoren $\mathfrak{D}\mathfrak{B}\mathfrak{E}'\mathfrak{H}'$. Wenn wir, unter Elimination von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$, diese vier Vektoren unmittelbar mit einander verknüpfen, wird die Verwandschaft der Theorieen von Minkowski und Lorentz deutlich werden.

A) Theorie von Minkowski.

Aus den Gleichungen (36) und (37) des § 9 folgt

$$(45)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{D} + [\mathfrak{q}[\mathfrak{q}\mathfrak{D}]] &= \varepsilon\mathfrak{E}' - [\mathfrak{q}\mathfrak{H}'], \\ \mathfrak{B} + [\mathfrak{q}[\mathfrak{q}\mathfrak{B}]] &= \mu\mathfrak{H}' + [\mathfrak{q}\mathfrak{E}']. \end{aligned}\right.$$

Legen wir die x-Achse in Richtung von $\mathfrak{q}$, so gilt für die nach dieser Richtung genommenen Komponenten

$$(45_a)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{D}_x &= \varepsilon\mathfrak{E}'_x, \\ \mathfrak{B}_x &= \mu\mathfrak{H}'_x. \end{aligned}\right.$$

Hingegen gilt für die senkrecht zur Bewegungsrichtung genommenen Komponenten

$$(45_b)\qquad \left\{\begin{aligned} k^2\mathfrak{D}_y &= \varepsilon\mathfrak{E}'_y - [\mathfrak{q}\mathfrak{H}']_y, \\ k^2\mathfrak{B}_y &= \mu\mathfrak{H}'_y + [\mathfrak{q}\mathfrak{E}']_y. \end{aligned}\right.$$

B) Theorie von Lorentz.

Aus den Gleichungen (30) des § 8 folgt

$$(46)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{E} + [\mathfrak{q}[\mathfrak{q}\mathfrak{E}]] &= \mathfrak{E}' - [\mathfrak{q}\mathfrak{H}'], \\ \mathfrak{H} + [\mathfrak{q}[\mathfrak{q}\mathfrak{H}]] &= \mathfrak{H}' + [\mathfrak{q}\mathfrak{E}']. \end{aligned}\right.$$

Es sind also die Komponenten von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ parallel bezw. senkrecht zur Richtung der Geschwindigkeit

$$(46_a)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{E}_x &= \mathfrak{E}'_x, \qquad & k^2\mathfrak{E}_y &= \mathfrak{E}'_y - [\mathfrak{q}\mathfrak{H}']_y; \\ \mathfrak{H}_x &= \mathfrak{H}'_x, \qquad & k^2\mathfrak{H}_y &= \mathfrak{H}'_y + [\mathfrak{q}\mathfrak{E}']_y. \end{aligned}\right.$$

Während bei Minkowski in isotropen Körpern ε und μ von der Richtung unabhängig sind, wird bei Lorentz zugelassen, dass für die Erregungen parallel und senkrecht zu $\mathfrak{q}$ verschiedene Werte von ε und μ in Frage kommen. Demgemäss erhält man, aus (29) und (46_a), für die longitudinalen Komponenten von $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{B}$

$$(47_a)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{D}_x &= \varepsilon_x\mathfrak{E}'_x, \\ \mathfrak{B}_x &= \mu_x\mathfrak{H}'_x; \end{aligned}\right.$$

und für die transversalen Komponenten

$$(47_b)\quad \begin{cases} k^2\mathfrak{D}_y = (k^2\varepsilon_y + |\mathfrak{q}|^2)\mathfrak{E}'_y - [\mathfrak{q}\mathfrak{H}']_y, \\ k^2\mathfrak{B}_y = (k^2\mu_y + |\mathfrak{q}|^2)\mathfrak{H}'_y + [\mathfrak{q}\mathfrak{E}']_y. \end{cases}$$

Vergleichen wir einerseits (45_a) und (47_a), andererseits (45_b) und (47_b), so erkennen wir, dass die Gleichungen, die $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{H}'$ verknüpfen, in beiden Theorieen übereinstimmen, wenn man in der LORENTZ'schen Theorie setzt

$$(48_a)\quad \varepsilon_x = \varepsilon, \qquad \mu_x = \mu;$$

$$(48_b)\quad \varepsilon_y - 1 = k^{-2}(\varepsilon - 1), \qquad \mu_y - 1 = k^{-2}(\mu - 1).$$

Es werden dann die longitudinalen und die transversalen Komponenten der elektrischen und magnetischen Polarisation, nach (31)

$$(48_c)\quad \mathfrak{P}_x = (\varepsilon - 1)\mathfrak{E}'_x, \qquad \mathfrak{P}_y = k^{-2}(\varepsilon - 1)\mathfrak{E}'_y, \qquad \mathfrak{P}_z = k^{-2}(\varepsilon - 1)\mathfrak{E}'_z;$$

$$(48_d)\quad \mathfrak{M}_x = (\mu - 1)\mathfrak{H}'_x, \qquad \mathfrak{M}_y = k^{-2}(\mu - 1)\mathfrak{H}'_y, \qquad \mathfrak{M}_z = k^{-2}(\mu - 1)\mathfrak{H}'_z.$$

Dass die elektrische Polarisation eines im Ruhezustande isotropen Körpers in der durch (48_c) angezeigten Weise durch seine Bewegung beeinflusst werden muss, wenn das Relativitätspostulat mit der LORENTZ'schen Theorie vereinbar sein soll, hat schon H. A. LORENTZ (1904) ausgesprochen. Nimmt man die Symmetrie der elektrischen und magnetischen Vektoren an, so ergiebt sich für die magnetische Polarisation das entsprechende Verhalten.

Die in § 8 gemachte Voraussetzung, dass ε und μ von der Geschwindigkeit unabhängig sein sollen, ist nunmehr hinfällig geworden. Mithin müssen auch die dort gefundenen Werte der Impulsdichte, der Energiedichte und des Energiestromes corrigiert werden. Nicht mehr zu vernachlässigen sind jetzt die in (31_a) eingehenden Grössen

$$(49)\quad \begin{cases} \mathfrak{E}'\dot{\mathfrak{P}} - \mathfrak{P}\dot{\mathfrak{E}}' = 2\,\mathfrak{E}'\dot{\mathfrak{P}} - \dfrac{d}{dt}(\mathfrak{E}'\mathfrak{P}), \\ \mathfrak{H}'\dot{\mathfrak{M}} - \mathfrak{M}\dot{\mathfrak{H}}' = 2\,\mathfrak{H}'\dot{\mathfrak{M}} - \dfrac{d}{dt}(\mathfrak{H}'\mathfrak{M}). \end{cases}$$

Es folgt, aus (48_c)

$$(49_a)\quad \mathfrak{E}'\mathfrak{P} = (\varepsilon - 1)\{\mathfrak{E}'^2_x + k^{-2}(\mathfrak{E}'^2_y + \mathfrak{E}'^2_z)\}.$$

Ferner erhält man, unter Berücksichtigung der transversalen Beschleunigung und der durch sie bedingten Drehung des Polarisationsellipsoides, für die Komponenten von $\dot{\mathfrak{P}}$ die Ausdrücke

$$(49_b)\quad \begin{cases} \dot{\mathfrak{P}}_x = (\varepsilon - 1)\dot{\mathfrak{E}}'_x - \dfrac{\dot{\mathfrak{q}}_y}{|\mathfrak{q}|}\mathfrak{P}_y - \dfrac{\dot{\mathfrak{q}}_z}{|\mathfrak{q}|}\mathfrak{P}_z, \\ \dot{\mathfrak{P}}_y = k^{-2}(\varepsilon - 1)\dot{\mathfrak{E}}'_y + 2\,\dot{\mathfrak{q}}_x|\mathfrak{q}|k^{-2}\mathfrak{P}_y + \dfrac{\dot{\mathfrak{q}}_y}{|\mathfrak{q}|}\mathfrak{P}_x, \\ \dot{\mathfrak{P}}_z = k^{-2}(\varepsilon - 1)\dot{\mathfrak{E}}'_z + 2\,\dot{\mathfrak{q}}_x|\mathfrak{q}|k^{-2}\mathfrak{P}_z + \dfrac{\dot{\mathfrak{q}}_z}{|\mathfrak{q}|}\mathfrak{P}_x. \end{cases}$$

Hieraus folgt

$$(49_c)\quad \begin{cases} 2\,\mathfrak{E}'\dot{\mathfrak{P}} = 2(\varepsilon-1)\{\mathfrak{E}'_x\dot{\mathfrak{E}}'_x + k^{-2}\mathfrak{E}'_y\dot{\mathfrak{E}}'_y + k^{-2}\mathfrak{E}'_z\dot{\mathfrak{E}}'_z\} \\ \quad + 4\,\dot{\mathfrak{q}}_x|\mathfrak{q}|k^{-2}\{\mathfrak{E}'_y\mathfrak{P}_y + \mathfrak{E}'_z\mathfrak{P}_z\} \\ \quad - 2\dfrac{\dot{\mathfrak{q}}_y}{|\mathfrak{q}|}\{\mathfrak{E}'_x\mathfrak{P}_y - \mathfrak{E}'_y\mathfrak{P}_x\} - 2\dfrac{\dot{\mathfrak{q}}_z}{|\mathfrak{q}|}\{\mathfrak{E}'_x\mathfrak{P}_z - \mathfrak{E}'_z\mathfrak{P}_x\}, \end{cases}$$

während (49_a) ergiebt

$$(49_d)\quad \frac{d}{dt}(\mathfrak{E}'\mathfrak{P}) = 2(\varepsilon-1)\{\mathfrak{E}'_x\dot{\mathfrak{E}}'_x + k^{-2}\mathfrak{E}'_y\dot{\mathfrak{E}}'_y + k^{-2}\mathfrak{E}'_z\dot{\mathfrak{E}}'_z\} + 2\,\dot{\mathfrak{q}}_x|\mathfrak{q}|k^{-2}\{\mathfrak{E}'_y\mathfrak{P}_y + \mathfrak{E}'_z\mathfrak{P}_z\}.$$

Da man nun, nach (48_c), hat

$$\mathfrak{E}'_x\mathfrak{P}_y - \mathfrak{E}'_y\mathfrak{P}_x = |\mathfrak{q}|^2\mathfrak{E}'_x\mathfrak{P}_y,$$
$$\mathfrak{E}'_x\mathfrak{P}_z - \mathfrak{E}'_z\mathfrak{P}_x = |\mathfrak{q}|^2\mathfrak{E}'_x\mathfrak{P}_z,$$

so ergiebt sich

$$(49_e)\quad \begin{cases} \mathfrak{E}'\dot{\mathfrak{P}} - \dot{\mathfrak{P}}\mathfrak{E}' = 2\,\dot{\mathfrak{q}}_x|\mathfrak{q}|k^{-2}\{\mathfrak{E}'_y\mathfrak{P}_y + \mathfrak{E}'_z\mathfrak{P}_z\} \\ \qquad - 2\,\dot{\mathfrak{q}}_y|\mathfrak{q}|\mathfrak{E}'_x\mathfrak{P}_y - 2\,\dot{\mathfrak{q}}_z|\mathfrak{q}|\mathfrak{E}'_x\mathfrak{P}_z. \end{cases}$$

Die Einführung dieses Ausdruckes, und des ihm entsprechenden für den magnetischen Term, in (31_a), ergiebt, an Stelle des Wertes (32) der Impulsdichte, den berichtigten Wert

$$(50)\quad \begin{cases} c\mathfrak{g} = [\mathfrak{E}\mathfrak{H}] + [\mathfrak{E}'[\mathfrak{q}\mathfrak{P}]] + [\mathfrak{H}'[\mathfrak{q}\mathfrak{M}]] \\ \quad + \mathfrak{q}|\mathfrak{q}|^2k^{-2}\{\mathfrak{E}'_y\mathfrak{P}_y + \mathfrak{E}'_z\mathfrak{P}_z + \mathfrak{H}'_y\mathfrak{M}_y + \mathfrak{H}'_z\mathfrak{M}_z\}. \end{cases}$$

Dass die Relation (18_a) erfüllt bleibt, ist leicht zu verificieren.

Wird der Wert (50) von $c\mathfrak{g}$ in die allgemeine Formel (19) für die Energiedichte eingetragen, so folgt an Stelle von (33)

$$(51)\quad \begin{cases} \psi = \tfrac{1}{2}\mathfrak{E}^2 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{H}^2 \\ \quad + \tfrac{1}{2}\mathfrak{E}'\mathfrak{P} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{H}'\mathfrak{M} + |\mathfrak{q}|^2k^{-2}\{\mathfrak{E}'_y\mathfrak{P}_y + \mathfrak{E}'_z\mathfrak{P}_z + \mathfrak{H}'_y\mathfrak{M}_y + \mathfrak{H}'_z\mathfrak{M}_z\}. \end{cases}$$

Auch erhält man auf Grund von (20) für den Energiestrom die berichtigte Formel

$$(52)\quad \begin{cases} \dfrac{\mathfrak{S}}{c} = [\mathfrak{E}\mathfrak{H}] + [\mathfrak{E}'[\mathfrak{q}\mathfrak{P}]] + [\mathfrak{H}'[\mathfrak{q}\mathfrak{M}]] \\ \quad + \mathfrak{q}|\mathfrak{q}|^2k^{-2}\{\mathfrak{E}'_y\mathfrak{P}_y + \mathfrak{E}'_z\mathfrak{P}_z + \mathfrak{H}'_y\mathfrak{M}_y + \mathfrak{H}'_z\mathfrak{M}_z\}. \end{cases}$$

Aus (50) und (52) ersieht man, dass auch in der LORENTZ'schen Theorie, wenn man sie in der angegebenen Weise modificiert, zwischen Energiestrom und Impulsdichte die Beziehung besteht

$$(53)\quad \frac{\mathfrak{S}}{c} = c\mathfrak{g},$$

die uns bereits in der Theorie von MINKOWSKI begegnet ist.

Dieses Ergebnis war vorauszusehen; nachdem die Gleichungen, welche $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{H}'$ verknüpfen, in Übereinstimmung gebracht sind, besteht zwischen den beiden Theorieen, vom Standpunkte unseres Systemes aus, kein wesentlicher Unter-

schied mehr. Nur die Bedeutung der mit $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ bezeichneten Vektoren ist eine verschiedene. Wie aus (50) und (51) hervorgeht, erlaubt die LORENTZ'sche Definition dieser Vektoren auch jetzt noch, die Beiträge des Aethers und der Materie zu der elektromagnetischen Energie und dem elektromagnetischen Impulse von einander zu sondern; freilich gelten für die Beiträge der Materie jetzt Formeln, die nicht mehr eine einfache Deutung zulassen.

§ 11.

Berücksichtigung der zeitlichen Veränderung von ε und μ.

Wir haben bisher die Dielektrizitätskonstante ε und die magnetische Permeabilität μ als Grössen betrachtet, die für einen gegebenen materiellen Punkt konstante Werte besitzen, oder doch (Vergl. § 10) in vorgegebener Weise mit der Geschwindigkeit variieren. Den Fall, dass diese Grössen von dem Deformationszustande des Körpers, und damit von der Zeit abhängen, haben wir bisher nicht in Erwägung gezogen. Wie sind nun die Betrachtungen zu modificieren, wenn $\dot{\varepsilon}$ und $\dot{\mu}$ nicht gleich null sind?

A) Theorieen von H. Hertz und E. Cohn.

Sei es, dass wir die Formeln (23) der HERTZ'schen oder die Formeln (26) der COHN'schen Theorie zu Grunde legen, so finden wir in dem Falle, dass ε und μ von der Zeit abhängen, dass an Stelle von (18) die folgende Beziehung tritt

$$\frac{1}{2}\{\mathfrak{E}'\dot{\mathfrak{D}} - \mathfrak{D}\dot{\mathfrak{E}}' + \mathfrak{H}'\dot{\mathfrak{B}} - \mathfrak{B}\dot{\mathfrak{H}}'\} = \mathfrak{g}\dot{\mathfrak{w}} + \zeta\dot{\varepsilon} + \eta\dot{\mu}, \tag{54}$$

wo gesetzt ist

$$\zeta = \frac{1}{2}\mathfrak{E}'^2, \qquad \eta = \frac{1}{2}\mathfrak{H}'^2; \tag{54a}$$

dabei ist angenommen, dass für die Impulsdichte die früheren Ausdrücke (24) bezw. (27) giltig bleiben.

B) Theorieen von H. Minkowski und H. A. Lorentz.

Etwas umständlicher wird die Berechnung, wenn man von den Verknüpfungsgleichungen (36) und (37) der MINKOWSKI'schen Theorie ausgeht. Es sind nicht nur in (38) rechts die Terme hinzuzufügen

$$\dot{\varepsilon}\,\mathfrak{E}'^2 + \dot{\mu}\,\mathfrak{H}'^2,$$

sondern auch in (38_c) ist bei der Berechnung der Glieder, die $\dot{\mathfrak{D}}$ und $\dot{\mathfrak{B}}$ enthalten, die Veränderlichkeit von ε und μ zu berücksichtigen. Auch hier ergiebt sich -wofern der Wert von $\mathfrak{g}$ nicht geändert wird- eine Relation von der Form (54); doch haben die

Grössen ζ, η hier eine etwas verschiedene Bedeutung

$$(54_b) \qquad \begin{cases} \zeta = \frac{1}{2}\{\mathfrak{E}_x'^2 + k^{-2}(\mathfrak{E}_y'^2 + \mathfrak{E}_z'^2)\}, \\ \eta = \frac{1}{2}\{\mathfrak{H}_x'^2 + k^{-2}(\mathfrak{H}_y'^2 + \mathfrak{H}_z'^2)\}. \end{cases}$$

Dieses Resultat gilt auch für die LORENTZ'sche Theorie in der Gestalt, die wir ihr im § 10 gegeben haben; denn alle Ausdrücke, die nur die Vektoren $\mathfrak{E}'\mathfrak{H}'\mathfrak{D}\mathfrak{B}$ enthalten, sind in dieser Theorie mit den entsprechenden Ausdrücken der MINKOWSKI'schen Theorie identisch.

Da nun die Gleichung (54) der Relation (18) widerspricht, und da wir eine Änderung in den Werten der Impulsdichte und der Energiedichte nicht zulassen wollen, so sehen wir uns genötigt, den in (V) angegebenen Wert der Grösse P' zu corrigieren und zwar um

$$-\zeta\dot{\varepsilon} - \eta\dot{\mu};$$

dann führen nämlich die Betrachtungen des § 5, statt zur Relation (18), gerade zu der Beziehung (54).

Diese Auffassung findet eine Stütze in der Theorie der Elektrostriktion [13]). In dem einfachsten, bei Flüssigkeiten und Gasen vorliegenden Falle, wo ε und μ nur von der Dichte σ abhängen, hat man

$$-\zeta\dot{\varepsilon} - \eta\dot{\mu} = -\dot{\sigma}\left\{\zeta\frac{d\varepsilon}{d\sigma} + \eta\frac{d\mu}{d\sigma}\right\};$$

dies wird in Folge der Kontinuitätsbedingung der Materie

$$-\zeta\dot{\varepsilon} - \eta\dot{\mu} = \operatorname{div}\mathfrak{w}\left\{\zeta\sigma\frac{d\varepsilon}{d\sigma} + \eta\sigma\frac{d\mu}{d\sigma}\right\}.$$

Bedenkt man die Definition (13) der Grösse P', so sieht man, dass jener Zuwachs einer Vermehrung der relativen Normalspannungen X_x', Y_y', Z_z', um

$$(55) \qquad -p' = \zeta\sigma\frac{d\varepsilon}{d\sigma} + \eta\sigma\frac{d\mu}{d\sigma}$$

entspricht. Falls ε und μ mit wachsender Dichte zunehmen, wird der zusätzliche Druck p' negativ, d. h. die Flüssigkeit strebt im elektrischen und magnetischen Felde sich zu kontrahieren. Im Falle der Ruhe ergiebt (55), im Verein mit (54_a) oder (54_b), den in der Theorie der Elektrostriktion gebräuchlichen Ansatz.

Bei festen Körpern sind allgemeinere Betrachtungen erforderlich, um die Abhängigkeit der elektrischen und magnetischen Konstanten vom Deformationszustande darzustellen. H. HERTZ [14]) hat, vom Standpunkte seiner Theorie aus, die entsprechenden Zusatzspannungen allgemein berechnet; dagegen haben E. COHN sowie H. MINKOWSKI von der Einführung solcher Zusatzspannungen abgesehen. Diese bei der Geringfügigkeit der Zusatzspannungen erlaubte Vereinfachung werden auch wir uns weiterhin gestatten.

---

[13]) F. POCKELS [Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. V, 2, Artikel 16, Nr. 4].

[14]) H. HERTZ, *Über die Grundgleichungen der Elektrodynamik für bewegte Körper* [Gesammelte Werke, Bd. II, pp. 256-285], p. 280.

§ 12.

Die ponderomotorische Kraft.

Da nunmehr für jede der vorliegenden Theorieen die relativen Spannungen, sowie die Impulsdichte, in ihrer Abhängigkeit von den elektromagnetischen Vektoren bestimmt sind, so ergeben sich aus den Gleichungen (8) die Komponenten der ponderomotorischen Kraft. Nach (V_a) ist

$$(56)\quad \begin{cases} X'_x = \frac{1}{2}\{\mathfrak{E}'_x\mathfrak{D}_x - \mathfrak{E}'_y\mathfrak{D}_y - \mathfrak{E}'_z\mathfrak{D}_z\} + \frac{1}{2}\{\mathfrak{H}'_x\mathfrak{B}_x - \mathfrak{H}'_y\mathfrak{B}_y - \mathfrak{H}'_z\mathfrak{B}_z\}, \\ X'_y = \mathfrak{E}'_x\mathfrak{D}_y + \mathfrak{H}'_x\mathfrak{B}_y, \\ X'_z = \mathfrak{E}'_x\mathfrak{D}_z + \mathfrak{H}'_x\mathfrak{B}_z. \end{cases}$$

Hieraus folgt

$$(57)\quad \begin{cases} \frac{\partial X'_x}{\partial x} + \frac{\partial X'_y}{\partial y} + \frac{\partial X'_z}{\partial z} = \mathfrak{E}'_x \operatorname{div}\mathfrak{D} + \mathfrak{H}'_x \operatorname{div}\mathfrak{B} \\ \quad - \mathfrak{D}_y \operatorname{curl}_z \mathfrak{E}' + \mathfrak{D}_z \operatorname{curl}_y \mathfrak{E}' - \mathfrak{B}_y \operatorname{curl}_z \mathfrak{H}' + \mathfrak{B}_z \operatorname{curl}_y \mathfrak{H}' \\ \quad - \frac{1}{2}\left\{\mathfrak{E}'\frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial x} - \mathfrak{D}\frac{\partial\mathfrak{E}'}{\partial x} + \mathfrak{H}'\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial x} - \mathfrak{B}\frac{\partial\mathfrak{H}'}{\partial x}\right\}. \end{cases}$$

Betrachten wir die letzte Zeile, so springt die Analogie zur linken Seite von (54) in die Augen; die Ausdrücke unterscheiden sich nur dadurch, dass dort nach der Zeit, hier nach einer Koordinate differenziiert wird.

Da nun der Gedankengang, der zur Relation (54) geführt hat, von der Bedeutung der unabhängigen Variablen nicht berührt wird, so gilt

$$(57_a)\quad \frac{1}{2}\left\{\mathfrak{E}'\frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial x} - \mathfrak{D}\frac{\partial\mathfrak{E}'}{\partial x} + \mathfrak{H}'\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial x} - \mathfrak{B}\frac{\partial\mathfrak{H}'}{\partial x}\right\} = \mathfrak{g}\frac{\partial\mathfrak{w}}{\partial x} + \zeta\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} + \eta\frac{\partial\mu}{\partial x}.$$

Die vektorielle Verallgemeinerung von (57) ergiebt als den von den relativen Spannungen herrührenden Kraftanteil

$$(58)\quad \begin{cases} \mathfrak{K}_1 = \mathfrak{E}' \operatorname{div}\mathfrak{D} + \mathfrak{H}' \operatorname{div}\mathfrak{B} - [\mathfrak{D} \operatorname{curl}\mathfrak{E}'] - [\mathfrak{B} \operatorname{curl}\mathfrak{H}'] \\ \quad - (\mathfrak{g}\nabla)\mathfrak{w} - [\mathfrak{g} \operatorname{curl}\mathfrak{w}] - \zeta\nabla\varepsilon - \eta\nabla\mu. \end{cases}$$

Hierzu tritt, gemäss (8), der von dem elektromagnetischen Impulse herrührende Anteil

$$(58_a)\quad \mathfrak{K}_2 = -\frac{\delta\mathfrak{g}}{\delta t}.$$

Die in (58) auftretenden Vektorprodukte wollen wir mit Hilfe der beiden ersten Hauptgleichungen des § 4 umformen in

$$-[\mathfrak{D} \operatorname{curl}\mathfrak{E}'] = \frac{1}{c}\left[\mathfrak{D}\frac{\partial'\mathfrak{B}}{\partial t}\right]$$

$$-[\mathfrak{B} \operatorname{curl}\mathfrak{H}'] = \frac{1}{c}[\mathfrak{J}\mathfrak{B}] + \frac{1}{c}\left[\frac{\partial'\mathfrak{D}}{\partial t}\mathfrak{B}\right].$$

Mit Rücksicht auf die Regel (5) des § 1 wird die Summe dieser beiden Terme

$$\frac{1}{c}[\mathfrak{J}\mathfrak{B}] + \frac{1}{c}\left\{\frac{\delta}{\delta t}[\mathfrak{D}\mathfrak{B}] + ([\mathfrak{D}\mathfrak{B}]\nabla)\mathfrak{w} + \left[[\mathfrak{D}\mathfrak{B}]\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{w}\right]\right\}.$$

Die ponderomotorische Kraft ergiebt sich durch Addition der Kräfte $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$; der entstehende Ausdruck vereinfacht sich, wenn man den in (22) definierten Vektor

$$\mathfrak{W} = [\mathfrak{D}\mathfrak{B}] - c\mathfrak{g} \tag{59}$$

einführt, und die Bezeichnungen gebraucht

$$\mathfrak{q} = \frac{\mathfrak{w}}{c}, \qquad l = c\,t. \tag{59$_a$}$$

Es mag ferner für die Dichte der wahren Elektrizität gesetzt werden

$$\mathrm{div}\,\mathfrak{D} = \rho, \tag{59$_b$}$$

und die Dichte des wahren Magnetismus gleich Null angenommen werden

$$\mathrm{div}\,\mathfrak{B} = 0; \tag{59$_c$}$$

auch werde statt des elektrostatischen Maasses der Stromstärke das elektromagnetische eingeführt durch

$$\mathfrak{J} = c\,i. \tag{59$_d$}$$

Dann lautet der Ausdruck für die *ponderomotorische Kraft,* welche auf die Volumeinheit der bewegten Materie wirkt

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{E}'\rho + [i\mathfrak{B}] - \zeta\nabla\varepsilon - \eta\nabla\mu + \frac{\delta\mathfrak{W}}{\delta l} + (\mathfrak{W}\nabla)\mathfrak{q} + [\mathfrak{W}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{q}]. \tag{60}$$

Der erste Term stellt die an der bewegten Elektrizität angreifende Kraft dar, der zweite die am elektrischen Leitungsstrome angreifende; der dritte und vierte Term berücksichtigen den Einfluss der Inhomogenität des Körpers. Während diese vier Terme schon bei statischen oder stationären Feldern in ruhenden Körpern in Betracht kommen, spielen die letzten, den Vektor $\mathfrak{W}$ enthaltenden Terme nur bei nicht stationären Vorgängen, oder in bewegten Körpern eine Rolle.

In dem erhaltenen Ausdrucke der ponderomotorischen Kraft kommen die Unterschiede der einzelnen Theorieen der Elektrodynamik bewegter Körper nur dadurch zur Geltung -wenn man von der äusserst geringfügigen Abweichung in der Bedeutung der Grössen ζ und η (Gl. $54_{a,b}$) absieht-, dass der Vektor $\mathfrak{W}$ verschiedene Werte annimmt.

Ergiebt $\mathfrak{K}$ die von dem elektromagnetischen Felde abgegebene Bewegungsgrösse, so wird die in nicht elektromagnetische Formen umgewandelte Energie durch die Summe von Joule'scher Wärme und Arbeit der ponderomotorischen Kraft gegeben. Für die Joule'sche Wärme gilt, gemäss der Hauptgleichung (III), und (59_d)

$$Q = cq = \mathfrak{J}\mathfrak{E}' = ci\mathfrak{E}',$$

während die Arbeitsleistung der Kraft $\mathfrak{K}$ sich aus (60) ergiebt

$$\mathfrak{q}\mathfrak{K} = \mathfrak{E}'\rho\mathfrak{q} - i[\mathfrak{q}\mathfrak{B}] - \zeta(\mathfrak{q}\nabla)\varepsilon - \eta(\mathfrak{q}\nabla)\mu + \mathfrak{q}\left\{\frac{\delta\mathfrak{W}}{\delta l} + (\mathfrak{W}\nabla)\mathfrak{q} + [\mathfrak{W}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{q}]\right\}.$$

Erwägt man nun, dass der Berechnung der ponderomotorischen Kraft die Voraussetzungen zu Grunde liegen

$$\frac{1}{c}\dot{\varepsilon} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial l} + (\mathfrak{q}\nabla)\varepsilon = 0,$$

$$\frac{1}{c}\dot{\mu} = \frac{\partial \mu}{\partial l} + (\mathfrak{q}\nabla)\mu = 0,$$

und dass, aus (3), und der bekannten Rechnungsregel

$$\nabla(\mathfrak{q}\mathfrak{W}) = (\mathfrak{q}\nabla)\mathfrak{W} + [\mathfrak{q}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{W}] + (\mathfrak{W}\nabla)\mathfrak{q} + [\mathfrak{W}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{q}],$$

sich ergiebt

$$\frac{\delta \mathfrak{W}}{\delta l} + (\mathfrak{W}\nabla)\mathfrak{q} + [\mathfrak{W}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{q}] = \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial l} + \mathfrak{W}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{q} + \nabla(\mathfrak{q}\mathfrak{W}) - [\mathfrak{q}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{W}],$$

und dass weiter, mit Rücksicht auf (3_a), folgt

$$\mathfrak{q}\left\{\frac{\delta \mathfrak{W}}{\delta l} + (\mathfrak{W}\nabla)\mathfrak{q} + [\mathfrak{W}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{q}]\right\}$$

$$= -\mathfrak{W}\frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial l} + \frac{\partial(\mathfrak{q}\mathfrak{W})}{\partial l} + \mathrm{div}\,\mathfrak{q}(\mathfrak{q}\mathfrak{W}) = -\mathfrak{W}\frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial l} + \frac{\delta(\mathfrak{q}\mathfrak{W})}{\delta l},$$

so erhält man schliesslich für die in der Zeiteinheit von der Volumeinheit *abgegebene Energie* die Formel

$$(60_a)\quad q + \mathfrak{q}\mathfrak{K} = \{i + \rho\mathfrak{q}\}\{\mathfrak{E}' - [\mathfrak{q}\mathfrak{B}]\} + \zeta\frac{\partial \varepsilon}{\partial l} + \eta\frac{\partial \mu}{\partial l} - \mathfrak{W}\frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial l} + \frac{\delta(\mathfrak{q}\mathfrak{W})}{\delta l}.$$

Auch hier unterscheiden sich, von der in den Grössen zweiter Ordnung etwas abweichenden Bedeutung von ζ und η abgesehen, die verschiedenen Theorieen lediglich durch den Wert des Vektors $\mathfrak{W}$, wenn man sie vom Standpunkte unseres Systemes aus betrachtet.

Man denke sich nun für $\mathfrak{W}$ jedesmal denjenigen Wert gesetzt, welcher ihm in der betreffenden Theorie zukommt, und vergleiche unseren Ausdruck (60) der ponderomotorischen Kraft mit dem von anderen Autoren erhaltenen.

Der von E. Cohn angegebene Wert der ponderomotorischen Kraft weist eine kleine Abweichung von dem unsrigen auf. Diese rührt zum Teil daher, dass E. Cohn's Ansatz für die relativen Spannungen nicht ganz mit (V_a) identisch ist; er setzt nämlich dort $\varepsilon\mathfrak{E}'$ an Stelle von $\mathfrak{D}$, wohl in der Absicht, das Drehmoment $\mathfrak{N}'$ der relativen Spannungen zum Verschwinden zu bringen. Der hierdurch bedingte Unterschied im Werte des von den relativen Spannungen herrührenden Kraftanteiles findet sich gleich

$$(\mathfrak{g}\nabla)\mathfrak{w} + \mathfrak{w}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{g}.$$

Wir haben es nur dann als notwendig angesehen, dass $\mathfrak{N}'$ verschwindet, wenn -wie in der Theorie von Hertz- kein elektromagnetischer Impuls in Frage kommt. E. Cohn stellt indessen ebenfalls einen zweiten Teil der Kraft in Rechnung, der mit dem Vektor $\mathfrak{g}$ verknüpft ist, nämlich

$$\mathfrak{K}_2 = -\frac{\partial' \mathfrak{g}}{\partial t};$$

dieser Ausdruck der elektromagnetischen Trägheitskraft weicht von dem unsrigen (58_a), gemäss (4), ab um

$$(\mathfrak{g}\nabla)\mathfrak{w}.$$

Es beträgt also der Unterschied zwischen dem Kraftausdrucke E. COHN's und dem hier erhaltenen im Ganzen

$$2(\mathfrak{g}\nabla)\mathfrak{w} + \mathfrak{w}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{g},$$

wobei $\mathfrak{g}$ durch (27) bestimmt ist. Er ist wohl zu gering, um der experimentellen Prüfung zugänglich zu sein.

Wir gehen zur Theorie von MINKOWSKI über. Bereits im § 9 wurde erwähnt, dass die enge Beziehung zwischen Impulsdichte und Energiestrom, die nach den Ergebnissen der vorliegenden Untersuchung in dieser Theorie stattfindet, bei MINKOWSKI nicht angenommen wird. Dementsprechend weicht auch der Wert (60) der ponderomotorischen Kraft von MINKOWSKI's Ansatz ab; es fehlt dort insbesondere das Glied $\frac{\delta \mathfrak{W}}{\delta l}$, das bereits im Falle der Ruhe in Frage kommt. Von A. EINSTEIN und I. LAUB [15]) ist bereits darauf hingewiesen worden, dass die Kraft, die nach LORENTZ im magnetischen Felde auf den Polarisationsstrom wirken soll, in MINKOWSKI's Ansatz fehlt. Nun ist zwar ein experimenteller Nachweis für die Existenz dieser Kraft nicht erbracht worden, doch gründet sich die Überzeugung von ihrem Vorhandensein auf die Analogie, welche nach den Vorstellungen der Elektronentheorie zwischen Leitungsstrom und Polarisationsstrom besteht; diese Analogie bewährt sich so, dass man jene Kraft nicht ohne gewichtige Gründe wird leugnen wollen. Unser Kraftausdruck enthält, wie aus Gl. 63 hervorgeht, jene Kraft; dass er dem Princip der Relativität nicht widerspricht, bemerkten wir bereits am Schlusse des § 9.

Im Falle der Ruhe, wo, statt $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{H}'$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ zu schreiben ist, wird die *ponderomotorische Kraft*

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{E}\rho + [i\mathfrak{B}] - \frac{1}{2}\mathfrak{E}^2\nabla\varepsilon - \frac{1}{2}\mathfrak{H}^2\nabla\mu + \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial l}. \tag{61}$$

In den verschiedenen Theorieen besitzt der Vektor $\mathfrak{W}$ folgende Werte:

A) Theorie von H. Hertz.

Hier folgt aus (22) und (24)

$$\mathfrak{W} = [\mathfrak{D}\mathfrak{B}] = \varepsilon\mu[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]. \tag{61_a}$$

B) Theorieen von E. Cohn, H. A. Lorentz und H. Minkowski.

In allen drei Theorieen wird im Falle der Ruhe, wie aus (27), (32), (40_a) hervorgeht

$$c\mathfrak{g} = [\mathfrak{E}\mathfrak{H}],$$

$$\mathfrak{W} = [\mathfrak{D}\mathfrak{B}] - [\mathfrak{E}\mathfrak{H}] = (\varepsilon\mu - 1)[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]. \tag{61_b}$$

---

[15]) A. EINSTEIN und I. LAUB, *Über die im elektromagnetischen Felde auf ruhende Körper ausgeübten ponderomotorischen Kräfte* [Annalen der Physik, Bd. XXVI (1908), pp. 541-550].

Dass für die ponderomotorische Kraft in ruhenden Körpern alle drei Theorieen denselben Wert ergeben, ist im Sinne unseres Systemes darin begründet, dass die Gleichungen, die $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{H}'$ verknüpfen, mit Einschluss der in $\mathfrak{q}$ linearen Glieder übereinstimmen. Es mag bei der Diskussion der Kraft in ruhenden Körpern die Bezeichnungsweise der LORENTZ'schen Theorie gebraucht werden.

Setzt man für $\mathfrak{W}$ den Wert (61_b), so lässt sich die ponderomotorische Kraft (61) in zwei Teile zerlegen

$$(62)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{K}_e &= \mathfrak{E}\rho - \frac{1}{2}\mathfrak{E}^2\nabla\varepsilon + (\varepsilon\mu - 1)\left[\mathfrak{E}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial l}\right], \\ \mathfrak{K}_m &= [i\mathfrak{B}] - \frac{1}{2}\mathfrak{H}^2\nabla\mu + (\varepsilon\mu - 1)\left[\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial l}\mathfrak{H}\right], \end{aligned}\right.$$

welche als Anteil des elektrischen und des magnetischen Feldes zu deuten sind.

Aus den Hauptgleichungen für ruhende Körper

$$\operatorname{curl}\mathfrak{H} = \frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial l} + i,$$

$$\operatorname{curl}\mathfrak{E} = -\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial l},$$

leitet man durch Einführung der elektrischen und magnetischen Polarisation

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{D} - \mathfrak{E} = (\varepsilon - 1)\mathfrak{E},$$

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{B} - \mathfrak{H} = (\mu - 1)\mathfrak{H}$$

die beiden folgenden Beziehungen ab

$$0 = -[\mathfrak{P}\operatorname{curl}\mathfrak{E}] - \mu(\varepsilon - 1)\left[\mathfrak{E}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial l}\right],$$

$$[i\mathfrak{B}] = [i\mathfrak{H}] - [\mathfrak{M}\operatorname{curl}\mathfrak{H}] - \varepsilon(\mu - 1)\left[\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial l}\mathfrak{H}\right].$$

Mit Rücksicht auf sie gehen die Ausdrücke (62) über in

$$(62_a)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{K}_e &= \mathfrak{E}\rho - [\mathfrak{P}\operatorname{curl}\mathfrak{E}] - \frac{1}{2}\mathfrak{E}^2\nabla(\varepsilon - 1) + \left[\mathfrak{E}\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial l}\right], \\ \mathfrak{K}_m &= [i\mathfrak{H}] - [\mathfrak{M}\operatorname{curl}\mathfrak{H}] - \frac{1}{2}\mathfrak{H}^2\nabla(\mu - 1) + \left[\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial l}\mathfrak{H}\right]. \end{aligned}\right.$$

Da ferner gilt

$$\tfrac{1}{2}(\varepsilon - 1)\nabla\mathfrak{E}^2 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{E}^2\nabla(\varepsilon - 1) = \tfrac{1}{2}\nabla(\varepsilon - 1)\mathfrak{E}^2 = \tfrac{1}{2}\nabla(\mathfrak{P}\mathfrak{E}),$$

$$\tfrac{1}{2}(\varepsilon - 1)\nabla\mathfrak{E}^2 = (\mathfrak{P}\nabla)\mathfrak{E} + [\mathfrak{P}\operatorname{curl}\mathfrak{E}];$$

$$\tfrac{1}{2}(\mu - 1)\nabla\mathfrak{H}^2 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{H}^2\nabla(\mu - 1) = \tfrac{1}{2}\nabla(\mu - 1)\mathfrak{H}^2 = \tfrac{1}{2}\nabla(\mathfrak{M}\mathfrak{H}),$$

$$\tfrac{1}{2}(\mu - 1)\nabla\mathfrak{H}^2 = (\mathfrak{M}\nabla)\mathfrak{H} + [\mathfrak{M}\operatorname{curl}\mathfrak{H}],$$

so wird schliesslich

$$(63)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{K}_e &= (\mathfrak{P}\nabla)\mathfrak{E} + \mathfrak{E}\rho + \left[\mathfrak{E}\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial l}\right] - \frac{1}{2}\nabla(\mathfrak{P}\mathfrak{E}), \\ \mathfrak{K}_m &= (\mathfrak{M}\nabla)\mathfrak{H} + [i\mathfrak{H}] + \left[\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial l}\mathfrak{H}\right] - \frac{1}{2}\nabla(\mathfrak{M}\mathfrak{H}). \end{aligned}\right.$$

Es mögen diese Formeln für den elektrischen und magnetischen Kraftanteil, die sich hier aus (61) und (61_b) ergeben haben, mit den Ansätzen verglichen werden, welche A. Einstein und I. Laub [16]) für die ponderomotorische Kraft in ruhenden Körpern machen. Die ersten drei Terme in $\mathfrak{K}_e$ und $\mathfrak{K}_m$ finden sich auch dort; die ersten Terme werden als die Kräfte des Feldes auf elektrisch und magnetisch polarisierte Volumelemente gedeutet, das Vektorprodukt von i und $\mathfrak{H}$ als Kraft des magnetischen Feldes auf elektrische Leitungsströme; hierzu kommt die oben erwähnte Kraft des magnetischen Feldes auf den elektrischen Polarisationsstrom, und die ihr entsprechende Kraft, welche auf den magnetischen Polarisationsstrom im elektrischen Felde wirkt. Doch fehlen in dem Ansatze der genannten Autoren die beiden letzten Terme der Ausdrücke (63), was damit zusammenhängt, dass ihre Werte der fiktiven Normalspannungen von den sonst angenommenen etwas abweichen. Handelt es sich um die Kraft auf einen Bereich, an dessen Begrenzung $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{M}$ gleich null sind, so fallen jene beiden Terme fort; denn die Flächenintegrale, welche sie liefern, verschwinden dann.

In diesem nicht selten vorliegenden Falle mag man sich also des Ansatzes von Einstein und Laub bedienen. Doch scheint mir die Folgerung, die jene Autoren ziehen, dass nämlich nicht der Vektor $\mathfrak{B}$ für die Kraft auf Leitungsströme massgebend sei, nicht zuzutreffen. Haben wir doch gesehen, dass in (61) gerade der Vektor $\mathfrak{B}$ es ist, der die Kraft auf den Stromleiter bestimmt. Es ist indessen die Kraft, die in magnetischen Felde auf einen stromdurchflossenen und gleichzeitig magnetisierten Draht wirkt, weder schlechtweg aus dem Vektorprodukte von i und $\mathfrak{B}$, noch aus demjenigen von i und $\mathfrak{H}$, zu berechnen; jenem Vektorprodukte ist vielmehr die Kraft $-\frac{1}{2}\mathfrak{H}^2\nabla\mu$ hinzuzufügen, die an der Übergangsschicht zwischen Draht und Luft ihren Sitz hat, während zu diesem die Kraft $(\mathfrak{M}\nabla)\mathfrak{H}$ tritt, die in dem magnetisierten Drahte wirkt, falls das Feld daselbst nicht zufällig homogen ist. Von diesem ganz speziellen Falle abgesehen, ist demnach die Kraft, die an magnetisierten Volumelementen eines homogenen stromdurchflossenen Drahtes angreift, dem Vektorprodukte von i und $\mathfrak{B}$, aber nicht demjenigen von i und $\mathfrak{H}$ gleich zu setzen.

Es kommt übrigens den Formeln (63) keineswegs eine so principielle Bedeutung zu, wie dem ursprünglichen Ausdrücke (61) für die ponderomotorische Kraft. Während jener sich aus einem Systeme der Elektrodynamik ergab, welches auch die bewegten Körper umfasst, dürften diese sich kaum so verallgemeinern lassen, dass sie auch in bewegten Körpern die ponderomotorische Kraft bestimmen.

Ospedaletti Ligure, Dezember 1908.

Max Abraham.

[16]) A. Einstein und I. Laub, l. c. [15]), p. 549.

SULLA CARATTERISTICA DELLE MATRICI DI SYLVESTER E DI BEZOUT.

Nota di **Onorato Nicoletti** (Pisa).

(Da una lettera al Prof. ALFREDO CAPELLI).

Adunanza del 27 dicembre 1908.

La lettura delle due Note, sua [1]) e del sig. PICK [2]), sulla caratteristica della matrice di SYLVESTER e di BEZOUT di due forme binarie mi ha fatto rammentare di alcune mie antiche ricerche (non pubblicate) intorno al massimo comun divisore di due polinomî, nelle quali davo un'altra dimostrazione del suo teorema. Siccome mi sembra che la mia dimostrazione sia altrettanto semplice delle due ricordate ed abbia anche essa tutta la possibile generalità, mi permetto di comunicargliela.

1. Conservando le notazioni della sua Nota, siano

$$(1)\quad \begin{cases} f(x) = f(x_1, x_2) = a_0 x_1^m + a_1 x_1^{m-1} x_2 + \cdots + a_{m-1} x_1 x_2^{m-1} + a_m x_2^m, \\ \varphi(x) = \varphi(x_1, x_2) = b_0 x_1^n + b_1 x_1^{n-1} x_2 + \cdots + b_{n-1} x_1 x_2^{n-1} + b_n x_2^n, \end{cases}$$

due forme binarie dei gradi m ed n, una almeno delle quali, ad es. la $f(x)$, non sia identicamente nulla; e sia, per fissare le idee, $m \geqq n$. Si ha per esse il teorema [3]):

Affinchè le due forme algebriche (1) *abbiano un divisore di grado non minore di* σ, *è necessario e sufficiente che esistano due forme* $P_{n-\sigma}$, $Q_{m-\sigma}$, *rispettivamente di grado non maggiore di* $n - \sigma$, $m - \sigma$, *non entrambe identicamente nulle, per le quali sia soddisfatta l'identità*

$$(2)\qquad P_{n-\sigma} f(x) + Q_{m-\sigma} \varphi(x) = 0.$$

Facciamo ancora l'osservazione evidente che, ammessa la (2), basta sapere che la $P_{n-\sigma}$ non è identicamente nulla ed ha un grado non maggiore di $n - \sigma$, per concludere che la $Q_{m-\sigma}$ è anche essa diversa da zero ed ha un grado non maggiore di $m - \sigma$.

2. Ricordiamo anche che date p forme binarie del grado l in x_1, x_2

$$A_i(x) = \sum_0^l {}_k\, \alpha_{ik} x_1^{l-k} x_2^k \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

---

[1]) A. CAPELLI, *Sulla matrice di* SYLVESTER *per la risultante di due funzioni intere* [questi Rendiconti, t. XXIII (1° semestre 1907), pp. 130-136].

[2]) G. PICK, *Über den Rang der* SYLVESTER'*schen und der* BEZOUT'*schen Determinante* [questi Rendiconti, t. XXVI (2° semestre 1908), pp. 360-362].

[3]) Loco citato [1]), pag. 131.

la cui matrice

$$|\alpha_{ik}| \qquad (i = 1, 2, \ldots, p;\ k = 0, 1, \ldots, l),$$

abbia la caratteristica ρ, le forme stesse sono linearmente indipendenti per $\rho = p$; per $\rho < p$ sono invece legate da $p - \rho$ (e non più) relazioni lineari omogenee distinte, a coefficienti costanti, non tutti nulli. E inversamente.

3. Ciò posto, le due forme (1) abbiano un massimo comun divisore $D(x)$ del grado σ ($0 \leqq \sigma \leqq m$), e si considerino le $m + n$ forme binarie in x_1, x_2 del grado $m + n - 1$

$$F_p = x_1^p x_2^{n-p-1} f(x), \quad \Phi_q = x_1^q x_2^{m-q-1} \varphi(x) \qquad (p = 0, 1, \ldots, n-1;\ q = 0, 1, \ldots, m-1),$$

la cui matrice coincide colla matrice $S(f, \varphi)$ di SYLVESTER delle due forme f e φ. Il divisore $D(x)$ apparterrà anche alle forme F_p, Φ_q; quindi sarà

$$F_p = D(x) . F_p^{(1)}, \quad \Phi_q = D(x) . \Phi_q^{(1)} \quad (p = 0, 1, \ldots, n-1;\ q = 0, 1, \ldots, m-1),$$

essendo le $F_p^{(1)}$, $\Phi_q^{(1)}$ $m + n$ forme in x_1, x_2 del grado $m + n - \sigma - 1$.

Ne segue, per $\sigma > 0$, che $m + n - \sigma + 1$ qualunque tra esse sono legate da una relazione lineare omogenea, a coefficienti costanti, non tutti nulli, la quale legherà anche le forme F_p, Φ_q corrispondenti. La matrice $S(f, \varphi)$ di queste forme ha quindi una caratteristica non maggiore di $m + n - \sigma$. Il risultato vale evidentemente anche per $\sigma = 0$.

4. Nella stessa ipotesi, quando è $\sigma = m$, le n forme $F_p (p = 0, 1, \ldots, n - 1)$ sono indipendenti, in quanto $f(x)$ è diversa da zero; se $\sigma < m$ [il che porta anche $\varphi(x) \neq 0$] le $m+n-\sigma$ forme F_p, Φ_q (con $p=0, 1, \ldots, n-1$; $q=0, 1, \ldots, m-\sigma-1$) [e se $\sigma < n$, anche le altre F_p, Φ_q (con $p=0, 1, \ldots, n-\sigma-1$; $q=0, 1, \ldots, m-1$)] sono ancora indipendenti.

Si abbia infatti, se è possibile, una relazione lineare omogenea, a coefficienti costanti, non tutti nulli, tra le forme stesse; essa si scriverà

$$(3') \qquad P' f(x) + x_2^\sigma Q'_{m-\sigma-1} \varphi(x) = 0$$

$$(3'') \qquad [\text{o} \quad x_2^\sigma P''_{n-\sigma-1} f(x) + Q'' \varphi(x) = 0\ ]$$

e la $Q'_{m-\sigma-1}$ ($P''_{n-\sigma-1}$) sarà diversa da zero [altrimenti sarebbe nulla anche la P' (Q'') contro l'ipotesi] ed avrà un grado non maggiore di $m - \sigma - 1$ ($n - \sigma - 1$).

Si ponga ora

$$D(x) = x_2^\tau . D_1(x), \qquad f(x) = x_2^\tau . f_1(x), \qquad \varphi(x) = x_2^\tau . \varphi_1(x) \qquad (0 \leqq \tau \leqq \sigma),$$

essendo $D_1(x)$ primo con x_2; una almeno delle due forme f_1, φ_1 (e quando $\sigma = m$, certamente la f_1) sarà prima con x_2; e le (3'), (3'') si scriveranno

$$x_2^\tau P' f_1(x) + x_2^{\sigma+\tau} Q'_{m-\sigma-1} \varphi_1(x) = 0,$$

$$x_2^{\sigma+\tau} P''_{n-\sigma-1} f(x) + x_2^\tau Q'' \varphi_1(x) = 0.$$

Ne segue che la P', se f_1 è primo con x_2, la Q'' se lo è φ_1, è divisibile per x_2^τ; e posto, nei due casi,

$$P' = x_2^\sigma . \bar{P}', \qquad Q'' = x_2^\sigma . \bar{Q}'',$$

le (3'), (3'') diventano

$$\bar{P}' f(x) + Q'_{m-\sigma-1}\varphi(x) = 0, \qquad P''_{n-\sigma-1} f(x) + \bar{Q}''\varphi(x) = 0,$$

e quindi le due forme f e φ avrebbero (n° 1) un divisore comune di grado maggiore di σ, contro l'ipotesi.

Le forme stesse sono dunque indipendenti; la loro matrice, che, quando il determinante $S(f, \varphi)$ sia scritto come a pag. 131 della sua Nota, si ottiene da esso sopprimendone le ultime (o le prime) σ righe, ha quindi la caratteristica $m + n - \sigma$; questa è dunque anche la caratteristica di $S(f, \varphi)$. Adunque:

Condizione necessaria e sufficiente perchè le due forme (1), *non tutte due identicamente nulle, abbiano un massimo comun divisore del grado* σ, *è che la matrice di* SYLVESTER *delle due forme abbia la caratteristica* $m + n - \sigma$.

5. Un procedimento analogo dà la caratteristica della matrice di BEZOUT, $B(f, \varphi)$, delle due forme.

Supponiamo perciò $m = n$ e sia dapprima uno almeno dei due coefficienti a_0, b_0 diverso da zero. Posto

$$f_g = a_0 x_1^{g-1} + a_1 x_1^{g-1} x_2 + \cdots + a_{g-1} x_2^{g-1}, \quad \varphi_g = b_0 x_1^{g-1} + b_1 x_1^{g-2} x_2 + \cdots + b_{g-1} x_2^{g-1}$$
$$(g = 1, 2, \ldots, n),$$

introduciamo le n forme di BEZOUT [4])

$$A_g = \frac{1}{x_2^g}[f\varphi_g - \varphi f_g] = c_{g1} x_1^{n-1} + c_{g2} x_1^{n-2} x_2 + \cdots + c_{gn} x_2^{n-1} \qquad (g = 1, 2, \ldots, n),$$

la cui matrice

$$|c_{gh}| \qquad (g, h = 1, 2, \ldots, n)$$

è quella $B(f, \varphi)$ di BEZOUT delle due forme f e φ. Queste abbiano ora un massimo comun divisore $D(x)$ del grado σ; esso, poichè le a_0 e b_0 non sono tutte due nulle, sarà primo con x_2 e quindi dividerà tutte le forme A_g. Queste sono dunque identicamente nulle, se $\sigma = n$; se poi $\sigma < n$, si potrà scrivere

$$A_g = D(x) . B_g \qquad (g = 1, 2, \ldots, n),$$

essendo le B_g n forme del grado $n - \sigma - 1$; quindi, per $\sigma > 0$, $n - \sigma + 1$ qualunque tra esse sono legate da una relazione lineare omogenea, non identicamente nulla. La stessa relazione legherà le A_g corrispondenti; la matrice $B(f, \varphi)$ di queste forme ha dunque una caratteristica non maggiore di $n - \sigma$. Il risultato vale evidentemente anche per $\sigma = 0$.

Consideriamo ora le prime $n - \sigma$ forme A_g $(g = 1, 2, \ldots, n - \sigma)$. Esse sono indipendenti (ed ognuna di esse è diversa da zero), in quanto una relazione lineare omogenea $\sum_1^{n-\sigma}{}_g k_g A_g = 0$ (colle k_g non tutte nulle) si può scrivere anche

$$x_2^{n-\sigma}\sum_1^{n-\sigma}{}_g k_g A_g = f\left(\sum_1^{n-\sigma}{}_g k_g x_2^{n-\sigma-g}\varphi_g\right) - \varphi\left(\sum_1^{n-\sigma}{}_g k_g x_2^{n-\sigma-g} f_g\right) = f . \varphi^{(n-\sigma-1)} - \varphi . f^{(n-\sigma-1)} = 0,$$

---

[4]) A. CAPELLI, *Istituzioni di Analisi algebrica*, 3ª edizione (Napoli, Pellerano, 1902), pag. 568.

nella quale le $f^{(n-\sigma-1)}$, $\varphi^{(n-\sigma-1)}$ sono due forme, non tutte due identicamente nulle, di grado non maggiore di $n - \sigma - 1$, e quindi le due forme f e φ avrebbero (n° 1) un divisore comune di grado maggiore di σ, contro l'ipotesi. La matrice $B(f, \varphi)$ ha dunque la caratteristica $n - \sigma$.

6. Sia ora $a_0 = a_1 = \cdots = a_{i-1} = b_0 = b_1 = \cdots = b_{i-1} = 0$, mentre una almeno delle due a_i, b_i è diversa da zero (con $i \leqq n$). In questo caso le due forme f e φ hanno comune il fattore x_2^i e, posto

$$f = x_2^i f^{(1)}, \qquad \varphi = x_2^i \varphi^{(1)},$$

$f^{(1)}$ e $\varphi^{(1)}$ sono due forme del grado $n - i$, che non hanno più il fattore comune x_2 (ed una almeno delle quali non è identicamente nulla). D'altra parte, nella matrice $B(f, \varphi)$ sono nulle le prime i righe e colonne (tutti gli elementi per $i = n$) [5]) ed insieme (se $i < n$) il minore delle ultime $n - i$ righe e colonne coincide col determinante di BEZOUT $B(f^{(1)}, \varphi^{(1)})$ delle due forme $f^{(1)}$ e $\varphi^{(1)}$. Vale dunque ancora il risultato precedente.

Quando ambedue le forme f e φ sono identicamente nulle, le c_{gh} $(g, h = 1, 2, \ldots, n)$ sono tutte nulle. Abbiamo dunque in ogni caso che:

Condizione necessaria e sufficiente perchè le due forme algebriche (1) (*con* $m = n$) *abbiano un massimo comun divisore del grado* σ, *è che la matrice di* BEZOUT *di esse forme abbia la caratteristica* $n - \sigma$.

Pisa, dicembre 1908.

ONORATO NICOLETTI.

---

[5]) Loc. cit. [4]), pag. 568.

FONDAMENTI PER LA GEOMETRIA SULLE VARIETÀ ALGEBRICHE [1].

Memoria di **Francesco Severi** (Padova).

Adunanza del 14 febbrajo 1909.

Tra le proprietà delle funzioni algebriche di 2 variabili, quelle che s'ottengono per immediata estensione da analoghe proprietà delle funzioni d'una variabile, dànno in complesso una conoscenza assai scarsa della geometria sopra una superficie.

E invero, le proposizioni essenziali di questa teoria sono state ottenute soltanto attraverso difficoltà non lievi, coll'aiuto di concetti o di procedimenti nuovi.

Lo stesso fatto sembra debba verificarsi nel trapasso dalle superficie alle varietà a tre e a più dimensioni. Non parrà pertanto fuor di luogo lo studio da me intrapreso, anche se, lumeggiando soltanto alcune tra le proprietà generali, esso ne lasci in ombra moltissime altre e di capitale importanza.

Dopo i lavori classici in cui il NOETHER stabilì i primi concetti della teoria, pochissimi sono stati i contributi portati in questo ordine di studî, e, se non erro, essi toccarono sempre classi particolari di varietà. Gli è che, pur limitando il campo delle indagini, si presentano in questo indirizzo questioni importanti e difficili. Basti a tal proposito citare il problema che concerne la razionalità o meno della varietà cubica generale dello spazio S_4, attorno al quale i geometri si affaticano indarno da tempo [2].

Darò qui un cenno dei risultati che mi sembrano di maggior rilievo nel presente lavoro.

Cito anzitutto la relazione fondamentale

$$2P_a = \Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2 + 4,$$

che passa tra il genere aritmetico P_a di una varietà V a tre dimensioni e i caratteri virtuali Ω_0, Ω_1, Ω_2 — grado, genere curvilineo, genere aritmetico — del relativo sistema canonico (eventualmente virtuale). La dimostrazione è assai laboriosa e non mi nascondo

[1]) Un riassunto di alcune parti della presente Memoria trovasi nella mia Nota: *Alcune proposizioni fondamentali per la geometria sulle varietà algebriche* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XVI, 2° semestre 1907, pp. 337-344].

[2]) Il fatto che questi sforzi non sieno stati ancora coronati da successo, fa dubitare che si tratti di una varietà irrazionale; tanto più che or ora il FANO è riuscito a dare esempi di varietà irrazionali con tutti i generi nulli! Cfr. FANO, *Sopra alcune varietà algebriche a tre dimensioni aventi tutti i generi nulli* [Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, t. XLIII (1907-1908), pp. 973-984].

che si potrà forse semplificarla, eliminandone alcuni elementi che a priori non sembrano strettamente essenziali, per la natura del risultato cui si vuol giungere.

Senza dubbio il procedimento numerativo apparirebbe come la via maestra e più elementare, trattandosi di stabilire una relazione che in fondo è numerativa; ma non sembra d'altronde ch'esso conduca al risultato per la via preferibile, data la lunghezza e la minuzia dei calcoli necessarî.

La relazione fondamentale non ha la sua analoga sulle superficie, giacchè su queste il genere aritmetico è indipendente dal grado e dal genere del sistema canonico.

Per le varietà a tre dimensioni si presentano due irregolarità: l'*irregolarità superficiale*, cioè l'irregolarità, costante sotto certe ipotesi (Castelnuovo-Enriques), di una superficie appartenente a V, e l'*irregolarità tridimensionale*, che è la differenza tra il genere geometrico P_g ed il genere aritmetico P_a della varietà. Quest'ultima irregolarità può anch'essere negativa!

La somma delle due irregolarità viene ad esser legata, sia alla deficienza del sistema staccato sopra una superficie F dal proprio sistema aggiunto $|F'|$ (Teorema X), sia alle deficienze della serie lineare segata sopra una curva caratteristica C di F, dal sistema $|2\,C|$, e del sistema lineare staccato su F dalle superficie canoniche di V (Teorema XV).

Il primo legame dà anzi modo di stabilire così l'invarianza assoluta del genere aritmetico P_a come il teorema di Riemann-Roch pei sistemi lineari di superficie che si posson considerare come aggiunti di altri (Teoremi XI, XII). Quanto al secondo legame — la cui dimostrazione è alquanto laboriosa — converrà forse cercare di sfruttarlo per studiare più intimamente l'irregolarità tridimensionale.

Da che le condizioni d'esistenza su V d'integrali semplici e tripli di 1ª specie, son completamente note, io mi son proposto di studiare, almeno dal lato qualitativo, le condizioni d'esistenza di integrali doppî di 1ª specie [3]). E son riuscito a dimostrare, con un ragionamento abbastanza semplice (che è applicabile anche per la ricerca analoga degl'integrali picardiani d'una superficie), che *il numero degl'integrali doppî di 1ª specie appartenenti a V, non supera la somma delle due irregolarità*. Quello che ne segue di impreveduto, è che la varietà possa avere le due irregolarità non nulle (uguali in valore, ma opposte di segno), senza che tuttavia essa possegga integrali doppî di 1ª specie.

Termino il lavoro con pochi cenni d'estensioni alle varietà superiori, per le quali scrivo la relazione fondamentale. Questa relazione lega il genere aritmetico ai caratteri del sistema canonico, soltanto nel caso di varietà di dimensione dispari.

Considerazioni generali sulle varietà algebriche.

1. ***Generalità. Sistemi lineari sopra una varietà algebrica V_d.*** — I primi concetti sui sistemi lineari di varietà a $d-1$ dimensioni appartenenti ad una V_d (irriducibile),

---

[3]) Ho comunicato il risultato alla sezione matematica del Congresso tenutosi a Firenze, nell'ottobre 1908, dalla Società Italiana pel Progresso delle Scienze.

sono da riguardarsi come noti, perchè possono stabilirsi come estensioni immediate delle analoghe nozioni relative a curve e superficie.

I concetti ai quali alludiamo si riferiscono segnatamente all'unicità del sistema lineare completo cui appartiene una data varietà a $d - 1$ dimensioni (con un assegnato gruppo base), alle operazioni di somma e sottrazione tra i sistemi lineari appartenenti a V_d, alla definizione e alle proprietà del sistema aggiunto di un dato; ecc.

Si può anche dimostrare, coll'aiuto di un'estensione ormai nota del teorema di NOETHER $Af + B\varphi$, che *sopra una forma (ipersuperficie) V dello spazio S_{d+1}, dotata di una varietà doppia ordinaria M, a $d - 1$ dimensioni, le forme aggiunte, cioè quelle che passano per M, segnano ulteriormente un sistema lineare completo* [4]).

Non tralascierò di esporre una semplice dimostrazione di questo teorema, la quale può fondarsi sopra una proposizione stabilita dal prof. BERTINI in una lettera a me diretta [5]).

Si vuol provare che le aggiunte d'un ordine assegnato l, segnano su V, fuori di M, un sistema completo. A tal uopo consideriamo $d - 1$ forme generiche $F_1, \ldots, F_{d-1}$, di ordini abbastanza alti — nel senso che verrà tosto precisato — e indichiamo con C la curva comune a V e alle F, la quale avrà altrettanti nodi nel gruppo G dei punti in cui essa appoggiasi ad M. Si denoti inoltre con $|H|$ il sistema completo che contiene (o coincide con) quello staccato su V dalle aggiunte d'ordine l.

Gli ordini delle F possono supporsi così elevati che:

1) Ogni forma d'ordine l passante pel gruppo G contenga di conseguenza la M. Si cominci infatti a scegliere una F_1 d'ordine maggiore di l, non contenente alcuna parte di M: allora ogni forma d'ordine l contenente la intersezione $M^{(1)}$ di F_1 e di M, contiene di conseguenza M.

Si scelga poi una F_2 d'ordine maggiore di l, che non contenga alcuna parte di $M^{(1)}$: allora ogni forma d'ordine l contenente la intersezione $M^{(2)}$ di F_2 e di $M^{(1)}$, contiene $M^{(1)}$ e quindi M. Così continuando si perviene ad un gruppo di punti $G \equiv M^{(d-1)}$ tale che ogni forma d'ordine l contenente $M^{(d-1)}$, conterrà $M^{(d-2)}$ e quindi $M^{(d-3)}, \ldots$, e infine M.

2) Non esistano varietà H passanti per C. Si scelga infatti la F_1 d'ordine sì alto, che essa stacchi su V una varietà $V^{(1)}$ irriducibile, d'ordine maggiore di quello di H: non vi saranno allora varietà H per $V^{(1)}$. Dicasi $H^{(1)}$ la intersezione di H e di $V^{(1)}$, e si scelga la F_2 in guisa ch'essa stacchi su $V^{(1)}$ una varietà $V^{(2)}$ irriducibile, d'ordine

[4]) L'estensione cui si allude è contenuta in una mia Nota {*Rappresentazione di una forma qualunque per combinazione lineare di più altre* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XI, 1° semestre 1902, pp. 105-113]}. Per altre estensioni, cui convien ricorrere quando la forma data nello S_{d+1} possegga varietà più che doppie, veggasi SEVERI, *Su alcune proprietà dei moduli di forme algebriche* [Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, t. XLI (1905-1906), pp. 205-223] e R. TORELLI, *Sopra certe estensioni del teorema di* NOETHER $Af + B\varphi$ [Ibidem. id., pp. 224-234].

[5]) BERTINI, *Osservazioni sul Restsatz per una curva iperspaziale* (Lettera al Prof. F. SEVERI) [Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, t. XLIII (1907-1908), pp. 847-852].

maggiore di quello di $H^{(1)}$: non vi saranno allora varietà $H^{(1)}$ per $V^{(2)}$, nè, quindi, varietà H per $V^{(2)}$.

Così proseguendo si giunge alla curva $C \equiv V^{(d-1)}$ tale che non esistono varietà H passanti per essa.

È chiaro che le due condizioni 1) e 2) posson esser soddisfatte simultaneamente.

Ciò posto, si applichi la proposizione del BERTINI, che cioè le forme d'ordine arbitrario, e in particolare quella d'ordine l, uscenti da G, segnano su C, fuori di G, una serie completa. Se ne trarrà, in virtù della proprietà 1), che il sistema segnato su V, fuori di M, dalle forme aggiunte d'ordine l, stacca su C una serie completa: la medesima serie sarà pertanto staccata su C dal sistema completo $|H|$.

D'altronde, in virtù della proprietà 2), la dimensione di $|H|$ e così pure la dimensione del sistema segnato su V dalle aggiunte, uguagliano la dimensione della serie staccata su C: dunque i due sistemi coincidono, cioè il sistema segnato dalle aggiunte è completo. C. D. D.

Quando V_d appartiene allo S_r ed è priva di singolarità, come forme aggiunte a V, con cui segare i sistemi lineari completi esistenti sulla data varietà, si possono assumere le forme passanti per la varietà V'_d ulteriormente comune ad $r-d$ forme condotte in modo generico per V. La dimostrazione che ho esposto altrove [6]) pel caso delle curve e delle superficie, vale con opportuni cambiamenti di linguaggio, anche per varietà qualunque [7]).

2. Una prima conseguenza di quest'ultimo teorema è che:

Sopra una varietà V_d, priva di punti multipli, le forme d'un ordine abbastanza alto segnano un sistema lineare completo.

Ammesso il teorema per le varietà a $d-1$ dimensioni, lo si deduce per le varietà a d dimensioni.

Infatti la varietà Φ_{d-1} comune alle V, V', di cui alla fine del n° precedente, a causa della genericità delle $r-d$ forme $F_1, F_2, \ldots, F_{r-d}$ condotte per V, può supporsi irriducibile e priva di punti multipli. Per convincersene basta far variare le F, tenendo però fissi i loro ordini. La Φ varia allora su V in un sistema lineare, il quale:

a) non ha parti fisse, perchè altrimenti comunque si conducessero le F, in certi punti fissi di V i relativi iperpiani tangenti sarebbero dipendenti, mentre scelto un punto *qualunque* P di V, si posson sempre costruire $r-d$ forme-coni proiettanti V, i cui iperpiani tangenti riescano indipendenti in P;

b) è irriducibile, perchè gli ordini delle F posson supporsi così elevati che il sistema $|\Phi|$ contenga parzialmente le sezioni iperpiane di V; donde segue che $|\Phi|$ non può esser composto con un fascio.

---

[6]) *Su alcune questioni di postulazione* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XVII (1903), pp. 73-103]; §§ 2, 4.

[7]) Pel caso di varietà con punti multipli veggasi: SEVERI, *Osservazioni sul Restsatz per una curva iperspaziale* (Lettera al Prof. E. BERTINI) [Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, t. XLIII (1907-1908), pp. 852-855].

Ciò premesso, dicasi $|A|$ il sistema lineare, di dimensione s, staccato su V dalle forme d'un ordine l così elevato, che il sistema, di dimensione t, da esse segnato su Φ sia completo; e s'indichi con $|B|$ il sistema segato su V, fuori di Φ, dalle forme d'ordine l passanti per Φ.

Il sistema lineare $|A|$ e il sistema completo di dimensione $s+\delta$ $(\delta \geq 0)$ che lo contiene totalmente, segnano su Φ lo stesso sistema lineare (completo), di guisa che la dimensione del sistema completo individuato da una B risulta uguale ad $s+\delta-t-1$. D'altronde, pel teorema enunciato alla fine del n° precedente, il sistema $|B|$, di dimensione $s-t-1$, è esso medesimo completo, dunque risulta $\delta = 0$.

Il teorema essendo vero per le curve (CASTELNUOVO), resta così dimostrato per varietà qualunque.

OSSERVAZIONE Ia. — Quando V sia completa intersezione di forme (e sempre priva di punti multipli) il teorema vale per le forme d'ordine arbitrario.

OSSERVAZIONE IIa. — Si noti che il semplice ragionamento sopra esposto prova in sostanza che «quando si ha su V_d un sistema lineare $|A|$, il quale soddisfaccia alle due condizioni:

1) di segare su una Φ_{d-1} appartenente a V_d un sistema completo;

2) di dar luogo ad un residuo completo $|A-\Phi|$;

si può affermare che $|A|$ è esso pure completo».

Rileviamo ciò in modo esplicito, per poter più tardi esimerci con un richiamo, da una più lunga considerazione.

OSSERVAZIONE IIIa. — Ci occorrerà anche in seguito di aver notato che «sopra la varietà V_d le varietà a $d-1$ dimensioni di un sistema lineare $|M|$, offrono la stessa postulazione alle forme d'ordine l abbastanza alto».

Dicasi $|A|$ il sistema (completo) segnato su V dalle forme d'ordine l assai alto. Risulterà completo anche il residuo $|N| = |A-M|$, e quindi la dimensione di $|N|$ resterà costante al variare di M entro al proprio sistema lineare.

D'altra parte

$$\text{dimensione } |N| = \text{postulazione } V - \text{postulazione } M - 1,$$

dunque risulta costante la postulazione di M.

3. ***Legame tra la postulazione di una varietà spezzata in più parti e le postulazioni delle singole parti.*** — È noto che il numero delle condizioni che un gruppo-base di dimensione d (cioè tale che d sia la massima dimensione delle varietà che lo costituiscono), presenta alle forme d'ordine l, abbastanza alto, dello S_r, è espresso dalla formola (di postulazione):

$$\sum_{i=0}^{d} k_i \binom{l+d-i}{d-i},$$

ove le k_i son numeri caratteristici del gruppo base. Anzi le $k_0, k_1, \ldots, k_{d-1}$ sono i coefficienti della formola di postulazione relativa al gruppo-base che s'ottiene tagliando con un iperpiano generico il gruppo-base dato [8]).

---

[8]) Vedi BERTINI, *Lezioni sulla geometria proiettiva degli iperspazi* (Pisa, Spoerri, 1907), Cap. XI.

Nel seguito parlando di forme d'ordine l, in relazione ad una data varietà V, supporremo sempre l così grande, che la formola di postulazione di V sia applicabile per calcolare il numero effettivo delle condizioni che V presenta alle forme di quell'ordine; e indicheremo in modo generale con $v(l)$ la formola di postulazione stessa, usando la lettera minuscola corrispondente a quella, majuscola, adoperata per designare la varietà.

Ci proponiamo anzitutto di stabilire i seguenti teoremi:

I) *Sia W_{d-1} l'intersezione di una varietà V_d con una forma F, d'ordine q, che non contenga alcuna parte di V: allora tra le formole di postulazione delle V, W passa la relazione*

$$v(l+q) = v(l) + w(l+q).$$

II) *Sia Y una varietà formata da due varietà irriducibili V_d, $V_{d'}$ $(d \leqq d')$ che si taglino secondo una varietà X_{d-1}: allora tra le formole di postulazione delle varietà nominate, passa la relazione*

$$v(l) + v'(l) = x(l) + y(l).$$

Nella Memoria del LASKER, *Zur Theorie der Moduln und Ideale* [9]) si trova (n° 20) un teorema che ha molta analogia col Teorema I. Là si parla di un modulo (V) e di una forma (F), e si considera il massimo comun divisore dei due moduli (V) ed (F): tra le *formole caratteristiche* $v(l)$ e $w(l)$ del modulo (V) e del massimo comun divisore di (V) ed (F) passa allora la relazione sopra scritta.

Il nostro Teorema I esprime però qualcosa di sostanzialmente diverso, perchè non si può affermare che il massimo comun divisore dei due moduli (V) ed (F) sia costituito da *tutte* le forme che passano per la varietà W comune a V e ad F [10]).

Per la stessa ragione il Teorema II non può considerarsi come una forma diversa della nota relazione di HILBERT, tra le funzioni caratteristiche di due moduli e le funzioni caratteristiche del loro massimo comun divisore e del loro minimo comun multiplo [11]).

La dimostrazione dei Teoremi I, II si farà simultaneamente per induzione.

Supponiamo dimostrato il Teorema II per le varietà composte da una $V'_{d'}$ di dimensione d' qualunque, e da una varietà di dimensione $< d$. In quest'ipotesi dimostriamo il Teorema I.

---

9) Mathematische Annalen, Bd. LX (1905), pp. 20-116.

10) Tanto varrebbe riguardare come evidente il fatto che il sistema lineare *congiungente* dei sistemi costituiti dalle forme d'ordine l per V e dalle forme d'ordine l che contengono come parte F, è il sistema delle forme d'ordine l per W. Il Teorema I afferma in sostanza che ciò è vero (ma soltanto per l assai grande). Il teorema stesso può quindi enunciarsi dicendo che ogni forma d'ordine l assai grande che passi per W, appartiene al massimo comun divisore dei due moduli (V) ed (F). — *Non si può insomma affermare che il massimo comun divisore dei moduli definiti da 2 varietà, sia il modulo definito dalla loro intersezione.* Si dànno anzi facilmente esempi in contrario. Basta considerare nello spazio ordinario i moduli definiti da una quartica di 2ª specie e da un piano.

11) HILBERT, *Ueber die Theorie der algebraischen Formen* [Mathematische Annalen, Bd. XXXVI (1890), pp. 473-534], p. 517.

Indichiamo con S_r lo spazio ambiente e con T la sezione iperpiana generica di V. Dalla relazione che passa tra le dimensioni dei sistemi lineari Σ, Σ' costituiti dalle forme degli ordini l, $l+1$ per V, e del sistema lineare staccato da Σ' sull'iperpiano contenente T, si trae

$$v(l+1) = v(l) + t(l+1). \tag{1}$$

Applicando successivamente questa relazione da $l+1$ ad $l+q$ e sommando quindi membro a membro le uguaglianze ottenute, viene

$$v(l+q) = v(l) + t(l+1) + t(l+2) + \cdots + t(l+q). \tag{2}$$

Ciò posto, si osservi che la postulazione della sezione T_2 di V con una quadrica, può ottenersi considerando in particolare una quadrica spezzata in due iperpiani (n° 2, Osservazione III^a^). D'altra parte, per calcolare la postulazione della varietà insieme di due sezioni iperpiane (che hanno la dimensione $d-1$), si può applicare il Teorema II. Ne deriva che

$$t_2(l+2) = 2t(l+2) - u(l+2), \tag{3}$$

ove U denota la sezione di V con un S_{r-2}.

Il procedimento stesso con cui si perviene alla (1), applicato alla sezione iperpiana di V, dà

$$t(l+2) = t(l+1) + u(l+2),$$

onde la (3) diviene

$$t_2(l+2) = t(l+1) + t(l+2).$$

Così continuando si trova

$$w(l+q) = t_q(l+q) = t(l+1) + t(l+2) + \cdots + t(l+q).$$

La (2) riducesi perciò alla relazione che volevasi dimostrare.

Passiamo ora a stabilire il Teorema II per le varietà composte da una $V'_{d'}$ e da una V_d, supponendolo sempre già dimostrato per le varietà composte da una $V'_{d'}$ e da una varietà di dimensione $< d$.

Per V' conduciamo una forma F d'ordine q, che non contenga V, e indichiamo con Z_{d-1} la varietà intersezione di F e V, fuori di X; indichiamo inoltre con H_{d-2} la varietà comune ad X, Z od anche a V', Z.

Le forme d'ordine $l+q$ passanti per la varietà $V'+Z$, segnano su V, fuori di $X+Z$, un sistema lineare Σ che contiene totalmente quello segnato su V dalle forme d'ordine l; e poichè quest'ultimo sistema ha la dimensione $v(l)-1$, si avrà intanto

$$\text{dim. } \Sigma \geqq v(l) - 1. \tag{4}$$

D'altra parte, per l assai grande la varietà Z imporrà

$$z(l+q) - h(l+q) \tag{5}$$

condizioni alle forme d'ordine $l+q$ già passanti per V', come si vede applicando il Teorema II alla varietà composta $V'+Z$ (il che, per l'ipotesi fatta, è lecito). Si può dire, in altri termini, che (5) esprime pure il numero delle condizioni che Z presenta alle varietà del sistema lineare Σ' staccato su V, fuori di X, dalle forme d'ordine $l+q$

per V'. Onde risulterà

$$\dim. \Sigma' = z(l+q) - h(l+q) + \dim. \Sigma \geqq z(l+q) - h(l+q) + v(l) - 1.$$

Alla varietà composta $W = X + Z$ si può applicare il Teorema II, perchè essa consta di due parti di dimensione $d - 1$: si ottiene in tal modo la relazione

$$w(l+q) = x(l+q) + z(l+q) - h(l+q).$$

D'altronde pel Teorema I

$$v(l+q) = v(l) + w(l+q),$$

dunque

$$\dim. \Sigma' \geqq a(l+q) - x(l+q) - 1. \tag{6}$$

Il secondo membro di questa disuguaglianza esprime la dimensione del sistema lineare Σ'' segnato su V, fuori di X, dalle forme d'ordine $l + q$ per X. Poichè il sistema Σ'' contiene totalmente Σ', nella (6) dovrà valere il segno $=$.

Se si osserva ora che la dimensione di Σ' è pure espressa da

$$y(l+q) - v'(l+q) - 1,$$

ove si è posto $Y = V + V'$, confrontando colla (6), che è ormai ridotta ad un'uguaglianza, si perviene alla relazione da dimostrarsi

$$v(l+q) + v'(l+q) = x(l+q) + y(l+q).$$

Poichè questa relazione è evidentemente vera allorquando la varietà Y si componga di una $V'_{d'}$ e di un gruppo V di punti ($d = 0$), il Teorema II resta dimostrato in ogni caso e risulta così completata anche la dimostrazione del Teorema I.

Osservazione. — Si noti che pel ragionamento precedente occorre soltanto la irriducibilità della varietà V su cui si considerano i sistemi lineari Σ, Σ', Σ''; ma non la irriducibilità della varietà V'. Ciò dà modo di estendere il Teorema II ad ogni varietà composta di un numero qualunque di varietà irriducibili.

4. *Genere aritmetico d'una varietà qualunque.* — Nello S_r sia V_d una varietà algebrica, irriducibile o no, priva di varietà multiple della sua stessa dimensione, e sia

$$v(l) = k_0 \binom{l+d}{d} + k_1 \binom{l+d-1}{d-1} + \cdots + k_{d-1}(l+1) + k_d \tag{7}$$

la formola di postulazione ad essa relativa.

Il significato dei coefficienti $k_0, k_1, \ldots, k_d$ è noto quando $d = 0, 1, 2$. Nel caso $d = 0$, il coefficiente k_0 non è altro che il numero dei punti del gruppo; nel caso di una curva irriducibile, senza singolarità, d'ordine $p_0 + 1$, e genere p_1, si ha (Cayley, Noether, Castelnuovo)

$$k_0 = p_0 + 1, \qquad k_1 = -(p_0 + p_1);$$

nel caso di una superficie, senza singolarità, di genere aritmetico p_2, la cui sezione iperpiana abbia l'ordine $p_0 + 1$ e il genere p_1, si ha:

$$k_0 = p_0 + 1, \qquad k_1 = -(p_0 + p_1), \qquad k_2 = p_1 + p_2 \text{ [12]}.$$

[12]) Severi, loc. cit. [6]), n° 26.

Sicchè nel caso d'una curva risulta

$$p_1 = -(k_0 + k_1 - 1);$$

e nel caso d'una superficie

$$p_2 = k_0 + k_1 + k_2 - 1.$$

Ciò premesso, per una qualunque V_d si affaccia subito l'idea di definire il *genere aritmetico virtuale* mediante la formola

$$p_d = (-1)^d (k_0 + k_1 + \cdots + k_d - 1).$$

Dopo ciò *la formola di postulazione d'una varietà V_d qualunque potrà scriversi così*

$$(8) \qquad \begin{cases} v(l) = (p_0 + 1)\binom{l+d}{d} - (p_0 + p_1)\binom{l+d-1}{d-1} + \cdots \\ \cdots + (-1)^{d-1}(p_{d-2} + p_{d-1})(l+1) + (-1)^d (p_{d-1} + p_d), \end{cases}$$

ove $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_d$ *sono i generi aritmetici virtuali delle sezioni di V rispettivamente cogli spazi $S_{r-d}, S_{r-d+1}, S_{r-d+2}, \ldots, S_r$.*

Quando la V_d sia irriducibile e priva di singolarità, il numero p_d si chiamerà *genere aritmetico effettivo* o semplicemente *genere aritmetico.*

Ma *la* (8) *resterebbe un'inutile trasformazione formale della* (7), qualora non si stabilisse che, nel caso di varietà irriducibili, i generi aritmetici sono caratteri invarianti di fronte alle trasformazioni birazionali.

Il fatto è ormai classico per le curve e le superficie. Sfortunatamente per le varietà superiori la dimostrazione si presenta tutt'altro che agevole [13]): in questo lavoro si troverà stabilita in modo completo soltanto per le varietà a tre dimensioni e accennata per le varietà di dimensione maggiore.

5. *Legame tra il genere aritmetico virtuale d'una varietà spezzata e i generi aritmetici delle singole parti.* — Dimostriamo il teorema seguente:

III) *Se la varietà V_d di genere aritmetico virtuale p_d, è composta di due parti V'_d, V''_d, di generi rispettivi p'_d, p''_d, le quali si taglino secondo una varietà X_{d-1}, di genere q_{d-1}, sussiste la relazione*

$$p_d = p'_d + p''_d + q_{d-1}.$$

Il teorema è noto nel caso delle curve (NOETHER); tuttavia, volendo procedere per induzione, ci rifaremo da questo caso.

---

[13]) A pag. 520 della Memoria citata, [11]), il sig. HILBERT scrive le parole seguenti: «. . . während die übrigen Coefficienten (della formola caratteristica) mit den von M. NOETHER definirten und behandelten Geschlechtszahlen des Gebildes in engem Zusammenhange stehen. Der allgemeine Beweis hierfür beruht auf dem Schlusse von $n-1$ auf n Veränderliche. Wie man sieht finden sich die eben angegebenen Sätze in dem Falle der Curve im dreidimensionalen Raume in der That bestätigt». Queste parole debbono riguardarsi piuttosto come un accenno ad un problema da risolversi, che ad una facile risoluzione della questione stessa; tanto più che i coefficienti k_i non potrebbero in generale esprimersi mediante i generi *geometrici* introdotti da NOETHER.

Sieno

$$v(l) = (p_0 + 1)(l + 1) - (p_0 + p_1), \qquad v'(l) = (p'_0 + 1)(l + 1) - (p'_0 + p'_1),$$
$$v''(l) = (p''_0 + 1)(l + 1) - (p''_0 + p''_1), \qquad x(l) = q_0 + 1,$$

le formole di postulazione relative alle curve V, V', V'' e al gruppo di punti X.

È chiaro che il teorema sarà stabilito in generale, quando lo avremo dimostrato nel caso in cui una delle due varietà V', V'' sia irriducibile.

In quest'ipotesi si può applicare il Teorema II e scrivere

$$v(l) + x(l) = v'(l) + v''(l). \tag{9}$$

Poichè tra gli ordini $p_0 + 1$, $p'_0 + 1$, $p''_0 + 1$ delle V, V', V'', si ha evidentemente la relazione

$$p_0 = p'_0 + p''_0 + 1,$$

la (9) riducesi immediatamente a

$$p_1 = p'_1 + p''_1 + q_0.$$

Passiamo al caso generale, supponendo già acquisito il teorema per le varietà di dimensione $< d$. Si hanno le formole di postulazione

$$v(l) = \sum (-1)^i (p_{i-1} + p_i) \binom{l+d-i}{d-i}, \qquad v'(l) = \sum (-1)^i (p'_{i-1} + p'_i) \binom{l+d-i}{d-i},$$
$$v''(l) = \sum (-1)^i (p''_{i-1} + p''_i) \binom{l+d-i}{d-i}, \qquad x(l) = \sum (-1)^i (q_{i-1} + q_i) \binom{l+d-i-1}{d-i-1},$$

tra le quali, in virtù del Teorema II, passa la relazione (9).

Per ipotesi sussistono le uguaglianze

$$p_i = p'_i + p''_i + q_{i-1} \qquad (i = 0, 1, \ldots, d-1;\ q_{-1} = 1),$$

mediante le quali la (9) riducesi alla relazione da dimostrarsi.

Osservazione Iª. — L'applicazione replicata del teorema permette di calcolare il genere aritmetico virtuale d'una varietà V_d composta di più parti, le quali si possano ordinare in tal guisa che ciascuna abbia a comune colla successiva una varietà di dimensione $d - 1$.

Osservazione IIª. — *Quando le due parti V'_d, V''_d di cui consta la V_d non hanno punti comuni,* risulta

$$\text{postulazione } V = \text{postulazione } V' + \text{postulazione } V''. \tag{10}$$

Ciò si dimostra collo stesso ragionamento col quale arrivammo al Teorema II: basta supporre che manchi la varietà che là indicavamo con X.

Dalla (10) si trae per induzione

$$p_d = p'_d + p''_d - 1,$$

p_d, p'_d, p''_d denotando i generi di V, V', V''.

6. *Caratteri numerativi d'una varietà.* — Nella mia Memoria « *Sulle intersezioni delle varietà algebriche e sopra i loro caratteri e singolarità proiettive* » [14]) ho definito i *caratteri proiettivi* di una varietà algebrica V_d, nel modo seguente:

---

[14]) Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, t. LII (1902), pp. 61-118.

Fissata nello spazio ambiente S_r una figura fondamentale $[a_0, a_1, \ldots, a_d]$, cioè l'insieme degli S_d che hanno un punto comune con un dato S_{a_0}, una retta comune con un dato $S_{a_1}, \ldots,$ un S_i comune con un dato S_{a_i}, e che giacciono in un dato S_{a_d}, verificandosi per ogni valor di i il fatto che lo $S_{a_{i+1}}$ dato passa pel dato S_{a_i}, si considerino gli S_d tangenti a V e appartenenti a quella figura fondamentale. Perchè ne esistano occorre che sia

$$k = \sum_0^d a_i + \frac{1}{2} d(d+3) - (d+1)r \geqq 0; \tag{11}$$

ed allora, se la figura è generica, il luogo dei punti di contatto costituisce una varietà a k dimensioni, il cui ordine dà un carattere proiettivo di V. Si ottengono così tanti caratteri, che s'indicano coi simboli $(a_0 a_1 \ldots a_d)$ corrispondenti alle figure fondamentali costruibili sotto la condizione (11).

La soluzione del *problema delle caratteristiche* per le varietà di spazî lineari, data prima da SCHUBERT e ritrovata altrimenti da me [15]), giustifica ampiamente la opportunità della suddetta definizione e mostra l'importanza dei caratteri $(a_0, a_1, \ldots, a_d)$.

Infatti essi dànno *tutte le caratteristiche* della varietà formata dagli S_d tangenti alla data V_d, nel senso che *il numero degli spazi tangenti a V che soddisfano ad una qualunque condizione algebrica, si esprime mediante una combinazione lineare dei caratteri proiettivi di V, i cui coefficienti dipendono soltanto dalla assegnata condizione.*

Poichè ogni condizione algebrica imposta ai *punti* di V si traduce in una condizione imposta alle varietà degli S_d tangenti, i caratteri $(a_0 a_1 \ldots a_d)$ permettono in definitiva di esprimere il numero delle soluzioni di ogni problema numerativo che si riferisca alla varietà V.

Non va però taciuta, a scanso di malintesi, un'osservazione che si riferisce al caso in cui V possieda punti multipli.

Quando per una tale varietà si domanda il numero degli S_d tangenti che soddisfano ad una determinata condizione, e si cerca di esprimere questo numero in funzione dei caratteri proiettivi sopra definiti, si trovano incluse, nel numero stesso, delle *soluzioni improprie* che prendono appunto origine dalle singolarità di V.

Così per es. per una curva piana dotata di punti multipli, le soluzioni dei problemi numerativi si potranno esprimere mediante l'ordine della curva e la classe dell'inviluppo formato dalle sue tangenti, soltanto qualora s'includano in questo inviluppo i fasci di rette che hanno per centri i punti multipli, contati ciascuno un conveniente numero di volte.

Volendo depurare il numero ottenuto, dalle soluzioni improprie, occorrerà aggiungere alle caratteristiche di V i caratteri proiettivi delle sue varietà multiple, ed eventual-

---

[15]) SCHUBERT, *Lösung des Charakteristiken-Problems für lineare Räume beliebiger Dimension* [Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg, t. I (1886), pp. 134-155]; SEVERI, *Le coincidenze di una serie algebrica $\infty^{(k+1)(r-k)}$ di coppie di spazi a k dimensioni, immersi nello spazio ad r dimensioni* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. IX, 2° semestre 1900, pp. 321-326].

mente, quando si tratti di singolarità straordinarie, anche i caratteri di composizione di queste singolarità.

Qualora si ammetta che « ogni varietà V' dotata di singolarità arbitrarie, sia proiezione d'una V senza punti multipli », si vede che nella proiezione alcuni caratteri proiettivi di V si mutano in caratteri proiettivi di V', mentre altri caratteri di V si mutano in caratteri delle varietà multiple che V' viene ad acquistare. Così per es. quando si passa con una proiezione da una superficie V dello spazio S_4, ad una V' dello spazio ordinario, tre dei quattro caratteri di V si rispecchiano in caratteri proiettivi di V', mentre il numero dei piani tangenti a V, che escono da un punto dello spazio S_4, si rispecchia nel numero dei punti cuspidali (pinch-points) della superficie V'. Ond'è che il numero di tali punti va considerato tra le caratteristiche di V'.

Noi nel seguito ci limiteremo a considerare varietà dotate di singolarità ordinarie, ottenibili cioè mediante proiezioni generiche di varietà prive di punti multipli. Con ciò la generalità dei nostri risultati resterà subordinata alla possibilità di risolvere in singolarità ordinarie, mediante trasformazioni birazionali, le singolarità di una varietà qualunque. Questa possibilità, com'è ben noto, è stata dimostrata soltanto per le curve e le superficie ed è desiderabile che possa venir presto stabilita, con una trovata geniale, per varietà qualunque.

Chiameremo *caratteri numerativi* di una varietà V, quelli che sono esprimibili mediante i caratteri proiettivi di V e delle sue varietà multiple.

Il genere di una curva, il genere lineare e il genere aritmetico di una superficie, sono altrettanti caratteri numerativi.

Ciò dà la ragione dell'attributo « aritmetico » o « numerico » che si usa per distinguere il genere superficiale considerato da Cayley, Zeuthen, Noether e la cui teoria completa è dovuta ad Enriques, dal genere « geometrico » definito da Clebsch e da Noether.

Quanto ai caratteri rimanenti (non numerativi) di una varietà, vi sarebbe da precisare bene la distinzione tra i *caratteri geometrici* (come il genere di Clebsch-Noether) e i *caratteri aritmetici* (come il numero-base di una superficie); ma su ciò non ci tratteniamo, perchè tale distinzione non ci occorrerà nel seguito.

7. Dimostriamo ora il teorema seguente:

IV) *Il genere aritmetico di una varietà è un carattere numerativo.*

Supponiamo dimostrato il teorema per le varietà a $d' \leqq d-1$ dimensioni—giacchè lo sappiamo valido nel caso delle curve e delle superficie—e deduciamolo per le varietà a d dimensioni.

L'ipotesi fatta equivale ad affermare che i coefficienti della formola di postulazione relativa ad una qualunque varietà a $d-1$ dimensioni, sono altrettanti caratteri numerativi della varietà stessa.

Consideriamo una varietà irriducibile a d dimensioni V, priva di singolarità e appartenente ad uno spazio S_r. Proiettiamo V sopra un S_{d+1} da un S_{r-d-2} generico O, e diciamo V' la varietà proiezione, la quale verrà ad avere una varietà doppia $M^{(1)}$ a

$d-1$ dimensioni; una varietà $M^{(2)}$ a $d-2$ dimensioni, tripla per V e per $M^{(1)}$; una varietà $M^{(3)}$, a $d-3$ dimensioni, quadrupla per V, sestupla per $M^{(1)}$ e quadrupla per $M^{(2)}$; etc.

I caratteri proiettivi delle varietà $M^{(1)}$, $M^{(2)}$, $M^{(3)}$, ..., corrispondono ad altrettanti caratteri proiettivi di V; onde i coefficienti della formula di postulazione relativa alla varietà doppia $M^{(1)}$, riescono in definitiva caratteri numerativi di V.

La dimensione del sistema delle forme aggiunte a V', d'ordine l abbastanza alto, e la dimensione δ_l del sistema lineare (completo) da esse staccato su V', fuori di $M^{(1)}$, risultano perciò polinomii in l a coefficienti esprimibili mediante i caratteri di V.

Denotando ora con M la varietà a $d-1$ dimensioni luogo dei punti d'appoggio delle corde di V incidenti ad O, risulta facilmente

$$\text{postulazione } V = \text{postulazione } M + \delta_l + 1.$$

Poichè i caratteri di M si esprimono mediante i caratteri di V, i coefficienti della formola di postulazione relativa a V, risulteranno caratteri numerativi della varietà stessa.

Per estendere la conclusione alle varietà dotate di punti multipli—il che è necessario, perchè nel ragionamento precedente occorre il teorema per le varietà a $d-1$ dimensioni dotate di singolarità—*ammetteremo* che « ogni varietà dotata di punti multipli, si possa considerare come limite di una senza singolarità, appartenente allo stesso spazio ». Nel passaggio continuo dalla varietà V_d, priva di punti multipli, alla varietà W_d data, alcuni caratteri proiettivi di V si convertono in somme di caratteri proiettivi di W e delle sue varietà multiple; e siccome nella variazione continua i coefficienti della formola di postulazione si conservano costanti, si conclude ch'essi possono esprimersi mediante i caratteri proiettivi di W e delle sue varietà multiple.

OSSERVAZIONE I^a. — Del teorema ora dimostrato ci gioveremo alla fine della presente memoria, in un rapido cenno di estensione alle varietà superiori, di alcune proprietà che stabiliremo con tutto il rigore necessario, soltanto nel caso di varietà a tre dimensioni. È appunto perciò che, durante il corso della dimostrazione, non abbiamo esitato a far uso di un postulato, che in realtà un esame più minuto della questione avrebbe consentito di evitare.

OSSERVAZIONE II^a. — Il Teorema IV si trasporta pure alle varietà riducibili: in tal caso si debbono includere tra le caratteristiche della varietà anche quelle spettanti alle varietà comuni alle singole parti componenti.

La relazione fondamentale tra gl'invarianti Ω e il genere aritmetico d'una varietà a tre dimensioni.

8. ***Un'altra definizione del genere aritmetico.*** — Consideriamo nello S_4 una forma V, d'ordine n, dotata di singolarità ordinarie, e indichiamo con D la sua superficie doppia [e quindi con $d(l)$ la formola di postulazione relativa a D].

Chiameremo *genere aritmetico* di V il « numero virtuale » delle forme d'ordine

$n-5$ aggiunte a V; numero calcolato nell'ipotesi che la formola $d(l)$ esprima la postulazione di D anche per $l = n-5$.

Denotando con P_a il genere definito, avremo pertanto

$$P_a = \binom{n-1}{4} - d(n-5). \tag{12}$$

Questa definizione è applicabile anche al caso in cui si riguardi come virtualmente inesistente la D od una sua parte (qualora D sia riducibile). Cambierà allora il significato di $d(n-5)$ e si avrà in corrispondenza il genere aritmetico « virtuale » di V.

Si può considerare tale genere anche per una varietà riducibile, riguardando come singolarità inesistenti alcune superficie (doppie) comuni alle varie parti.

Il *genere geometrico* P_g della V è invece il numero « effettivo » delle forme aggiunte d'ordine $n-5$ (NOETHER), cioè il numero delle superficie linearmente indipendenti, che costituiscono il sistema canonico di V.

Pel teorema fondamentale dell'aggiunzione (ENRIQUES), P_g è un invariante assoluto di fronte alle trasformazioni birazionali.

Supponiamo che la V sia proiezione generica di una varietà W priva di punti multipli in uno spazio S_r, e sia p_3 il carattere di W definito al n° 4 come genere aritmetico della varietà. Nulla ci autorizza ad affermare a priori che i due numeri P_a e p_3 sieno eguali: ciò però sarà dimostrato in seguito (n° 16). Provvisoriamente li continueremo a distinguere colle lettere P_a, p_3.

9. *Dimensione del sistema aggiunto ad un multiplo abbastanza alto di una sezione iperpiana.* — Cerchiamo di esprimere la dimensione ρ_h del sistema (completo) $|A|$ segato su V, fuori di D, dalle forme aggiunte d'ordine $l = n-5+h$, cioè del sistema aggiunto al sistema $|hC|$, ove $|C|$ denoti il sistema delle sezioni iperpiane di V, ed h un intero positivo abbastanza alto. Poichè

$$d(l) = d(l-1) + k_0 l + k_1,$$

ove $k_0 l + k$ è la formola di postulazione relativa alla curva sezione iperpiana della D, scrivendo questa relazione da $l = n-4$ fino ad un valore di l per cui la formola $d(l)$ sia applicabile, e sommando membro a membro le diverse uguaglianze che così si ottengono, si perviene alla

$$d(l) = d(n-5) + k_0\left[\binom{l+1}{2} - \binom{n-4}{2}\right] + hk_1 \qquad (l = n-5+h),$$

ossia, in virtù della (12),

$$d(l) = \binom{n-1}{4} - P_a + k_0\left[\binom{n-4+h}{2} - \binom{n-4}{2}\right] + hk_1.$$

Se ne rileva

$$\rho_h = \binom{n-1+h}{4} - \binom{h-1}{4} - \binom{n-1}{4} + P_a - k_0\left[\binom{n-4+h}{2} - \binom{n-4}{2}\right] - hk_1 - 1. \tag{13}$$

Ora si osservi che il genere aritmetico p_a di C è espresso dalla formola

$$p_a = \binom{n-1}{3} - k_0(n-4) - k_1, \tag{14}$$

dalla quale deducesi l'espressione del genere aritmetico $p_a^{(h)}$ di hC, mediante la formula che dà il genere aritmetico virtuale di una superficie spezzata in più parti (n° 5). Si trova così:

$$p_a^{(h)} = \binom{h}{3}(n-1) + \binom{h}{2}\pi + hp_a + \binom{h-1}{3},$$

ove π denota il genere della sezione iperpiana di C. Tenendo presente la (14) e la formola

$$\pi = \binom{n-1}{2} - k_0,$$

si ottiene per $p_a^{(h)}$ un'espressione dipendente soltanto da n, k_0, k_1, h; confrontando quest'espressione colla (13), si perviene infine alla semplice relazione

$$\rho_h = p_a^{(h)} - 1 + P_a. \tag{15}$$

10. In altro modo possiamo calcolare la dimensione ρ_h, giungendo così ad una nuova espressione di P_a, che ci sarà tosto utile.

Per la W — nello S_r — conduciamo $r-3$ forme generiche di ordini $n_1, n_2, \ldots, n_{r-3}$, che si seghino ulteriormente secondo una varietà W', avente a comune con W una superficie Φ (irriducibile e priva di punti multipli — n° 2).

Se si pone $s = \sum_{i=1}^{i=r-3} n_i - r - 1$, il sistema completo $|(hC)'|$ sarà segnato su W dalle forme d'ordine $s+h$ per W' (o per Φ) [16]. Supporremo di aver scelto gli ordini n così alti, che la formula di postulazione $w(l)$ relativa a W, sia applicabile per $l \geqq s$.

Se h è così elevato che la formula di postulazione $\varphi(l)$, relativa a Φ, sia applicabile per $l = s+h$, avremo:

$$\rho_h = \binom{s+h+r}{r} - 1 - \varphi(s+h) - \left[\binom{s+h+r}{r} - 1 - w(s+h)\right] - 1 \tag{16}$$
$$= w(s+h) - \varphi(s+h) - 1.$$

Ora indicando con $c(l)$ la postulazione della sezione iperpiana C di W, si hanno le relazioni:

$$\begin{aligned} w(s+1) &= w(s) + c(s+1) \\ w(s+2) &= w(s+1) + c(s+2) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ w(s+h) &= w(s+h-1) + c(s+h), \end{aligned}$$

donde

$$w(s+h) = w(s) + \sum_{i=1}^{h} c(s+i).$$

Quanto a $\varphi(s+h)$, dal momento che le forme d'ordine s segnano su W il sistema completo aggiunto a Φ, e quindi su Φ il (o un) sistema canonico (non depurato dalle eventuali curve eccezionali), le forme d'ordine $s+h$ staccheranno su Φ il sistema (completo), aggiunto ad $|hE|$, E denotando la curva sezione iperpiana di Φ. Avremo

[16]) SEVERI, loc. cit. [6]), n° 26.

pertanto

$$\varphi(s+h) = p_h + \varpi_a,$$

ove p_h è il genere di una hE ed ϖ_a il genere aritmetico di Φ.

La (16) si trasforma nella:

$$\rho_h = w(s) - \varpi_a + \sum_{i=1}^{h} c(s+i) - p_h - 1. \tag{17}$$

Ora

$$c(s+i) = n\binom{s+i+1}{2} - (s+i)(\pi-1) + p_a + 1 \ ^{17)}$$

$$\text{genere } E = n\binom{s+2}{2} - (s+1)(\pi-1) + 1 \ ^{17)}$$

$$\text{ordine } E = n(s+2) - 2(\pi-1) \ ^{17)};$$

quindi

$$\sum_{i=1}^{h} c(s+i) = n\left[\binom{s+h+2}{2} - \binom{s+2}{3}\right]$$
$$-(\pi-1)\left[\binom{s+h+1}{2} - \binom{s+1}{2}\right] + hp_a + h,$$

$$p_h = nh\binom{s+2}{2} - h(\pi-1)(s+1) + \binom{h}{2}n(s+2) - 2\binom{h}{2}(\pi-1) + 1;$$

onde risulta:

$$\sum_{i=1}^{h} c(s+i) - p_h = \binom{h}{3}(n-1) + \binom{h}{2}\pi + hp_a + \binom{h-1}{3} = p_a^{(h)}.$$

Si ottiene pertanto dalla (17):

$$\rho_h = p_a^{(h)} - 1 + w(s) - \varpi_a,$$

la quale confrontata colla (15), porge l'espressione che cercavamo:

$$P_a = w(s) - \varpi_a. \tag{18}$$

11. ***Dimensione di un multiplo abbastanza alto del sistema delle sezioni iperpiane.*** — Profittando delle formule — d'immediata dimostrazione — che esprimono il grado e il genere curvilineo del sistema somma di due dati (cioè il grado e il genere del sistema lineare caratteristico) in funzione dei caratteri analoghi dei sistemi componenti [18]) e della formula che lega in simil guisa i generi aritmetici della somma e dei componenti (n° 5), si trovano, mediante elementari calcoli algebrici, le formule:

$$n_0^{(h)} = h^3 n,$$
$$n_1^{(h)} = h^2(\pi-1) + h^2(h-1)n + 1,$$
$$n_2^{(h)} = \binom{h}{3}(n-1) + \binom{h}{2}\pi + hp_a + \binom{h-1}{3},$$

---

[17]) SEVERI, loc. cit. [6]), n^i 26 e 4, *b*.

[18]) Indicando con $[MNP]$ il numero dei punti comuni alle superficie M, N, P, con $[MN]$ il genere (virtuale) della curva comune alle M, N, con $[M]$ il genere aritmetico (virtuale) della superficie M, si hanno le formule:

$[C^3] = [A^3] + [B^3] + 3[A^2B] + 3[AB^2]$, $\quad [C^2] = [A^2] + [B^2] + 2[AB] + 2[A^2B] + 2[AB^2] - 3$
$[C] = [A] + [B] + [AB]$,

che si riferiscono al sistema lineare $|C| = |A+B|$.

esprimenti il grado $n_0^{(h)}$, il genere curvilineo $n_1^{(h)}$ e il genere aritmetico $n_2^{(h)}$ del sistema $|h\,C|$.

Se ne trae:

$$n_0^{(h)} - n_1^{(h)} + n_2^{(h)} = n\binom{h+3}{3} - (\pi - 1 + n)\binom{h+2}{3} + (\pi + p_a)(h+1) - p_a - 3.$$

Questa relazione, confrontata colla formola (n° 4)

$$w(h) - 1 = n\binom{h+3}{3} - (\pi - 1 + n)\binom{h+2}{2} + (\pi + p_a)(h+1) - (p_a + p_3) - 1,$$

che esprime la dimensione R_h del sistema completo $|h\,C|$, dà

$$R_h = n_0^{(h)} - n_1^{(h)} + n_2^{(h)} - p_3 + 2.$$

12. ***Gl'invarianti relativi*** Ω_0, Ω_1, Ω_2. — Indichiamo con $|F|$ un qualunque sistema lineare di superficie tracciato su W, e con $|F'|$ il relativo sistema aggiunto. Pel teorema fondamentale dell'aggiunzione, il sistema $|F' - F|$ è indipendente dal sistema $|F|$, e, a meno di superficie eccezionali (superficie che si posson trasformare in punti o linee semplici), coincide col sistema canonico di W.

Chiameremo Ω_0, Ω_1, Ω_2 i caratteri virtuali (grado, genere curvilineo, genere aritmetico) di una superficie $F' - F$; caratteri che si debbon *valutare virtualmente,* cioè come se esistesse una superficie effettiva corrispondente al simbolo $F' - F$, anche quando W non possiede il sistema canonico.

Questi caratteri coincidono rispettivamente coi generi $p^{(4)}$, $p^{(3)}$, $p^{(1)}$ [introdotti da NOETHER [19])], quando W sia priva di superficie eccezionali e abbia il genere geometrico > 0.

Sono *invarianti relativi,* cioè restano inalterati per quelle trasformazioni birazionali che non introducono superficie eccezionali. Essi sono già stati studiati diffusamente dal PANNELLI [20]), specialmente nei riguardi del loro comportamento di fronte alle trasformazioni birazionali che introducono superficie eccezionali.

Gl'invarianti Ω non sono tra loro indipendenti; si ha tra Ω_0 e Ω_1 la relazione

$$2\Omega_1 - 2 = 3\Omega_0 \quad {}^{21)},$$

la quale si ricava immediatamente dalla ben nota relazione tra i due invarianti ω di una superficie.

Ciò premesso, cerchiamo di esprimere i caratteri del sistema $|F'|$ mediante i caratteri

---

[19]) *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde.* Zweiter Aufsatz. [Mathematische Annalen, Bd. VIII (1875), pp. 495-533]. NOETHER considera pure il genere $p^{(2)}$, che non è però distinto dagli altri ($p^{(2)} = 4p^{(4)} + 1$).

[20]) *a*) *Sopra alcuni caratteri di una varietà algebrica a tre dimensioni* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XV, 1° semestre 1906, pp. 483-489]; *b*) *Sopra gl'invarianti di una varietà algebrica a tre dimensioni rispetto alle trasformazioni birazionali* [Ibid., id., pp. 619-629].

Pel confronto col PANNELLI si ponga $\Omega_0 = \Delta^{(3)}$, $\Omega_1 = \Delta^{(4)}$, $\Omega_2 = \Delta^{(1)}$.

[21]) PANNELLI, loc. cit. [20]), *a*), formola (23).

di $|F|$ e gl'invarianti Ω. Indicando con K una superficie — eventualmente virtuale [22]) — $F' - F$, si ha:

$$F' \equiv F + K,$$

e applicando le formole riferite nella nota [18]), si ottengono le relazioni

$$(19) \qquad \begin{cases} n' = n + \Omega_0 + 3[F^2 K] + 3[F K^2] \\ \pi' = \pi + \Omega_1 + 2[F K] + 2[F^2 K] + 2[F K^2] - 3 \\ p'_a = p_a + \Omega_2 + [F K], \end{cases}$$

ove n, π, p_a denotano grado, genere curvilineo, genere aritmetico del sistema $|F|$ ed n', π', p'_a i caratteri analoghi di $|F'|$. Dalle (19) si trae

$$(20) \quad n' - \pi' + p'_a = n - \pi + p_a + \Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2 + [F K^2] + [F^2 K] - [F K] + 3.$$

Inoltre:

$$(21) \qquad \begin{cases} [F^2 K] = [F^2 F'] - [F^3] = 2\pi - 2n - 2, \\ [F K^2] = [F F'^2] + [F^3] - 2[F^2 F'] = \omega + 3n - 4\pi + 3 \\ [F K] = [F F'] - [F^2] - [F^2 K] + 1 = \omega + 2n - 3\pi + 3, \end{cases}$$

ove ω è l'invariante d'Enriques-Castelnuovo appartenente alla superficie F. Dalle (21) si ricava

$$[F K^2] + [F^2 K] - [F K] = \pi - n - 2,$$

e quindi la (20) dà

$$(22) \qquad n' - \pi' + p'_a = p_a + \Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2 + 1.$$

Si può enunciare la proposizione seguente:

V) *Tra il genere aritmetico virtuale p_a di una superficie F e i caratteri virtuali n', π', p'_a (grado, genere curvilineo, genere aritmetico) di una superficie aggiunta F', passa la relazione* (22).

Questa relazione deve considerarsi come l'analoga della

$$n' - \pi' = \pi - 2,$$

che passa tra il genere π di una curva C e i caratteri n', π' di una curva aggiunta C', sopra una data superficie algebrica.

13. ***Forma provvisoria della relazione fondamentale.*** — Poichè al n° 10 si sono supposte le n così elevate che la formola $w(l)$ relativa a W, sia applicabile per $l = s$, nella (18) al posto di $w(s)$ potremo scrivere l'espressione di $R_s + 1$, che si ricava dal n° 11 per $l = s$. La (18) si trasforma pertanto nella

$$(23) \qquad P_a + \varpi_a = n_0^{(s)} - n_1^{(s)} + n_2^{(s)} - p_3 + 3.$$

In forza della relazione trovata al n° prec., poichè il sistema di caratteri $n_0^{(s)}$, $n_1^{(s)}$, $n_2^{(s)}$ segnato su W dalle forme d'ordine s, è aggiunto alla superficie Φ, di genere arit-

[22]) Si posson considerare sopra una varietà *superficie virtuali*, come ho altrove considerato curve virtuali sopra una superficie. Cfr. Severi, *Sulle curve algebriche virtuali appartenenti ad una superficie algebrica* [Rendiconti del R. Istituto Lombardo, s. II, vol. XXXVIII (1905), pp. 859-865].

metico ϖ_a, potremo scrivere:

$$n_0^{(s)} - n_1^{(s)} + n_2^{(s)} = \varpi_a + \Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2 + 1,$$

la quale, confrontata colla (23), porge

$$P_a + p_3 = \Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2 + 4. \tag{24}$$

Non essendosi ancor dimostrata l'uguaglianza dei numeri P_a, p_3, la (24) si riguarderà soltanto come una forma provvisoria della « relazione fondamentale » tra gl'invarianti Ω e il genere aritmetico della varietà.

14. ***Irregolarità superficiale d'una varietà a tre dimensioni. — Genere geometrico virtuale d'una superficie.*** — I signori CASTELNUOVO ed ENRIQUES hanno dimostrato recentemente che l'irregolarità q_2 d'una superficie contenuta in una varietà V, a tre dimensioni, non dipende dalla superficie che si considera, a condizione che questa possa variare in un sistema ∞^2 (almeno) la cui curva caratteristica generica (comune a due superficie del sistema fuori delle eventuali linee-base) sia irriducibile [23]). Tale condizione si citerà in seguito dicendo che la superficie considerata è *generica* entro a V.

Il numero q_2 apparisce dunque un carattere della varietà. Evidentemente trattasi di un invariante assoluto di fronte alle trasformazioni birazionali di V: lo chiameremo l'*irregolarità superficiale della varietà.*

Esso rappresenta anche il numero degli integrali semplici distinti di 1ª specie appartenenti alla varietà; e mediante q_2 si esprime pure la connessione lineare del continuo riemanniano a sei dimensioni che dà l'imagine reale di V. Tale connessione risulta eguale alla connessione lineare di una superficie generica della varietà, cioè a $2q_2 + 1$.

La connessione lineare di una superficie appartenente a V e dotata di punti multipli, si potrà valutare riguardando le singolarità come assegnate, oppure come virtualmente inesistenti. Si avranno in tal modo valori non sempre eguali. Così, se la superficie ha una linea doppia che si voglia considerare come inesistente, si dovrà imaginare ristabilita la connessione attraverso alle due falde incrociantisi lungo la linea doppia, in tal guisa che, camminando entro la superficie, esse possano riguardarsi come continuazione l'una dell'altra.

In questo modo la *connessione lineare virtuale* di una particolare superficie appartenente ad un sistema lineare (o più generalmente ad un sistema continuo), risulterà eguale alla connessione lineare effettiva della superficie generica, qualora si riguardino come inesistenti le *nuove* singolarità che quella particolar superficie sia venuta ad acquistare, rispetto alla superficie generica.

Si potrà similmente parlare di *connessione lineare (virtuale) di una superficie spezzata,* immaginandone stabilita la connessione lungo le curve comuni alle varie parti.

In virtù del teorema sopra ricordato di CASTELNUOVO-ENRIQUES, appena una superficie F sia composta da due parti F_1, F_2, di cui l'una, per es. F_1, sia generica, la

---

[23]) CASTELNUOVO et ENRIQUES, *Sur les intégrales simples de première espèce d'une surface ou d'une variété algébrique à plusieurs dimensions* [Annales Scientifiques de l'École Normale supérieure (Paris), 3ᵉ série, t. XXIII (1906), pp. 339-366].

connessione lineare di F risulterà eguale a $2q_2 + 1$. Infatti, se si escludono particolari posizioni di F_1 rispetto alla base del sistema lineare $|F_2|$, la curva comune ad F_1, F_2 (od una sua parte) sarà di grado > 0, e quindi [24]) ogni ciclo lineare di F_2 potrà ridursi, con deformazione continua, ad esser situato su quella curva. Ne deriva che i cicli lineari di F si ridurranno tutti ai cicli di F_1; tra questi, come sappiamo, ve ne sono tanti distinti, quanti sono quelli di V.

Le considerazioni precedenti permettono di arrivare alla nozione di *genere geometrico virtuale* di una superficie appartenente alla varietà V. S'intenderà con ciò la somma del genere aritmetico virtuale e dell'intero $\frac{r-1}{2}$, ove r denota la connessione lineare virtuale della superficie. Quando la superficie sia irriducibile e priva di singolarità accidentali, il genere geometrico virtuale coincide coll'effettivo.

La nozione di genere geometrico virtuale è resa utile sopratutto dal fatto ch'essa permette di esprimere *il genere geometrico del sistema lineare somma di due dati in funzione dei generi geometrici degli addendi.*

Se infatti si ha il sistema

$$|F| = |F_1 + F_2|,$$

colla sola condizione che una delle superficie F_1, F_2, per es. F_1, sia generica nel senso sopra precisato, la connessione lineare virtuale di F (= connessione effettiva, se F è irriducibile e priva di singolarità accidentali), sarà uguale a $2q_2 + 1$, e quanto ai generi aritmetici si avrà la relazione

$$p_a = p'_a + p''_a + \pi,$$

ove p_a, p'_a, p''_a sono i generi aritmetici virtuali di F, F_1, F_2 e π il genere virtuale della curva comune ad F_1, F_2, fuori della base assegnata pel sistema $|F|$.

Indicando con p_g, p'_g, p''_g i generi geometrici virtuali di F, F_1, F_2, verrà

$$p_g = p_a + q_2 = p'_a + q_2 + p''_a + \pi = p'_g + p''_a + \pi.$$

Similmente, se fosse generica F_2 si avrebbe

$$p_g = p'_a + p''_g + \pi.$$

15. *Ancora sul genere aritmetico virtuale di una varietà a tre dimensioni.* — Dobbiamo ora esporre varie considerazioni sul genere aritmetico d'una varietà, dirette a stabilire alcuni principii sui quali ci fonderemo per dimostrare l'uguaglianza tra i generi P_a, p_3 (n° 8).

a) Proponiamoci anzitutto di calcolare il genere p_3 di una varietà V (irriducibile o no) completa intersezione di $r-3$ forme, in funzione degli ordini $n_1, n_2, \ldots, n_{r-3}$ di queste forme e deduciamone l'espressione della postulazione $v(l)$ di V, in funzione di p_3.

---

[24]) Vedi il n° 2 della mia Nota: *Intorno al teorema d'*ABEL *sulle superficie algebriche ed alla riduzione a forma normale degl'integrali di* PICARD [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXI (1° semestre 1906), pp. 257-282].

Come si sa [25]) $v(l)$ è espressa dalla formola

$$(25)\quad \begin{cases} v(l) = \binom{l+r}{r} - \sum_i \binom{l-n_i+r}{r} \\ + \sum_{ik} \binom{l-n_i-n_k+r}{r} + \cdots + (-1)^{r-3} \binom{l-n_1-\cdots-n_{r-3}+r}{r}, \end{cases}$$

ove i sommatori si estendano alle combinazioni semplici di 1^a, 2^a, ... classe. D'altra parte si ha pure (n° 3)

$$v(l) = k_0 \binom{l+3}{3} + k_1 \binom{l+2}{2} + k_2(l+1) + k_3,$$

ove k_0, k_1, k_2, k_3 sono polinomii da determinarsi in $n_1, n_2, \ldots, n_{r-3}$. Risulta quindi

$$v(0) = k_0 + k_1 + k_2 + k_3 = 1 - \sum \binom{r-n_i}{r} + \sum \binom{r-n_i-n_k}{r} - \cdots,$$

cioè

$$p_3 = -(k_0 + k_1 + k_2 + k_3 - 1) = \sum \binom{r-n_i}{r} - \sum \binom{r-n_i-n_k}{r} + \cdots.$$

Mediante la formola

$$\binom{r-k}{r} = (-1)^r \binom{k-1}{r}$$

l'espressione di p_3 si trasforma immediatamente nella seguente

$$(26)\quad p_3 = \binom{N-1}{r} - \sum \binom{N-n_i-1}{r} + \sum \binom{N-n_i-n_k-1}{r} - \cdots + (-1)^r \sum \binom{n_i-1}{r},$$

ove si è posto $N = n_1 + \cdots + n_{r-3}$. Ora ricordiamo che se $\chi(l)$ denota la postulazione di V per *qualunque* valore di l — non soltanto per valori abbastanza grandi — si ha senz'altro $\chi(l) = v(l)$ quando $l \geqq N-r$. Pei valori inferiori di l, sussiste la stessa relazione, purchè nella (25) si pongano uguali a zero tutti quei simboli combinatori $\binom{k}{r}$ nei quali sia $k < r$ [26]).

In particolare per $l = N - r - 1 = s$, si ha quindi

$$\chi(s) = \binom{N-1}{r} - \sum \binom{N-n_i-1}{r} + \cdots + (-1)^r \sum \binom{n_i-1}{r},$$

la quale, confrontata colla (26), porge

$$(27)\quad p_3 = \chi(s).$$

Con un procedimento usato altra volta (n° 10) si ottiene la relazione

$$v(s+h) = \chi(s) + \chi_1(s+1) + \sum_{i=2}^{h} c(s+i),$$

ove $\chi_1(l)$ denota la postulazione della sezione iperpiana C di V, per qualunque valore di l, mentre $c(l)$ denota la postulazione di C per l abbastanza grande ($\geqq N-r+1$).

[25]) Loc. cit. [6]), § 1.

[26]) Loc. cit. [6]), § 1.

D'altronde, con un calcolo analogo a quello del n° 10, si trova

$$\chi_1(s+1)+\sum_{i=2}^{h} c(s+i)=p_a^{(h)},$$

ove $p_a^{(h)}$ è il genere aritmetico virtuale di una hC; ne deriva, in forza della (27), che

$$v(s+h)=p_a^{(h)}+p_3. \tag{28}$$

b) Sia W una varietà priva di punti multipli nello S_r e W' l'ulteriore intersezione di $r-3$ forme generiche degli ordini $n_1, n_2, \ldots, n_{r-3}$, condotte per W; sia inoltre Φ la superficie comune a W, W'.

Diciamo p_3, p'_3 i generi aritmetici di W, W' secondo la prima definizione (n° 4) e P_a, P'_a i generi aritmetici corrispondenti alla seconda definizione (n° 8).

Dimostreremo che

$$p_3+p'_3=P_a+P'_a.$$

Indichiamo con:

$\bar{p}_3$ il genere aritmetico secondo il n° 4, della varietà $V=W+W'$;

ϖ_a il genere aritmetico di Φ;

$p_a^{(h)}$, $p_a'^{(h)}$ i generi aritmetici delle sezioni rispettive di W, W' con una forma generica d'ordine h;

p_h il genere della curva segnata su Φ dalla forma stessa.

Se h è abbastanza grande, alle forme d'ordine $s+h$ $(s=n_1+\cdots+n_{r-3}-r-1)$ la Φ presenta $p_h+\varpi_a$ condizioni (n° 10). Le forme d'ordine $s+h$ per Φ segnano altrove su W un sistema completo di dimensione $p_a^{(h)}-1+P_a$ (n° 10), onde ad esse la W presenta $p_a^{(h)}+P_a$ condizioni. Ne deriva che W presenta complessivamente

$$p_h+\varpi_a+p_a^{(h)}+P_a$$

condizioni alle forme d'ordine $s+h$ dello spazio.

Le forme d'ordine $s+h$ per W, segnano su W', fuori di Φ, un sistema completo di dimensione $p_a'^{(h)}-1+P'_a$; onde ad esse la W' presenta $p_a'^{(h)}+P'_a$ condizioni, e quindi la $W+W'$ presenterà

$$p_h+\varpi_a+p_a^{(h)}+P_a+p_a'^{(h)}+P'_a$$

condizioni alle forme d'ordine $s+h$ dello spazio. Potremo scrivere pertanto

$$v(s+h)=p_h+\varpi_a+p_a^{(h)}+P_a+p_a'^{(h)}+P'_a.$$

In virtù della (28) si ha

$$v(s+h)=(p_a^{(h)}+p_a'^{(h)}+p_h)+\bar{p}_3.$$

Quest'espressione confrontata colla precedente, dà

$$\bar{p}_3=P_a+P'_a+\varpi_a.$$

D'altronde (n° 5)

$$\bar{p}_3=p_3+p'_3+\varpi_a,$$

dunque

$$p_3+p'_3=P_a+P'_a. \tag{29}$$

16. ***Uguaglianza dei due generi aritmetici p_3, P_a. — Forma definitiva della relazione***

fondamentale. — Conserviamo le notazioni del n° prec. *b*) relativamente alle due varietà W, W', che insieme costituiscono la completa intersezione di $r - 3$ forme; e indichiamo inoltre con P_g, P'_g i generi geometrici delle W, W' e con ϖ_g il genere geometrico di Φ.

Come altra volta abbiamo notato, le forme d'ordine $s (= \sum n_i - r - 1)$ segnano su Φ curve del sistema canonico, ma non necessariamente il sistema canonico completo. Diciamo pertanto ε la deficienza del sistema segnato su Φ dalle suddette forme.

Alle forme d'ordine s la Φ impone $\varpi_g - \varepsilon$ condizioni: a quelle che già passano per Φ la W impone P_g condizioni, perchè esse segnano su W il sistema canonico completo. Onde la W imporrà $\varpi_g - \varepsilon + P_g$ condizioni alle forme d'ordine s dello spazio.

Poichè le forme d'ordine s per W, segnano su W' il sistema canonico completo, si conclude che la $W + W'$ presenta

$$P_g + P'_g + \varpi_g - \varepsilon$$

condizioni alle forme d'ordine s dello spazio.

D'altra parte [formola (27)] la $W + W'$ presenta alle forme d'ordine s un numero di condizioni eguale al proprio genere aritmetico virtuale, dunque:

$$P_g + P'_g + \varpi_g - \varepsilon = p_3 + p'_3 + \varpi_a.$$

Ne deriva che

$$\varepsilon = (\varpi_g - \varpi_a) + (P_g - p_3) + (P'_g - p'_3), \tag{30}$$

od anche [formola (29)]:

$$\varepsilon = (\varpi_g - \varpi_a) + (P_g - P_a) + (P'_g - P'_a). \tag{31}$$

Si ricordi ora (n° 10) che, se si parte dalla W e si suppongono condotte per essa $r - 3$ forme generiche di ordini abbastanza alti, la dimensione del sistema completo $|\Phi'|$ aggiunto a $|\Phi|$, segnato su W dalle forme d'ordine s, è espressa da [formola (18)]:

$$w(s) - 1 = \varpi_a - 1 + P_a;$$

cosicchè, indicando sempre con ε la deficienza del sistema segnato da $|\Phi'|$ su $|\Phi|$, la dimensione del sistema canonico $|\Phi' - \Phi|$ della varietà W, sarà data da

$$P_g - 1 = (\varpi_a - 1 + P_a) - (\varpi_g - 1 - \varepsilon) - 1,$$

donde si trae

$$\varepsilon = (\varpi_g - \varpi_a) + (P_g - P_a). \tag{32}$$

Questa relazione confrontata colla (31) prova che *quando gli ordini n delle forme condotte per W, sieno abbastanza alti, si può ritenere che la varietà W', ulteriore intersezione, abbia i generi P'_g, P'_a tra loro eguali.*

Si tenga ora conto del fatto che la deficienza della serie (canonica) segata sulla sezione iperpiana di Φ dalle forme d'ordine $s + 1$, è uguale alla somma delle irregolarità superficiali di W, W' [27]). Si può supporre le n così elevate, che il sistema segato

[27]) Loc. cit. [6]), n° 26.

sulla sezione iperpiana di W dalle forme d'ordine $s+1$, sia regolare, cioè che la serie segnata sulla sezione iperpiana di Φ abbia la deficienza uguale all'irregolarità superficiale di W: la sezione iperpiana di W' risulterà allora regolare. In altri termini: *quando le n sieno assai grandi, l'irregolarità superficiale di W' è nulla.*

Ciò premesso, ammettiamo di aver dimostrato che « per una varietà d'irregolarità superficiale nulla, sussiste la disuguaglianza

$$P_g \geqq p_3 ».$$

Allora per una varietà W d'irregolarità superficiale nulla e avente $P_g = P_a$, si stabilisce subito la relazione $P_a = p_3$.

Infatti, per una tale W la (32) dà $\varepsilon = 0$, perchè non soltanto $P_g - P_a = 0$, ma anche $\varpi_g - \varpi_a = 0$ (giacchè la Φ può variare su W in un sistema di dimensione grande quanto si vuole a curve caratteristiche irriducibili). La (30) riducesi perciò alla

$$(P_g - p_3) + (P'_g - p'_3) = 0,$$

dalla quale, essendo le W, W' d'irregolarità superficiale nulla e risultando quindi $P_g - p_3 \geqq 0$, $P'_g - p'_3 \geqq 0$, segue:

$$P_g = p_3, \qquad P'_g = p'_3.$$

Si dimostra infine per una varietà qualunque che:

I due generi aritmetici p_3, P_a sono eguali.

Infatti, se W è una varietà qualunque, si può sempre supporre (scegliendo abbastanza grandi le n) che la W' abbia l'irregolarità nulla e che inoltre sia

$$P'_g = P'_a = p'_3.$$

In forza della relazione (29) ne segue allora, anche per W:

$$P_a = p_3, \qquad \text{C. D. D.}$$

Per completare la dimostrazione, ci resta da provare la disuguaglianza $P_g \geqq p_3$, tra il genere geometrico ed il genere aritmetico p_3 d'una varietà d'irregolarità nulla.

Tale proprietà sarà stabilita in seguito (n° 19).

Ammesso ciò, la relazione (24) si trasforma nella

$$2P_a = \Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2 + 4, \tag{33}$$

e si può enunciare il teorema seguente:

VI) *Il genere aritmetico d'una varietà a tre dimensioni si esprime in funzione dei caratteri virtuali Ω_0, Ω_1, Ω_2 del sistema canonico, mediante la relazione fondamentale* (33).

Il teorema di Riemann-Roch sopra una varietà a tre dimensioni. Invarianza del genere aritmetico. Relazioni tra certe deficienze e le irregolarità della varietà.

17. *Sistemi continui completi sopra una varietà a tre dimensioni.* — Il teorema dimostrato da ENRIQUES [28]) per i sistemi algebrici completi di curve sopra una superficie,

[28]) *Sulla proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari* [Rendiconto delle sessioni della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, nuova Serie, vol. IX (1904-1905), pp. 5-13].

che cioè tali sistemi hanno la serie caratteristica completa, si estende alle varietà a tre (ed anche a più) dimensioni.

VII) *Sopra una varietà V un sistema algebrico completo di superficie irriducibili, ha il sistema caratteristico completo.*

Per sistema caratteristico si deve intendere il sistema lineare segnato sopra una superficie generica del sistema dato $\{F\}$, da quelle F che le sono infinitamente vicine [29]).

La dimostrazione da me data altrove [30]) per le superficie si estende immediatamente alle varietà. Basta profittare del principio che una superficie variabile con continuità sulla V, non può spezzarsi senza acquistare *nuove* linee doppie; il qual principio si riduce all'analogo, enunciato da ENRIQUES per le curve, mediante la sezione con un iperpiano. Occorrerà pure per la dimostrazione, che omettiamo di esporre diffusamente, tener presente il teorema del n° 2 di questa Memoria.

Nel seguito indicheremo con F^2 una curva caratteristica del sistema $|F|$ — fuori della base assegnata — e con F^3 un gruppo caratteristico del sistema $|F|$, cioè un gruppo della serie caratteristica segnata sopra una F^2 dalle F — sempre fuori della base assegnata.

Analoghe notazioni si useranno pei sistemi non lineari.

Dal teorema VII si deduce immediatamente che:

VIII) *La deficienza δ_2 del sistema caratteristico $|F^2|$ di un sistema lineare irriducibile $|F|$, non supera l'irregolarità superficiale q_2 della varietà e vi son sistemi per cui il limite superiore è raggiunto.*

Basta ricordare [31]) che sulla V ogni sistema lineare $|F|$ appartiene ad un sistema continuo (completo) formato da ∞^i sistemi lineari distinti, con $i \leqq q_2$; e che vi sono sistemi per cui $i = q_2$.

Detta r la dimensione del sistema caratteristico *completo* di $|F|$, sarà $r + 1 - \delta_2$ la dimensione di $|F|$; mentre la dimensione del sistema continuo completo $\{F\}$ risulterà uguale a $\rho + i$, ove ρ è la dimensione di un *generico* sistema lineare contenuto in $\{F\}$.

Pel Teorema VII sarà dunque

$$r = \rho + i - 1.$$

D'altra parte la dimensione del *particolare* sistema $|F|$ di $\{F\}$ non può essere inferiore a ρ; onde

$$r - i + 1 \leqq r + 1 - \delta_2,$$

cioè

$$\delta_2 \leqq i \leqq q_2.$$

Se poi si prende un sistema continuo $\{F\}$ per cui $i = q_2$, e si considera entro

---

[29]) Vedi SEVERI, *Osservazioni sui sistemi continui di curve appartenenti ad una superficie algebrica* [Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, t. XXXIX (1903-1904), pp. 490-506].

[30]) *Intorno alla costruzione dei sistemi completi non lineari che appartengono ad una superficie irregolare* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XX (1905), pp. 93-96].

[31]) CASTELNUOVO-ENRIQUES, loc. cit. [23]), pag. 360.

$\{F\}$ un generico sistema lineare, per questo si avrà

$$\delta_2 = i = q_2 .$$

Ne deriva che « sopra una varietà d'irregolarità superficiale nulla, ogni sistema lineare « ha il sistema caratteristico completo » [32]).

18. ***Lemma sulla completezza del sistema segnato dal sistema canonico di V, o da un sistema aggiunto, sopra certe superficie della varietà.*** — Sulla V, d'ordine n, che supponiamo immersa nello S_4 e dotata di singolarità ordinarie, consideriamo una superficie F (irriducibile o no) e conduciamo per F una forma S d'ordine l, che segni ulteriormente su V una superficie irriducibile K dotata di singolarità ordinarie (linea doppia e punti tripli) nei punti ove S interseca (fuori di F) la superficie doppia M di V.

Le forme d'un ordine arbitrario passanti per F e per la linea doppia di K (e quindi doppiamente pei suoi punti tripli) segnano su K — fuori delle linee fisse — un sistema completo [33]).

D'altra parte appena l'ordine l di S sia maggiore di $n - 5$, ogni forma d'ordine $n - 5$ passante per F e per la linea doppia di K, contiene una curva di M (o di ogni parte di M, qualora M sia irriducibile) di ordine più elevato di quanto nol consenta il teorema di Bezout; e quindi quella forma d'ordine $n - 5$ contiene di conseguenza M.

In breve: « Se $l > n - 5$, ogni forma d'ordine $n - 5$ aggiunta a K è di con- « seguenza aggiunta a V, cioè le forme d'ordine $n - 5$ aggiunte a V e passanti per « la superficie F, segnano su K, fuori delle linee fisse, un sistema completo ». In particolare, quando non esistano forme d'ordine $n - 5$ aggiunte a V (cioè sia $P_g = 0$), si dovrà dire che « il sistema segnato su K dalle forme d'ordine l, è non speciale ».

Un altro lemma che ci occorrerà più tardi è il seguente:

« Il sistema aggiunto $|F'|$ ad una superficie qualunque F della varietà V, stacca « un sistema lineare completo sulla sezione T di V con una forma generica S' d'ordine « l', abbastanza alto ».

Diciamo ancora K l'ulteriore intersezione di V con una forma S di un ordine

---

32) Cfr. Rosati, *Sugli spazi normali delle varietà algebriche* [Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, t. LXVIII (1908), Parte IIª, pp. 75-84], ov'è dimostrato il seguente teorema che contiene quello del testo: Dato un sistema lineare $|F|$ a curve caratteristiche irriducibili, suppongasi che il sistema *completo* $|F^2|$ individuato su F da una curva caratteristica, abbia la serie caratteristica completa: allora $|F|$ sega su F un sistema completo. Nell'ordine d'idee del testo, per via più semplice, ma meno elementare di quella del Rosati, il teorema stesso si può dimostrare così: Le superficie del sistema continuo completo $\{F\}$ debbono staccare su una F curve equivalenti, perchè altrimenti il sistema caratteristico *completo* $|F^2|$ di $|F|$ sarebbe contenuto in un sistema continuo più ampio e non avrebbe la serie caratteristica completa. Ne deriva {vedi la mia Nota: *Osservazioni varie di geometria sopra una superficie algebrica e sopra una varietà* [Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, t. LXV (1905-1906), Parte IIª, pp. 625-643]} che due superficie di $\{F\}$ sono equivalenti, cioè che $\{F\}$ è lineare. In virtù del Teorema VII ne segue l'asserto. La cosa estendesi subito alle varietà superiori.

33) Lettera citata [7]), n° 3.

fissato l condotta per F. Il sistema $|F'|$ è segnato allora su V dalle forme aggiunte d'ordine $l + n - 5$ passanti per K.

Le forme d'un ordine arbitrario passanti per la linea doppia di T (che è l'intersezione D' di S' colla superficie doppia M), e per la linea E' comune a T e a K, staccano altrove su T un sistema completo. Ora si può supporre l' tanto grande, che le forme d'ordine $l + n - 5$ passanti per D' ed E', contengano di conseguenza M e K: da ciò segue l'asserto.

19. ***Irregolarità tridimensionale. — Sua relazione colla sovrabbondanza e colla deficienza del sistema caratteristico di un multiplo delle sezioni iperpiane.*** — La differenza tra il genere geometrico P_g e il genere aritmetico P_a (o p_3) di una varietà V a tre dimensioni, verrà chiamata l'*irregolarità tridimensionale* q_1 di V.

In questo n° troveremo una relazione tra l'irregolarità q_1, la sovrabbondanza s_h e la deficienza δ_h del sistema caratteristico di un multiplo $|hC|$ del sistema $|C|$ delle sezioni iperpiane di V. A tale scopo profitteremo soltanto della prima definizione data pel genere aritmetico (cioè prenderemo $q_1 = P_g - p_3$ senza preoccuparci affatto del genere P_a). Ne dedurremo che *una varietà d'irregolarità superficiale nulla, ha l'irregolarità tridimensionale non negativa* ($P_g \geqq p_3$).

Con ciò resterà completata la dimostrazione esposta al n° 16 per stabilire l'uguaglianza tra i due generi aritmetici P_a, p_3.

Ed ecco ora il teorema che vogliamo dimostrare:

IX) *Sieno rispettivamente* s_h, δ_h *la sovrabbondanza e la deficienza del sistema caratteristico di* $|hC|$, *ove* h *è un intero positivo abbastanza grande e* C *una sezione iperpiana della varietà* V *d'irregolarità tridimensionale* q_1: *sussiste allora la relazione*

$$s_h = \delta_h + q_1.$$

Infatti si può scegliere h così grande, che il sistema $|hC|$ risulti non speciale e che inoltre il sistema lineare di dimensione $P_g - 1$, segnato sopra una hC dal sistema canonico di V, sia completo (n° prec.); in tal guisa che l'indice di specialità del sistema caratteristico di $|hC|$ risulterà uguale a P_g.

Indicando come al n° 11, con $n_0^{(h)}$, $n_1^{(h)}$, $n_2^{(h)}$ il grado, il genere curvilineo ed il genere aritmetico del sistema $|hC|$ di dimensione R_h, verrà dunque, in base al teorema di RIEMANN-ROCH sulle superficie

$$R_h = n_0^{(h)} - n_1^{(h)} + n_2^{(h)} - P_g + 2 + s_h - \delta_h.$$

D'altronde (n° 11)

$$R_h = n_0^{(h)} - n_1^{(h)} + n_2^{(h)} - p_3 + 2;$$

dunque avremo

$$s_h = \delta_h + P_g - p_3, \qquad \text{C. D. D.}$$

Quando V abbia l'irregolarità superficiale nulla, sarà $\delta_h = 0$ (n° 17) e quindi risulterà

$$P_g - p_3 = s_h \geqq 0.$$

D'ora in poi il genere aritmetico d'una varietà, verrà denotato esclusivamente con P_a.

20. ***Limite superiore per la deficienza del sistema (canonico) segnato sopra una superficie della varietà V dal proprio sistema aggiunto. — Invarianza del genere aritmetico di V.*** —

Per dimostrare che il genere P_a è un invariante assoluto di fronte alle trasformazioni birazionali della varietà, ci occorreranno due lemmi, di cui passiamo ad occuparci.

LEMMA I.—Sulla V abbiasi il sistema $|E|$ somma dei due sistemi lineari irriducibili $|F|$, $|G|$, e si supponga che il sistema $|E'|$, aggiunto ad $|E|$, stacchi sopra una F un sistema completo. Allora la deficienza δ_1 del sistema (canonico) segnato sopra F dal sistema aggiunto $|F'|$, non supera la deficienza δ_2 del sistema segnato sopra G da $|G'|$.

S'indichino infatti con R, r_1, r_2 le dimensioni rispettive dei sistemi $|E'|$, $|F'|$, $|G'|$, con P_g il genere geometrico di V e con ε il numero delle condizioni che la curva C comune ad una F e ad una G fissate, impone alle superficie E' che debbono contenerla.

La dimensione s_1 del sistema canonico completo di F, si esprime subito in funzione di r_1, δ_1, P_g: basta tener presente che le superficie F' che contengono come parte F formano un sistema ∞^{P_g-1}. Si trae così

$$s_1 = r_1 - P_g + \delta_1. \tag{34}$$

Similmente, la dimensione s_2 del sistema canonico completo di G verrà espressa da

$$s_2 = r_2 - P_g + \delta_2. \tag{35}$$

Ciò premesso, si osservi che, essendo

$$|E'| = |F' + G| = |F + G'|$$

il sistema, per ipotesi completo, segnato da $|E'|$ sulla superficie F, è aggiunto alle curve C, e quindi che le superficie E' passanti per C, segano altrove su F il sistema canonico completo (non depurato dalle eventuali curve eccezionali). Se poi si tien conto del fatto che le E' contenenti F lasciano per residuo superficie G', si ottiene la relazione

$$s_1 = R - \varepsilon - r_2 - 1,$$

la quale, confrontata colla (34), porge

$$\delta_1 = R - r_1 - r_2 - \varepsilon + P_g - 1. \tag{36}$$

Similmente, le superficie E' per C segnano altrove su G curve del sistema canonico, ma non si può affermare che queste sezioni formino il sistema canonico completo. Ne deriva che

$$s_2 \geqq R - \varepsilon - r_1 - 1,$$

la quale, confrontata colla (35), dà

$$\delta_2 \geqq R - r_1 - r_2 - \varepsilon + P_g - 1,$$

ossia, in forza della (36),

$$\delta_2 \geqq \delta_1, \qquad \text{C. D. D.}$$

LEMMA II.—Sopra una superficie irriducibile F abbiasi un sistema lineare $|C|$, irriducibile e privo di punti base (anche non completo), e sia $|A|$ un tal sistema regolare (completo) che seghi su C una serie completa non speciale, la quale contenga la serie caratteristica di C e lasci come residuo una serie non speciale: allora il minimo sistema $|A + C|$, contenente parzialmente $|A|$ e $|C|$, è completo (e regolare).

Ciò deriva facilmente da una proposizione nota per le serie lineari sopra una

curva [34]). In base alla proposizione cui alludiamo, si può infatti concludere che è completa (non speciale) la minima serie lineare contenente ogni gruppo formato da un gruppo della serie completa $|AC|$, segnata da $|A|$ su C, e da un gruppo caratteristico del sistema $|C|$. Poichè questa serie minima è contenuta nella (o coincide colla) serie segnata su C dal sistema minimo $|A+C|$, così ne segue che questo sistema segna su C una serie completa non speciale $|A+C, C|$. Dicendo R la dimensione del sistema minimo $|A+C|$ ed r la dimensione della serie $|A+C, C|$, la dimensione ρ del sistema completo $|A|$ risulterà

$$\rho = R - r - 1.$$

Similmente, poichè il sistema completo $|A+C|$ di dimensione R_1, non può segnare su C una serie più ampia di quella che vi stacca il sistema minimo $|A+C|$, avremo

$$\rho = R_1 - r - 1,$$

cioè $R = R_1$; e quindi il sistema minimo $|A+C|$ sarà completo.

Si vede poi subito che questo sistema è regolare, perchè staccando da esso la curva C su cui $|A+C|$ segna una serie *completa non speciale,* si deve ottenere come residuo un sistema regolare. — Così è dimostrato anche il 2° lemma.

Supponiamo ora che la V sia immersa nello S_d e che ivi sia priva di singolarità. Diciamo F una superficie irriducibile e priva di punti multipli, su essa tracciata; e indichiamo infine con M una sezione iperpiana di V.

Le curve aggiunte C ad un multiplo assai elevato (diciamo secondo il numero h) di una sezione iperpiana di F, sono irriducibili e prive di punti multipli. Ciò risulta o dall'applicazione di un teorema dimostrato da CASTELNUOVO [35]), od anche dalla costruzione delle C mediante le forme aggiunte alla superficie F [36]).

Si consideri ora entro V il sistema $|hM+F'|$, ove $|F'|$ è il sistema aggiunto ad F, e si osservi ch'esso sega su F un sistema non necessariamente completo, formato da curve C: lo indicheremo con $|C|$.

Scegliendo un intero k assai grande, si può ottenere che le forme d'ordine k stacchino su F un sistema completo regolare $|A|$, il quale soddisfi, rispetto a $|C|$, alle ipotesi del Lemma II: ne segue che il minimo sistema $|A+C|$ è completo, cioè che è completo il sistema segnato su F da $|(h+k)M+F'|$, che è poi l'aggiunto al sistema $|(h+k)M+F| = |E|$. Applicando allora il Lemma I si concluderà che la deficienza δ_1 del sistema segato su F da $|F'|$, non supera la deficienza δ_2 del sistema segato da $|G'|$ su G, ove si è posto $|G| = |(h+k)M|$. Ora quest'ultima deficienza si può valutare facilmente.

Detta ρ_l la dimensione di $|G'|$ (ove $l = h+k$), dalla formola (15) (n° 9) si trae

---

34) Cfr. CASTELNUOVO, *Alcune proprietà fondamentali dei sistemi lineari di curve tracciati sopra una superficie algebrica* [Annali di Matematica pura ed applicata, s. II, t. XXV (1897), pp. 235-318], n° 43.

35) CASTELNUOVO, loc. cit. [34]), n° 41.

36) SEVERI, loc. cit. [6]), § 6.

infatti

$$\rho_l = p_a^{(l)} - 1 + P_a,$$

ove $p_a^{(l)}$ è il genere aritmetico di G.

D'altra parte, indicando con $p_g^{(l)}$ il genere geometrico di G e tenendo conto che G' sega su G un sistema canonico di dimensione $p_g^{(l)} - 1 - \delta_2$, si trova subito

$$\rho_l = p_g^{(l)} - 1 + P_g - \delta_2,$$

la quale, confrontata colla precedente, porge

$$\delta_2 = (P_g - P_a) + (p_g^{(l)} - p_a^{(l)}) = q_1 + q_2.$$

Ne deriva che

$$\delta_1 \leqq q_1 + q_2,$$

e si può enunciare il seguente teorema:

X) *La deficienza del sistema (canonico) segnato sopra una superficie della varietà V dal proprio sistema aggiunto, non supera la somma delle due irregolarità della varietà e vi sono superficie per cui il limite superiore è raggiunto.*

Osservazione. — Noi abbiamo dimostrato il teorema per una superficie F priva di singolarità; ma lo si può estendere facilmente anche ad una F dotata di singolarità, che si riguardino come assegnate colla loro molteplicità effettiva.

Il sistema aggiunto ad F si ottiene allora dal sistema $|F'|$, aggiunto alla F, considerata come virtualmente priva di punti multipli, imponendo alle F' la molteplicità $s - 1$ lungo ogni linea s-pla (ordinaria) di F e la molteplicità $r - 2$ in ogni punto r-plo (ordinario) di F.

La possibilità d'applicare il ragionamento precedente deriva da ciò che le forme d'ordine assai alto aggiunte ad F [37]), segano sulla superficie, fuori della base dipendente dall'aggiunzione, sistemi lineari completi.

Dal teorema X segue facilmente che:

XI) *Il genere aritmetico della varietà V è un invariante assoluto di fronte alle trasformazioni birazionali della varietà.*

Infatti $q_1 + q_2$ apparisce come il limite superiore (raggiungibile) delle deficienze δ_1 relative alle superficie irriducibili di V; poichè mediante una trasformazione birazionale della V, ai numeri δ_1 corrispondono numeri uguali di analoga definizione, ne segue che $q_1 + q_2$ si mantiene inalterato per le trasformazioni birazionali di V. E siccome tanto q_2 che P_g sono invarianti assoluti, anche

$$P_a = (q_2 + P_g) - (q_1 + q_2)$$

risulterà un invariante assoluto.

Osservazione.—In forza della relazione fondamentale (33), l'espressione $\Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2$ formata coi tre invarianti relativi a V, risulta pure un invariante assoluto [38]).

---

[37]) Cioè forme che segano sopra un iperpiano generico forme aggiunte alla curva sezione e che passano inoltre colla molteplicità $r - 2$ per ogni punto r-plo (necessariamente *proprio*, se V è priva di singolarità) della F.

[38]) Ciò è provato per via ben diversa dal Pannelli [loc. cit. [20]), *b*]. — La dimostrazione dell'invarianza del P_a si sarebbe dunque potuta poggiare anche sopra questo risultato del Pannelli.

21. *Il teorema di Riemann-Roch pei sistemi aggiunti.* — Al n° 9 abbiamo trovato la dimensione del sistema aggiunto ad un multiplo assai alto delle sezioni iperpiane di V; ora, mediante il Teorema X, possiamo trovare un limite inferiore per la dimensione del sistema aggiunto $|F'|$ ad una superficie F *generica* (n° 14) di generi p_g, p_a.

Indichiamo con ρ la dimensione di $|F'|$ ed osserviamo che $|F'|$ sega su F un sistema lineare (canonico) di dimensione $p_g - 1 - \delta$, ove δ è la deficienza del sistema stesso.

Pel teorema fondamentale dell'aggiunzione verrà

$$\rho - (p_g - 1 - \delta) - 1 = P_g - 1,$$

ossia

$$\rho = p_g - 1 + P_g - \delta.$$

E poichè

$$\delta \leqq q_1 + q_2,$$

avremo

$$\rho \geqq p_g - 1 + P_g - (p_g - p_a) - (P_g - P_a);$$

donde infine

$$\rho \geqq p_a - 1 + P_a. \tag{37}$$

Ricordando il Teorema V (n° 12), e la relazione fondamentale (33), si ottiene l'uguaglianza

$$n' - \pi' + p'_a = p_a + 2P_a - 3,$$

ove n', π', p'_a denotano i caratteri virtuali (grado, genere curvilineo, genere aritmetico) di F'. La (37) potrà perciò scriversi anche sotto la forma

$$\rho \geqq n' - \pi' + p'_a - P_a + 2. \tag{38}$$

Si può pertanto enunciare che:

XII) *La dimensione ρ del sistema $|F'|$, di caratteri virtuali n', π', p'_a, aggiunto alla superficie F di genere aritmetico p_a, soddisfa alla disuguaglianza* (37) *o* (38).

Allorchè nella (37) o (38) vale il segno $=$ (il che accade per es. quando trattasi dell'aggiunto a un multiplo assai alto delle sezioni iperpiane di V), si dirà che il sistema $|F'|$ è *regolare*. Se vale invece il segno $>$ la differenza tra il 1° membro e il 2° si chiamerà la *sovrabbondanza* del sistema $|F'|$.

Più in generale, diremo che è *regolare* ogni sistema lineare non speciale, di caratteri n, π, p_a la cui dimensione sia espressa da

$$n - \pi + p_a - P_a + 2.$$

Dalle formule che legano i caratteri di due sistemi ai caratteri della loro somma, si trae facilmente che *staccando da un sistema regolare $|F|$ una superficie G, su cui $|F|$ seghi un sistema completo regolare, si ha come residuo un sistema regolare.*

E viceversa, « se il sistema regolare $|F - G|$ sega su G un sistema regolare, si « può affermare la completezza di questo sistema, appena si sappia che $|F|$ è regolare ».

Osservazione. — Dal Teorema XII, ricordando il Teorema VIII, si può trarre che *la deficienza del sistema caratteristico di un multiplo assai elevato delle sezioni iperpiane di V, è precisamente uguale all'irregolarità superficiale q_2.*

Detta C una sezione iperpiana di V, e $\{G\}$ un sistema continuo completo costi-

tuito da ∞^{q_2} sistemi lineari irriducibili, almeno ∞^1 (n° 17), consideriamo infatti un multiplo $|E| = |k\,C|$ così elevato che sieno soddisfatte le condizioni seguenti:

a) Esso contenga parzialmente un sistema lineare $|G_0|$ fissato in $\{G\}$.

b) Il sistema residuo $|E - G_0|$ si possa considerare come l'aggiunto ad un sistema lineare irriducibile $|F|$, almeno ∞^2, a curva caratteristica irriducibile.

Allora ogni sistema lineare $|E - G_0 + G|$, ove $|G|$ è variabile in $\{G\}$, sarà aggiunto al sistema $|F + G|$, che risulterà pure irriducibile, almeno ∞^4, ed a curva caratteristica irriducibile. Onde per la dimensione r del sistema $|E - G_0 + G|$, avremo la disuguaglianza

$$r \geqq n - \pi + p_a - P_a + 2,$$

n, π, p_a essendo i caratteri virtuali del sistema stesso. Tali caratteri coincidono rispettivamente cogli analoghi di $|E|$, perchè al variare di $|G|$ il sistema $|E - G_0 + G|$ descrive un sistema continuo $\{E\}$ formato da ∞^{q_2} sistemi lineari distinti, tra i quali $|E|$.

La dimensione di $|E|$ è espressa da (n° 11)

$$r' = n - \pi + p_a - P_a + 2,$$

e quindi risulta

$$r \geqq r'.$$

D'altra parte, al variare del sistema che genera $\{E\}$, la dimensione r non può decrescere, dunque $r' \geqq r$. Si conclude che $r = r'$, e quindi che la dimensione del sistema continuo completo $\{E\}$ è espressa da

$$R = n - \pi + p_a - P_a + 2 + q_2 .$$

La deficienza del sistema $|E|$, che è data da $R - r$ (Teorema VII), risulterà pertanto uguale a q_2. C. D. D.

22. ***La somma delle deficienze dei sistemi segati sopra una superficie dagli aggiunti ai suoi multipli successivi.*** — Sulla V consideriamo una superficie irriducibile F, tale che il sistema lineare $|F|$, di caratteri virtuali n, π, p_a, e di genere geometrico p_g, sia almeno ∞^2 e a curva caratteristica irriducibile.

Il sistema $|hF + F'|$, aggiunto ad $|(h+1)F|$, ha la dimensione (n° 21)

$$\rho_h = \binom{h+1}{3}(n-1) + \binom{h+1}{2}\pi + (h+1)p_a + \binom{h}{3} - 1 + P_a + \varepsilon_h \quad (\varepsilon_h \geqq 0),$$

onde risulta

$$\rho_h - \rho_{h-1} - 1 = n\binom{h}{2} + h(\pi - 1) + p_a + \varepsilon_h - \varepsilon_{h-1}.$$

Ciò posto, si osservi che il sistema $|hF + F'|$ sega su F curve D aggiunte al multiplo secondo h di una curva caratteristica, e che questa può variare in un sistema lineare almeno ∞^1. In base ad un teorema di PICARD, da me esteso recentemente [39], si potrà allora concludere che il sistema $|D|$ è regolare. Indicando con δ_h la sua defi-

[39]) SEVERI, *Sulla regolarità del sistema aggiunto ad un sistema lineare di curve appartenente ad una superficie algebrica* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XVII, 2° semestre 1908, pp. 465-470].

cienza e con r_h la dimensione dello stesso sistema, risulterà:

$$r_h = n\binom{h}{2} + h(\pi - 1) + p_a - \delta_h.$$

Poichè

$$r_h = \rho_h - \rho_{h-1} - 1,$$

verrà infine:

$$\varepsilon_h + \delta_h = \varepsilon_{h-1}. \tag{39}$$

Questa relazione è valida per ogni valore di h a partire da $h = 1$ in poi; per $h = 0$ essa va sostituita colla seguente

$$\varepsilon_0 + \delta_0 = q_1 + q_2, \tag{40}$$

ove q_1, q_2 denotano le due irregolarità di V.

Infatti, se il sistema $|F'|$, di dimensione $p_a - 1 + P_a + \varepsilon_0$, sega su F un sistema (canonico) di deficienza δ_0, il sistema $|F' - F|$ avrà la dimensione

$$P_g - 1 = p_a - 1 + P_a + \varepsilon_0 - p_g + \delta_0,$$

donde si trae

$$\varepsilon_0 + \delta_0 = (P_g - P_a) + (p_g - p_a),$$

la quale coincide colla (40), perchè (n° 14) l'irregolarità di F è uguale all'irregolarità superficiale di V.

Scrivendo la (40) per $h = 1, 2, 3, 4, \ldots$ e sommando membro a membro da $h = 0$ fino ad $h = l$, si avrà

$$\varepsilon_l + \sum_{h=0}^{h=l} \delta_h = q_1 + q_2. \tag{41}$$

Da questa si trae anzitutto che delle δ maggiori di o non ve ne può essere che un numero finito, cioè che *il sistema aggiunto ad un multiplo assai elevato di un sistema irriducibile* $|F|$, *almeno* ∞^2, *a curva caratteristica irriducibile, sega sopra* F *un sistema lineare completo*. Questo risultato lo avevamo ottenuto incidentalmente in modo diverso al n° 20, per una superficie F priva di punti multipli.

Essendo, per l assai grande, $\delta_l = 0$, da un certo punto in poi la sovrabbondanza ε_l del sistema $|lF + F'|$, assumerà un valore costante ε, e in virtù della (41) si potrà enunciare il teorema seguente:

XIII) *Sopra una varietà V, di irregolarità q_1, q_2, la somma delle deficienze dei sistemi segati su di una superficie F, appartenente ad un sistema almeno ∞^2 a curva caratteristica irriducibile, dal sistema $|F'|$ e dagli aggiunti ai successivi multipli di $|F|$, uguaglia la somma $q_1 + q_2$, diminuita della sovrabbondanza costante che possiede il sistema $|(hF)'|$ per h assai grande.*

Tale sovrabbondanza costante sappiamo che è nulla in relazione ad un multiplo assai elevato delle sezioni iperpiane di una varietà priva di punti multipli o dotata al più (nello S_4) di singolarità ordinarie.

Osservazioni. — Sopra una superficie algebrica, il teorema analogo al teorema XIII è stato notevolmente precisato dal Picard e da me. Si può estendere alle varietà il risultato di Picard?

Si può cioè provare che se una superficie F soddisfa a certe condizioni di genericità (appartenere ad un sistema continuo o lineare convenientemente infinito, etc.), *il suo sistema aggiunto è regolare?*

Per estendere la dimostrazione di PICARD, occorrerebbero troppi elementi che per ora non si vede come trasportare alle varietà; per estendere la mia dimostrazione, bisogna anzitutto procurarsi un lemma analogo a quello su cui essa è poggiata.

Tale lemma si ottiene ovviamente. Il ragionamento è identico nella sostanza a quello sviluppato per le superficie e poggia sulla completezza del sistema lineare caratteristico di un sistema continuo completo di superficie appartenente ad una varietà (n° 17), nonchè sopra un noto criterio di equivalenza per le superficie di un sistema algebrico (irriducibile) [40].

Ecco il lemma cui alludo:

XIV) *Sia F una superficie atta a definire un sistema continuo almeno ∞^2, a curva caratteristica irriducibile, sopra una data varietà V, e $|G|$ un sistema lineare irriducibile che contenga parzialmente F. Allora il sistema lineare $|E| = |G - F|$ sega sulla generica superficie G un sistema lineare completo.*

Gli eventuali punti e linee base di $|G|$ debbono assegnarsi colla loro molteplicità effettiva.

Quando però coll'aiuto di questa proposizione si tenta di proseguire la dimostrazione, imitando il procedimento da me seguito per le superficie, s'intoppa in una difficoltà proveniente dal fatto che la specialità di un sistema lineare di curve sopra una superficie, non basta a caratterizzare la irregolarità del sistema stesso.

Non ho potuto risolvere la questione e la segnalo perciò all'attenzione del lettore.

23. ***La deficienza della serie segata sopra la curva caratteristica di un sistema lineare dal doppio del sistema lineare caratteristico.*** — Vogliamo ora stabilire una disuguaglianza tra la deficienza della serie segata dal sistema $|2H|$ sopra la curva caratteristica H di un sistema lineare $|F|$, e la somma delle irregolarità q_1, q_2 della nostra varietà V, che supponiamo al solito priva di singolarità in un iperspazio. A tal uopo converrà anzitutto estendere leggermente il Teorema IX (n° 19), dimostrando che « la differenza tra la so- « vrabbondanza σ e la deficienza δ del sistema lineare caratteristico di un sistema $|D|$, « ottenuto togliendo una superficie G, irriducibile e priva di singolarità, da un multiplo « abbastanza alto delle sezioni iperpiane di V, è uguale all'irregolarità tridimensionale q_1 ».

S'indichi con S una sezione iperpiana di V e si scelga un multiplo hS così elevato di quella sezione, che il sistema lineare

$$|D| = |hS - G|,$$

contenga il sistema canonico $|K|$ di V, e lasci come residuo un sistema lineare almeno ∞^2 a curva caratteristica irriducibile: allora in base al Teorema XIV si potrà affermare che $|K|$ sega sopra una D un sistema lineare completo.

---

[40]) SEVERI, *Osservazioni varie di geometria,* Nota citata [32]), n° 6.

Quando il genere geometrico di V è nullo (cioè quando $|K|$ manca), si dovrà invece dire che il sistema caratteristico di $|D|$ è non speciale.

A tale conclusione non si può pervenire coll'immediata applicazione del Teorema XIV, ma sibbene col ragionamento seguente:

Sia $|T|$ un sistema lineare di V, di cui esista l'aggiunto $|T'|$.

In base al Teorema XIV, si può scegliere h così elevato, che $|T'|$ seghi su una D il sistema *completo*

$$|T'D| = |D'D| - |DD| + |TD|,$$

ove con $T'D$ si è indicato la curva comune a T' e a D, etc.

Se il sistema $|D'D|$, che è il sistema canonico di D, contenesse la curva caratteristica DD, il sistema $|T'D|$ conterrebbe $|TD|$.

Ora, crescendo eventualmente h, si può fare in modo che la curva TD sia d'ordine maggiore della curva TT', in tal guisa che una superficie T' che contenga TD contenga di conseguenza T. Poichè $|T'|$ sega su D un sistema completo, se questo contenesse parzialmente $|TD|$, $|T'|$ conterrebbe $|T|$, cioè esisterebbe il sistema canonico di V, contro il supposto.

Dunque in ogni caso si può ritenere che l'indice di specialità del sistema $|DD|$, sia uguale al genere geometrico P_g di V.

Ciò premesso, si osservi che, per h assai grande, il sistema segato su V dalle forme d'ordine h è completo (n° 2) e regolare (n[i] 11 e 21), e che il sistema segato su G dalle stesse forme, è anch'esso completo e regolare. — Ne segue (n° 21) che è pur regolare il sistema $|D|$, cioè che la sua dimensione è espressa da

$$\rho = n - \pi + p_a - P_a + 2,$$

ove n, π, p_a sono i caratteri virtuali del sistema stesso.

D'altra parte applicando il teorema di RIEMANN-ROCH al sistema caratteristico $|DD|$, viene

$$\rho = n - \pi + p_a - P_g + 2 + \sigma - \delta,$$

la quale, confrontata colla precedente, dà

$$\sigma - \delta = P_g - P_a. \qquad \text{C. D. D.}$$

Dimostriamo ora il teorema:

XV) *Sulla varietà V, d'irregolarità q_1, q_2, sia $|F|$ un sistema lineare, almeno ∞^2, privo di punti base, a curva caratteristica irriducibile, e siano δ_1, δ_2 le deficienze rispettive della serie segata sopra una tale curva dal doppio del sistema caratteristico e del sistema segato sopra una F dal sistema canonico di V: sussiste allora la relazione:*

$$\delta_1 - \delta_2 \leqq q_1 + q_2,$$

e vi sono sistemi pei quali vale l'uguaglianza.

Per le ipotesi poste, la generica superficie F, come la generica superficie $G \equiv 2F$, sono irriducibili e prive di punti multipli; se pertanto con $|E|$ s'indica un multiplo abbastanza elevato delle sezioni iperpiane di V, al sistema $|D| = |E - G|$ si potrà, al momento opportuno, applicare il lemma precedente.

Ci sarà anche lecito di supporre che $|E|$ seghi un sistema regolare completo $|EF|$ sopra F ed una serie completa (non speciale) $|EH|$ sopra una curva caratteristica H (irriducibile e priva di punti multipli) della superficie F. Similmente si potrà esigere che il sistema $|M| = |E - F|$ seghi su F un sistema completo regolare $|MF|$. Abbiamo visto infatti nella dimostrazione del lemma, come si possa supporre che il sistema $|D| = |M - F|$ sia regolare; poichè la stessa supposizione può farsi per $|M|$, il sistema *regolare* $|MF|$ dovrà risultare completo (n° 21).

Ciò posto, indichiamo in modo generico con r_t la dimensione di un sistema lineare $|T|$, cosicchè r_d, r_e, ... denoteranno le dimensioni dei sistemi $|D|$, $|E|$, ...; e rappresentiamo inoltre con Γ il gruppo comune ad H e ad una D generica.

Calcoliamoci anzitutto la dimensione della serie completa $|EH|$.

La dimensione del sistema completo $|EF|$ è espressa da

$$r_e - r_m - 1;$$

la dimensione del sistema completo $|MF|$ è espressa da

$$r_m - r_d - 1;$$

poichè quest'ultimo sistema è residuo della curva H rispetto al sistema $|EF|$, sarà

$$r_e - r_m - 1 - (r_m - r_d - 1) - 1 = r_e - 2r_m + r_d - 1$$

la dimensione della serie $|EH|$.

Ne deriva che la serie segata da $|2H|$ su H, allorchè sia completata, avrà la dimensione

$$r_e - 2r_m + r_d - 1 - \varepsilon,$$

ε denotando il numero delle condizioni che il gruppo Γ presenta alle E obbligate a contenerlo.

Calcoliamo ora la dimensione della serie g, segata su H dal sistema completo doppio $|2H|$. A tal uopo indichiamo con δ'_1 la deficienza del sistema segato da $|G|$ su F — sistema contenuto totalmente in $|2H|$ — e con δ'_2 la deficienza del sistema caratteristico di F.

Poichè il sistema $|GF|$ ha la dimensione $r_g - r_f - 1$, sarà

$$r_g - r_f - 1 + \delta'_1$$

la dimensione del sistema completo $|2H|$, e similmente sarà $r_f - 1 + \delta'_2$, la dimensione del sistema completo $|H|$. Onde la dimensione di g risulterà uguale a

$$r_g - r_f - 1 + \delta'_1 - (r_f - 1 + \delta'_2) - 1 = r_g - 2r_f + \delta'_1 - \delta'_2 - 1;$$

e quindi la deficienza δ_1 della serie g, contenuta totalmente nella serie segata su H dalle E per Γ, sarà data da

$$(42) \qquad \begin{cases} \delta_1 = (r_e - 2r_m + r_d - 1 - \varepsilon) - (r_g - 2r_f + \delta'_1 - \delta'_2 - 1) \\ \quad = r_e - 2r_m + 2r_f + r_d - r_g + \delta'_2 - \delta'_1 - \varepsilon. \end{cases}$$

Indichiamo ora con L la curva segata su F dalla D che stacca sopra H il gruppo Γ: la serie segnata su L dalle E per Γ, conterrà totalmente quella, $|ML|$, segata su L

da $|M|$, e quindi la deficienza δ' di quest'ultima serie, sarà almeno uguale alla differenza tra la dimensione della prima e la dimensione della seconda. — Vediamo di calcolare anzitutto la dimensione della serie $|EL|$ segata su L da $|E|$. A tal uopo cerchiamo quante sono le E passanti per L. Tali superficie segnano su F, fuori di L, il sistema *completo* $|2H|$, e, toltone F, lasciano come residuo il sistema $|M|$; onde esse formano un sistema di dimensione

$$r_g - r_f + r_m + \delta'_1.$$

La serie $|EL|$ ha pertanto la dimensione

$$r_e - r_g + r_f - r_m - \delta'_1 - 1,$$

e quindi la serie segata su L dalle E per Γ, avrà la dimensione

$$r_e - r_g + r_f - r_m - \delta'_1 - \varepsilon - 1.$$

Calcoliamo adesso la dimensione della serie $|ML|$ e perciò cominciamo, al solito, a trovare quante M passano per L. Tali superficie segano altrove su F il sistema caratteristico completo, e, toltone F, lasciano come residuo il sistema $|D|$; onde esse formano un sistema di dimensione

$$r_f + r_d + \delta'_2,$$

e la dimensione della serie $|ML|$ risulterà quindi uguale a

$$r_m - r_f - r_d - \delta'_2 - 1.$$

Avremo dunque

$$\delta' \geqq r_e - 2r_m + 2r_f - r_g + r_d + \delta'_2 - \delta'_1 - \varepsilon,$$

la quale, confrontata colla (42), porge

$$\delta' \geqq \delta_1. \tag{43}$$

Ciò premesso, si osservi che, avendo scelto sufficientemente elevato il multiplo $|E|$, si può supporre che il sistema lineare $|L|$ tracciato sulla F, contenga le curve (NF) segate su F dalle superficie canoniche N di V, e lasci come residuo un sistema lineare irriducibile almeno ∞^1: allora [41]) la serie segata su L dal sistema $|NF|$, completato ove occorra, sarà completa. Ne deriva che l'indice di specialità della serie segata su L dal sistema $|M|$, risulterà uguale a $P_g + \delta_2 - i$, P_g essendo il genere geometrico di V ed i il numero delle superficie N indipendenti che passano per L. Si osservi subito che i non è che l'indice di specialità di F, perchè l'ordine di L essendo abbastanza alto, ogni N per la curva L contiene di conseguenza la superficie F.

Quando sia $P_g = 0$, la serie $|ML|$ risulta non speciale: tale fatto si stabilisce con un ragionamento del tipo di quello sviluppato, in circostanze analoghe, nella dimostrazione del lemma.

Fissiamo ora l'attenzione sulla superficie D, che stacca la curva L, e su tale superficie consideriamo il sistema completo individuato da una curva caratteristica (DD) e il sistema completo individuato da una (MD). Teniamo inoltre presente che il sistema

---

[41]) SEVERI, loc. cit. [39]).

canonico $|N|$ sega su D un sistema *completo* $|K|$, di dimensione $P_g - 1$, residuo della curva (DD) rispetto al sistema canonico della D.

Dico che il sistema $|MD|$ ha lo stesso indice di specialità i del sistema $|F|$. Infatti, essendo

$$(MD) \equiv (DD) + L$$

il sistema residuo di (MD) rispetto al sistema canonico della superficie D, coincide con $|K - L|$, e d'altra parte questo sistema è segato su D dal sistema $|N - F|$, perchè, come abbiamo osservato, ogni N per L contiene F.

Dicendo σ la sovrabbondanza del sistema $|MD|$, il quale sega su L una serie di deficienza δ' e d'indice di specialità $P_g + \delta_2 - i$, l'irregolarità del sistema

$$|DD| = |(MD) - L|$$

risulterà uguale a [42])

$$\sigma - i + \delta' - (P_g + \delta_2 - i) = \sigma + \delta' - \delta_2 - P_g,$$

e poichè l'indice di specialità di $|DD|$ è uguale a P_g, $\sigma + \delta' - \delta_2$ sarà la sovrabbondanza del sistema stesso.

Applicando il lemma, e ricordando (n° 17) che la deficienza δ del sistema caratteristico di $|D|$ non supera l'irregolarità superficiale q_2, si ottiene la disuguaglianza

$$\sigma + \delta' - \delta_2 \leqq q_1 + q_2,$$

e quindi a fortiori

$$\delta' \leqq \delta_2 + q_1 + q_2.$$

Confrontando infine colla (43), si giunge alla conclusione

$$\delta_1 - \delta_2 \leqq q_1 + q_2.$$

Ci resta ora da provare che esistono sistemi per cui vale il segno $=$. Dimostriamo che l'*uguaglianza vale pei multipli assai elevati delle sezioni iperpiane di V.*

Consideriamo a tale uopo un multiplo $|E|$ così elevato delle sezioni iperpiane di V — la quale, ricordiamoci, è priva di punti multipli — che sieno soddisfatte le condizioni seguenti:

1ª Il sistema $|E|$ e i multipli successivi sieno regolari (n° 11).

2ª Il sistema $|E|$ possa considerarsi come l'aggiunto di un sistema irriducibile $|L|$, di dimensione sufficientemente ampia.

3ª La serie segata dal sistema canonico $|N|$ di V sopra una curva caratteristica (EE), sia completa [se non esiste $|N|$ la serie segata da $|2E|$ su (EE) sia non speciale].

Occupiamoci della 3ª condizione, poichè siamo ormai in grado di ritenere senz'altro soddisfatte le prime due.

Si può anzitutto scegliere $|E|$ così elevato, che il sistema $|N|$ seghi sopra una E un sistema lineare completo (n° 18). Per la 2ª condizione, sulla superficie E il sistema lineare completo $|EE|$ conterrà parzialmente il sistema $|NE|$ e il residuo sarà un sistema lineare irriducibile infinito. Ne deriva [43]) che la serie segata su (EE) dal sistema completo $|NE|$, cioè da $|N|$, è completa.

---

[42]) CASTELNUOVO, loc. cit. [34]), n° 39.

[43]) SEVERI, loc. cit. [39]).

Non ci tratteniamo sul modo di atteggiare la dimostrazione quando non esista $|N|$, perchè al principio di questo n° abbiamo avuto occasione di dare il tipo del ragionamento in un caso analogo.

Passiamo piuttosto a stabilire la regolarità del sistema $|2(EE)|$ segato sopra una E dal sistema $|2E|$. Indicando con K una curva canonica di E, dalla 2ª condizione si trae che su E esiste il sistema irriducibile e più che ∞^0

$$|2(EE) - K| = |LE|.$$

Ne deriva che il sistema $|2(EE)|$ è aggiunto ad un sistema lineare irriducibile infinito, e quindi ch'esso è regolare.

Da ciò ora trarremo che il sistema segato su E da $|2E|$ è completo. Infatti la dimensione di tale sistema è uguale a

$$r_{2e} - r_e - 1,$$

r_{2e}, r_e denotando le dimensioni di $|2E|$ ed $|E|$. Tenendo presenti le espressioni di r_{2e} ed r_e (n° 11) si trova la dimensione di $|2(EE)|$

$$3n - 2\pi + p_a + 2, \tag{44}$$

ove n, π, p_a sono i caratteri di $|E|$.

Poichè la curva $2(EE)$ ha il grado $4n$ ed il genere $2\pi + n - 1$, l'espressione (44) non è altro che la dimensione virtuale del sistema completato $|2(EE)|$. Dal momento che questo sistema è regolare, si conclude che $|2(EE)|$ è completo.

Ora consideriamo la serie segata da $|2E|$ sopra una curva (EE), e diciamone δ_1 la deficienza. Questa serie ha l'indice di specialità P_g e quindi ha la dimensione

$$2n - \pi + P_g - \delta_1.$$

La dimensione del sistema completo $|EE| = |2(EE) - (EE)|$ risulterà pertanto espressa da

$$3n - 2\pi + p_a + 2 - (2n - \pi + P_g - \delta_1) - 1 = n - \pi + p_a - P_g + 1 + \delta_1.$$

L'indice di specialità di questo sistema è P_g (la deficienza δ_2 del sistema segato su E dal sistema canonico di V, è cioè nulla), onde δ_1 ne esprimerà la sovrabbondanza. Ricordando il Teorema IX e l'Osservazione alla fine del n° 21, si conclude che

$$\delta_1 = q_1 + q_2$$

ovvero, essendo $\delta_2 = 0$,

$$\delta_1 - \delta_2 = q_1 + q_2.$$

C. D. D.

Integrali doppi di 1ª specie appartenenti ad una varietà.

24. *Definizioni.* — È ormai ben noto il legame che passa tra gl'integrali semplici di 1ª specie appartenenti ad una superficie algebrica e la irregolarità della superficie [44]).

[44]) Per la bibliografia in proposito rinvio il lettore al n° 8 della Monografia di CASTELNUOVO-ENRIQUES, alla fine del trattato di PICARD et SIMART, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes* (Paris, Gauthier-Villars), t. I (1897), t. II (1906).

Al n° 14 abbiamo ricordato come l'esistenza degli integrali analoghi sopra una varietà, si riconnetta alla irregolarità superficiale della medesima. Sorge ora la questione di caratterizzare geometricamente, almeno dal punto di vista qualitativo, l'esistenza degli integrali doppi di 1ª specie appartenenti ad una varietà algebrica V a tre dimensioni.

Supponiamo che la varietà V appartenga ad uno spazio a quattro dimensioni, di cui diremo x_1, x_2, x_3, x_4 o rispettivamente x, y, z, t le coordinate non omogenee di punto, secondo che, per la comodità della scrittura, ci convenga l'una o l'altra notazione.

La V abbia per equazione

$$f(x_1 x_2 x_3 x_4) = 0. \tag{45}$$

Entro alla V, o meglio entro alla riemanniana S a 6 dimensioni imagine reale di V, una varietà (bilatera) a due dimensioni A, si ottiene considerando le x_1, x_2, x_3, x_4 come funzioni di due variabili reali u, v, soggette eventualmente a qualche disuguaglianza funzionale, se la varietà a due dimensioni di cui trattasi non è chiusa. S'indichi in modo generale con $\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}$, ove φ, ψ son due funzioni di u, v, il determinante jacobiano

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial u},$$

e si consideri un'espressione del tipo

$$\int\int_A \left[\sum_{ik} P_{ik} \frac{D(x_i, x_k)}{D(u, v)}\right] du\,dv \qquad (P_{ik} = - P_{ki}), \tag{46}$$

i, k denotando una disposizione semplice binaria degli indici 1, 2, 3. — Noi supponiamo che le P sieno funzioni razionali delle x_1, x_2, x_3, x_4, legate dalla equazione (45).

L'espressione (46) s'indica anche colla notazione

$$\int\int_A \sum_{ik} P_{ik}\, dx_i\, dx_k. \tag{47}$$

Poichè nel determinante jacobiano $\frac{D(x_i, x_k)}{D(u, v)}$, lo scambio delle x_i, x_k, senza il contemporaneo scambio delle u, v, produce un cambiamento di segno, così occorre fare la convenzione che nella (47), uno scambio dei differenziali dx_i, dx_k produca un cambiamento di segno nei termini relativi. Ciò dà la ragione della supposizione $P_{ik} = -P_{ki}$, mediante la quale l'espressione (47) risulta indipendente dall'ordine dei dx.

Il cambiamento di segno che si produce nel valore dell'espressione (46), allorchè si scambiano fra loro u, v, corrisponde al fatto che l'integrale doppio può estendersi all'una o all'altra faccia della varietà bilatera A (o, in altri termini, corrisponde alla possibilità di fissare due sensi opposti attorno ad uno, quindi a tutti i punti di A).

La *condizione d'integrabilità* per l'integrale (47), cioè la condizione affinchè il valore dell'integrale rimanga inalterato per una deformazione continua dell'area d'integrazione, che lasci fisso l'eventuale contorno, senza, beninteso, traversare punti di singo-

larità delle funzioni P, si scrive sotto la forma

$$\frac{\partial P_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial P_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial P_{31}}{\partial x_1} = 0,$$

ove le derivate si calcolino ricordando che x_4 è funzione algebrica di x_1, x_2, x_3.

Nel seguito supporremo sempre soddisfatta la condizione d'integrabilità. Ogni *periodo* dell'integrale (46), cioè il valore ottenuto estendendo l'integrale ad un ciclo a due dimensioni (area chiusa) di S, risulterà allora indipendente dalle deformazioni continue del ciclo; e tutti i periodi potranno esprimersi come combinazioni lineari a coefficienti interi di un numero finito tra essi [45]).

Noi ci limiteremo a considerare gl'*integrali doppi di 1ª specie,* cioè quegli integrali (47) che rimangono finiti per qualunque area d'integrazione.

25. ***Integrali doppi appartenenti ad una sezione iperpiana variabile della varietà.*** — Richiamate queste nozioni, indichiamo con R il numero dei cicli distinti a quattro dimensioni che si possono tracciare nella varietà S, talchè $R+1$ denoterà l'*ordine di connessione quadrimensionale* della S (o della V), od anche, secondo il teorema di POINCARÉ, l'*ordine di connessione superficiale* [46]) della varietà stessa.

Consideriamo un integrale doppio del tipo

$$\int\int \frac{P(xyzt)}{f_t}\, dx\, dy, \tag{48}$$

e riguardiamo z come un parametro, sicchè insomma si tratterà d'un integrale appartenente alla superficie algebrica (45). Detto m l'ordine di V, supponiamo che la $P=0$ sia una varietà d'ordine $m-4$ aggiunta a V: l'integrale (48) risulterà allora di 1ª specie (CLEBSCH-NOETHER), almeno per valori generici di z.

Orbene, noi dimostreremo il seguente teorema fondamentale:

XVI) *Tra i periodi dell'integrale* (48) — *i quali sono certe funzioni del parametro* z — *se ne trovano R nulli, corrispondenti ad altrettanti cicli superficiali* DISTINTI *della varietà V.*

Non è evidentemente restrittiva l'ipotesi che gli assi coordinati sieno disposti genericamente rispetto alla varietà V, dotata di singolarità *ordinarie.*

Allora gli spazi del fascio $z=$ cost. tangenti a V, produrranno sezioni possedenti oltre alle solite singolarità ordinarie (linea doppia e punti tripli) un punto doppio conico isolato. Ma com'è ben noto — e contrariamente a quanto accade nel caso analogo delle sezioni curvilinee d'una superficie — la presenza di questo punto doppio non altera affatto la *specie* dell'integrale (48) [47]), cioè questo rimane ancora dovunque finito sulla relativa superficie sezione. Sicchè insomma *l'integrale* (48) *è di 1ª specie sopra ogni sezione di $z=$* cost.

Può veramente sorgere un dubbio per quegli spazi del fascio che hanno posizioni

---

45) Veggasi ad es. per queste nozioni il trattato citato di PICARD et SIMART [44]).

46) PICARD et SIMART, loc. cit. [44]), t. I, Ch. II.

47) Cfr. per es. PICARD et SIMART, loc. cit. [44]), t. I, pag. 184.

particolari rispetto ai punti multipli di V; ma questo dubbio si rimuove osservando che in ogni caso la sezione di P con questi spazi particolari, continua a comportarsi come aggiunta anche rispetto alle singolarità più complicate che si producono sulle corrispondenti superficie sezioni.

Ciò si giustifica a priori pensando che tali singolarità nascono sempre dalla sovrapposizione di singolarità ordinarie, e che durante la variazione dello spazio secante, la sezione di P si comporta come aggiunta rispetto alle singolarità che si avvicinano, in guisa che quando si raggiunge una delle posizioni particolari cui si allude, la suddetta sezione si comporterà come aggiunta anche rispetto alla singolarità limite.

Del resto la cosa si può verificare a posteriori, analizzando le cinque possibili posizioni particolari dello spazio $z = \text{cost.}$

1) Spazio tangente in O, nel modo più generale, alla superficie doppia D della nostra varietà. In tal caso la sezione di V possiede in O un tacnodo ordinario; la linea doppia della suddetta sezione presenta ivi un nodo; e infine la sezione di P passa per O toccando la sezione di V.

2) Spazio tangente in O, nel modo più generale, alla linea T tripla per V e per D. La sezione di V possiede in O un punto triplo triplanare e un altro punto triplo infinitamente vicino secondo la direzione della retta u comune ai tre piani tangenti, la quale è poi l'unica tangente alla linea doppia della suddetta sezione. Questa linea doppia ha pure in O due punti tripli infinitamente vicini. La sezione di P passa per O con un punto doppio biplanare, cui è infinitamente vicino, secondo la direzione u, un altro punto doppio.

3) Spazio generico passante per uno, O, dei punti che son quadrupli per V e per T e sestupli per D. La sezione di V ha in O un punto quadruplo, con quattro piani tangenti indipendenti; il punto O è sestuplo per la linea doppia della suddetta sezione e le tangenti relative sono i sei spigoli dell'angolo tetraedro formato da quei piani tangenti. La superficie sezione di P, passa per O con un punto triplo.

4) Spazio generico tangente in O alla linea luogo dei punti cuspidali di V (punti doppi in cui i due spazi tangenti coincidono). Nel punto O, doppio per la superficie sezione di V, coincidono due punti doppi uniplanari (cuspidali) della superficie stessa. La sezione di P passa per questi punti.

5) Spazio generico passante per uno, O, dei punti triplo-cuspidali di V (punti tripli in cui due spazi tangenti coincidono). La sezione di V presenta ivi un punto triplo-cuspidale e la sezione di P passa per esso doppiamente.

Ciò premesso, consideriamo gli R cicli distinti a quattro dimensioni che si possono tracciare entro V. Per la scelta generica del fascio $z = \text{cost.}$, si può anzitutto escludere che uno qualunque di questi cicli abbia in comune con uno spazio del fascio una varietà a tre dimensioni, perchè entro alla totalità reale delle ∞^8 sezioni spaziali di V, non si può evidentemente trovare un continuo di più che ∞^1 sezioni spaziali incontranti il ciclo considerato secondo varietà a tre dimensioni. Ognuno degli R cicli considerati segherà pertanto una qualunque sezione $z = \text{cost.}$ — più propriamente la relativa riemanniana

a quattro dimensioni — secondo uno o più cicli superficiali (in numero finito) di questa sezione.

Ma anche nel caso in cui i cicli ottenuti sieno più d'uno, eseguendone la *somma,* cioè riunendoli mediante sottili superficie tubulari, il loro complesso si potrà considerare come un sol ciclo.

Orbene, *gli R cicli cui si perviene in tal modo, sono invarianti rispetto alle circolazioni di z,* cioè facendo descrivere a z un cammino chiuso sul proprio piano rappresentativo, ognuno degli R cicli ritorna in sè stesso. E invero, qualora uno di tali cicli risulti dalla somma di più altri, come sopra si è spiegato, la circolazione di z non potendo produrre che una permutazione tra i cicli componenti, lascia inalterata la loro somma.

I periodi dell'integrale (48) relativi a questi R cicli, sono pertanto *funzioni uniformi* di z; e poichè l'integrale conservasi di 1ª specie per ogni valore di z, ne segue che i periodi stessi sono funzioni uniformi dovunque finite, cioè *costanti.*

Ci resta da provare:

a) Che gli R cicli invarianti sono tra loro distinti.

b) Che le suddette costanti sono addirittura nulle.

L'affermazione *a*) riducesi a quest'altra: Sulla riemanniana S un ciclo M a quattro dimensioni che non formi contorno (si sottintende sopra una qualche varietà a tre dimensioni condotta per esso), stacca sulla riemanniana Q, imagine di una sezione generica $z = \text{cost.}$, un ciclo superficiale N (somma eventualmente di più altri) che *non* forma contorno. Infatti, l'ipotesi che il ciclo M non formi contorno, si traduce nella esistenza di un ciclo lineare σ di S, il quale sega M in un numero dispari di punti. Ora il ciclo lineare σ, per deformazione continua senza uscire da S, può ridursi sulla riemanniana Q, e durante questa deformazione la parità del numero dei punti comuni a σ e ad M non s'altera: dunque, a deformazione eseguita, avremo sopra Q un ciclo lineare segante N in un numero dispari di punti. Ciò prova che N non può formare contorno.

Passiamo infine a dimostrare l'affermazione *b*). Cerchiamo a tal uopo la forma dello sviluppo di un periodo dell'integrale (48) nell'intorno di $z = \infty$. Per ciò converrà porre

$$x = zu, \qquad y = zv, \qquad t = zw,$$

e operare questa sostituzione nell'integrale (48) dopo avere ordinato i polinomi f, P aggruppandone i termini dello stesso ordine, a cominciare da quello di grado più alto. Verrà allora

$$\int\int \frac{P(xyzt)}{f_t} dx\, dy = \int\int \frac{z^{m-4} P_0(u v 1 w) + z^{m-5} P_1(u v 1 w) + \cdots}{z^{m-1}\frac{\partial f_0(u v 1 w)}{\partial w} + z^{m-2}\frac{\partial f_1(u v 1 w)}{\partial w} + \cdots} \frac{D(x, y)}{D(u, v)} du\, dv$$

$$= z^2 \int\int \frac{z^{m-4} P_0(u v 1 w) + \cdots}{z^{m-1}\frac{\partial f_0(u v 1 w)}{\partial w} + \cdots} du\, dv,$$

ove P_i, f_i denotano il complesso dei termini di grado rispettivo $m - 4 - i$, $m - i$

nei polinomi P, f. Sicchè lo sviluppo di un periodo dell'integrale (48) sarà della forma

$$\frac{a}{z} + \frac{b}{z^2} + \frac{c}{z^3} + \cdots, \tag{49}$$

ove a, b, c, ... sono convenienti periodi di determinati integrali doppi. Così per es. a è un periodo dell'integrale

$$\int\int \frac{P_0(u\, v\, 1\, w)}{\frac{\partial f_0(u\, v\, 1\, w)}{\partial w}}\, du\, dv,$$

relativo alla superficie $f_0(u\, v\, 1\, w) = 0$, che è la proiezione, dall'origine delle coordinate sul piano $z = 1$, della sezione all'infinito di V.

Lo sviluppo (49) mostra che, se un periodo dell'integrale (48) è costante, per esso deve risultare necessariamente

$$a = b = c = \cdots = 0,$$

cioè *il periodo stesso deve essere identicamente nullo.* C. D. D.

26. Una conseguenza notevolissima del teorema XVI è la seguente:

XVII) *La deficienza δ del sistema segato sopra una sezione iperpiana di una varietà a tre dimensioni V, dal proprio sistema aggiunto, non è mai inferiore al numero degli integrali doppi indipendenti di 1ª specie che appartengono alla varietà.*

Indichiamo infatti con J un integrale doppio di 1ª specie appartenente alla varietà V, per la quale conserviamo le notazioni degli altri numeri.

Sopra ogni sezione $z =$ cost. l'integrale J staccherà un integrale doppio di 1ª specie: dico che quest'integrale non può mai avere la forma (48). Nell'ipotesi contraria esso avrebbe nulli i periodi relativi ad R cicli superficiali *distinti* di V; e poichè ogni periodo di J è una combinazione lineare (a coefficienti interi o razionali) dei periodi relativi ad R cicli distinti qualunque, così tutti i periodi di J sarebbero nulli, cioè J si ridurrebbe ad una costante (funzione uniforme dovunque finita).

Questo fatto si può esprimere geometricamente nel modo seguente: *La superficie aggiunta d'ordine $m - 4$ individuata sopra uno spazio $z =$ cost. dall'integrale J, non può mai essere staccata sullo stesso spazio da una forma d'ordine $m - 4$ aggiunta a V.*

Ne deriva che le curve canoniche individuate sopra una superficie $z =$ cost. da un integrale J, non possono appartenere al sistema staccato sulla stessa superficie dal relativo sistema aggiunto, e si conclude pertanto col Teorema XVII.

Ricordando il Teorema X si può enunciare che:

XVIII) *Il numero degli integrali doppi di 1ª specie che appartengono ad una varietà a tre dimensioni, non supera la somma delle due irregolarità q_1, q_2 della varietà.*

In particolare dunque *una varietà per cui sia nulla la somma $q_1 + q_2$, è priva d'integrali doppi di 1ª specie, ed una varietà completamente regolare ($q_1 = q_2 = 0$), è priva d'integrali doppi e d'integrali semplici di 1ª specie.*

Questi teoremi estendono (parzialmente perchè si riferiscono soltanto agl'integrali

doppi di 1ª specie) il primo risultato qualitativo da me ottenuto per gl'integrali semplici di una superficie [48]).

La previsione che anche per le varietà si possa giungere a stabilire un'uguaglianza tra il numero Q degl'integrali doppi di 1ª specie e la somma $q_1 + q_2$, è assai attraente; ma certamente questo risultato definitivo costerà molti sforzi.

Noi qui dobbiamo limitarci a constatare sopra alcuni esempi, di cui tosto ci occuperemo, che *il limite superiore $q_1 + q_2$ del numero Q può essere effettivamente raggiunto.*

27. Prima però vogliamo esporre un'osservazione la quale fa presagire *un legame tra l'esistenza degli integrali doppi di 1ª specie sopra una varietà a tre dimensioni V, e le proprietà dei sistemi di* LINEE *tracciate sulla V.*

A tal uopo premetteremo la considerazione seguente, relativa alle serie doppiamente infinite di gruppi di punti sopra una superficie F di equazione

$$f(xyz) = 0.$$

Denotiamo con $(x_1 y_1 z_1) \ldots (x_n y_n z_n)$ n punti appartenenti ad un gruppo variabile entro una serie $\infty^2\, \Sigma$, e con

$$\int\!\!\int \varphi(xyz)\, dx\, dy$$

un integrale doppio di 1ª specie appartenente ad F.

Le coordinate $(x_i y_i z_i)$ saranno funzioni algebriche (ad n valori) del punto (λ, μ, ν) variabile sopra una superficie $\psi(\lambda\mu\nu) = 0$ che sia in corrispondenza birazionale con Σ, sicchè l'espressione

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i y_i z_i) \frac{D(x_i, y_i)}{D(\lambda, \mu)},$$

risulterà funzione *razionale* del punto (λ, μ, ν): sia

$$\sum \varphi(x_i y_i z_i) \frac{D(x_i, y_i)}{D(\lambda, \mu)} = \Phi(\lambda, \mu, \nu).$$

Allora l'integrale

$$(50) \qquad \int\!\!\int \sum \varphi(x_i y_i z_i) \frac{D(x_i, y_i)}{D(\lambda, \mu)} d\lambda\, d\mu = \int\!\!\int \Phi(\lambda\mu\nu)\, d\lambda\, d\mu$$

è *un integrale doppio di 1ª specie della superficie* $\psi = 0$ [49]).

---

[48]) Veggasi per le citazioni la monografia citata di CASTELNUOVO-ENRIQUES [44]).

[49]) Se la serie ∞^2, Σ, è un'involuzione, gl'integrali doppi di ψ provengono tutti dalle somme del tipo (50). Infatti, partendo da un integrale $\int\!\!\int \Phi\, d\lambda\, d\mu$ di 1ª specie di ψ, si ha la relazione:

$$\Phi(\lambda\mu\nu) \frac{D(\lambda, \mu)}{D(x, y)} = \varphi(xyz),$$

ove φ è una tal funzione razionale, che $\int\!\!\int \varphi\, dx\, dy$ è pure di 1ª specie. Si ottiene così *la condizione necessaria e sufficiente*:

$$\sum \varphi(x_i y_i z_i) \frac{D(x_i y_i)}{D(\lambda \mu)} = 0,$$

affinchè un'involuzione ∞^2 sopra una superficie, sia di genere nullo. Pel caso in cui si tratti di un'involuzione sopra una superficie iperellittica, cfr. BAGNERA e DE FRANCHIS, *Le superficie algebriche le quali ammettono una rappresentazione parametrica mediante funzioni iperellittiche di due argomenti* [Memorie della Società Italiana delle Scienze, serie III, t. XV (1908), pp. 251-343], § 4.

Similmente se si ha sopra una varietà V un sistema Σ (semplice) di ∞^2 curve algebriche, tale che per un punto generico di V passino n linee del sistema non secantisi altrove, ad ogni punto di V risponderanno sopra una superficie $\psi(\lambda\mu\nu)=0$ rappresentativa del sistema, n punti

$$(\lambda_1\mu_1\nu_1), \ldots, (\lambda_n\mu_n\nu_n),$$

ed ogni integrale doppio di 1ª specie

$$\int\int\varphi(\lambda\mu\nu)\,d\lambda\,d\mu$$

della ψ, darà luogo ad un integrale doppio di 1ª specie

$$\int\int\sum\varphi(\lambda_i\mu_i\nu_i)\,d\lambda_i\,d\mu_i$$

della varietà V.

XIX) Dunque: *Sopra una varietà priva d'integrali doppi di 1ª specie, ogni sistema (semplice) Σ di ∞^2 curve algebriche, ha il genere geometrico nullo.*

In particolare *se la varietà è completamente regolare, non soltanto sarà nullo il genere geometrico di Σ, ma il sistema stesso sarà regolare* (cioè la superficie rappresentativa sarà regolare e di genere 0).

Alcuni esempi.

28. ***Varietà delle coppie di punti di una curva C e di una superficie F.*** — Si può sempre supporre che la superficie data F sia priva di curve eccezionali (di 1ª specie), non escludendo il caso in cui F sia una rigata (razionale o no), nel qual caso, quando ci si riferisca ad un modello opportuno, non si hanno che curve eccezionali di 2ª specie (Castelnuovo-Enriques).

Si supporrà inoltre che la varietà V rappresenti « senza eccezione » le coppie di punti di F e di C. Indicheremo con Σ il fascio, birazionalmente identico a C, delle superficie F_0, identiche ad F, che rappresentano le coppie con un punto fissato su C; e con π la congruenza d'indice 1, identica ad F, formata dalle curve C_0, identiche a C, che rappresentano le coppie con un punto fissato su F. — Una curva C_0 ed una superficie F_0 si segano in un punto.

Ciò premesso, costruiamo anzitutto il sistema canonico di V. Sieno

$$f(\lambda,\mu,\nu)=0,\qquad \varphi(\lambda',\mu')=0 \tag{51}$$

le equazioni rispettive di F e di C, e

$$x_i = A_i(\lambda,\mu,\nu;\lambda',\mu') \qquad (i=1,2,3,4), \tag{52}$$

le formole che esprimono le coordinate non omogenee $(x_1x_2x_3x_4)$ di un punto variabile su V, come funzioni razionali dei punti $(\lambda,\mu,\nu)(\lambda',\mu')$ variabili sulle F, C. Poichè ad un punto di V risponde un punto su F ed un punto su C, le $\lambda,\mu,\nu,\lambda',\mu'$ risulteranno funzioni razionali delle variabili $x_1x_2x_3x_4$, legate dall'equazione di V, la quale si ottiene eliminando le $\lambda,\mu,\nu,\lambda',\mu'$ tra le (51), (52).

L'estensione immediata di un ragionamento del sig. PICARD [50]), permette di concludere che gl'integrali tripli di 1ª specie, appartenenti a V, son tutti combinazioni lineari di integrali del tipo

$$\int\int\int P(\lambda\mu\nu)\,Q(\lambda'\mu')\,d\lambda\,d\mu\,d\lambda' = \int\int\int R(x_1 x_2 x_3 x_4)\,dx_1\,dx_2\,dx_3,$$

ove

$$\int\int P(\lambda\mu\nu)\,d\lambda\,d\mu, \qquad \int Q(\lambda'\mu')\,d\lambda'$$

denotano rispettivamente due integrali di 1ª specie appartenenti ad F, C.

Dico anzitutto che il *determinante funzionale*

$$\frac{D(\lambda,\ \mu,\ \lambda')}{D(x_1,\ x_2,\ x_3)}, \tag{53}$$

considerato come funzione del punto variabile su V, *riducesi ad una costante non nulla.* Basterà provare ch'esso non si annulla mai sopra V.

Infatti, se il determinante (53) si annullasse in un punto $(\bar{x}_1\,\bar{x}_2\,\bar{x}_3\,\bar{x}_4)$ della nostra varietà, del quale sia $(\bar{\lambda}\,\bar{\mu}\,\bar{\nu};\ \bar{\lambda}'\,\bar{\mu}')$ la coppia corrispondente, nell'intorno di $(\bar{\lambda}\,\bar{\mu}\,\bar{\nu};\ \bar{\lambda}'\,\bar{\mu}')$ le x non sarebbero più determinate funzioni uniformi di $(\lambda\mu\nu;\ \lambda'\mu')$, il che contraddice all'ipotesi che la corrispondenza tra le coppie $(\lambda\mu\nu;\ \lambda'\mu')$ e i punti $(x_1 x_2 x_3 x_4)$, sia *biunivoca senza eccezione.*

Ne deriva che, a meno di una costante non nulla, si può scrivere la relazione

$$R(x_1 x_2 x_3 x_4) = P(\lambda\mu\nu)\,Q(\lambda'\mu').$$

Se quindi s'indica con

$$\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_{p_g} P_{p_g} = 0$$

l'equazione del sistema canonico della superficie F, di genere geometrico p_g, e con

$$\mu_1 Q_1 + \cdots + \mu_p Q_p = 0,$$

l'equazione della serie canonica della curva C di genere p, l'equazione del sistema canonico di V sarà

$$\sum \nu_{ik} P_i Q_k = 0. \tag{54}$$

Se ne rileva che il genere geometrico di V è espresso da

$$P_g = p_g p.$$

Invero le $p_g p$ varietà $P_i Q_k = 0$ non posson essere tra loro linearmente legate, giacchè se la (54) fosse un'identità per valori non tutti nulli delle ν, se ne dedurrebbe l'identità

$$P_1 \sum \nu_{1k} Q_k + P_2 \sum \nu_{2k} Q_k + \cdots + P_{p_g} \sum \nu_{p_g k} Q_k = 0,$$

donde, a causa dell'indipendenza delle P, si trarrebbe

$$\sum \nu_{ik} Q_k = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p_g),$$

è ciò porterebbe ad almeno un legame tra le Q.

---

50) Cfr. PICARD et SIMART, loc. cit. 44), t. I, pag. 196.

L'equazione (54) può essere interpretata geometricamente dicendo che:

Una superficie canonica di V si ottiene aggiungendo alle superficie formanti entro il fascio Σ un gruppo canonico, una superficie riempita dalle ∞^1 curve che dànno entro la congruenza π un ente canonico.

Costruiamo ora gl'integrali doppi della varietà V. Si vede colla solita considerazione [51]) che ogni integrale doppio di 1ª specie di V, è una combinazione lineare d'integrali del tipo

$$(55) \quad \int\int P(\lambda\mu\nu)d\lambda d\mu, \quad \int\int H(\lambda\mu\nu)Q(\lambda'\mu')d\lambda d\lambda' + K(\lambda\mu\nu)Q(\lambda'\mu')d\mu d\lambda',$$

ove

$$\int\int P d\lambda d\mu, \qquad \int H d\lambda + K d\mu, \qquad \int Q d\lambda',$$

sono integrali di 1ª specie appartenenti rispettivamente ad F, C. E poichè, come si prova facilmente, gl'integrali del tipo (55) sono tra loro indipendenti, si conclude che *la varietà V possiede $p_g + p(p_g - p_a)$ integrali doppi di 1ª specie,* ove p_a denota il genere aritmetico di V.

Infine *gl'integrali semplici di 1ª specie della V* sono combinazioni lineari dei trasformati degl'integrali semplici di F o di C, e perciò *sono in numero di $p_g - p_a + p$.*

Passiamo a calcolare i caratteri Ω_0, Ω_1, Ω_2, P_a relativi alla varietà V.

Ricordiamo che F_0 denota una superficie del fascio Σ e C_0 una curva della congruenza π. Con Φ indicheremo una superficie riempita dalle ∞^1 curve C_0 che dànno entro π un ente canonico.

Per calcolare i caratteri Ω occorrerà conoscere i caratteri virtuali dei sistemi $|F_0|$, $|\Phi|$, mediante cui si compone il sistema canonico. Non si esclude il caso che questo manchi; naturalmente allora si avrà da fare con enti virtuali.

Il grado e il genere curvilineo di $|F_0|$ sono rispettivamente uguali a 0, 1, perchè non vi son punti comuni a due F_0. Quanto al genere aritmetico di F_0, esso è uguale al genere aritmetico p_a di F.

Indicando con n_0, n_1, n_2 grado, genere curvilineo, genere aritmetico di $|(2p-2)F_0|$, avremo pertanto

$$n_0 = 0, \qquad n_1 = 1, \qquad n_2 = 2p - 3 + 2(p-1)p_a.$$

Passiamo a calcolare i caratteri di $|\Phi|$. A tal uopo si osservi che una Φ appartiene ad un sistema continuo ∞^{p_g-1} *composto* colla congruenza π; due Φ di questo sistema si segano in $p^{(1)} - 1$ curve C_0 del fascio di genere $p^{(1)}$ che la congruenza subordina su esse, $p^{(1)}$ denotando il genere lineare di F.

Se si indicano con m_0, m_1 il grado e il genere curvilineo di $|\Phi|$, verrà intanto

$$m_0 = 0, \qquad m_1 = (p^{(1)} - 1)(p - 1) + 1.$$

Quanto al genere aritmetico m_2 di $|\Phi|$, esso non è altro che il genere aritmetico

---

51) PICARD et SIMART, loc. cit. 44), t. I, pp. 129 e 196.

della superficie delle coppie di punti di C e di una curva canonica di F; cioè [52])

$$m_2 = (p^{(1)} - 1)(p - 1) - 1.$$

Tenendo infine presente che una Φ sega sopra una F_0 una curva canonica, mediante le formole (n° 11) che esprimono i caratteri del sistema somma di due altri, si ha

$$\Omega_0 = 6(p-1)(p^{(1)}-1), \qquad \Omega_1 = 9(p-1)(p^{(1)}-1)+1,$$
$$\Omega_2 = 3(p-1)(p^{(1)}-1)+2(p-1)p_a+2p-3,$$

e in forza della relazione fondamentale (33), si ottiene *il valore del genere aritmetico* P_a *di* V

$$P_a = (p-1)p_a + p.$$

L'irregolarità tridimensionale q_1 di V è perciò data da

$$q_1 = P_g - P_a = p(p_g - p_a) + p_a - p;$$

e l'irregolarità superficiale q_2 da

$$q_2 = (p_g - p_a) + p.$$

Ne deriva che *il numero degli integrali doppi di* 1^a *specie appartenenti a* V *è uguale alla somma delle due irregolarità*

$$q_1 + q_2 = p_g + p(p_g - p_a).$$

Osservazioni. — Quando la F sia regolare con $p_g = p_a > 0$ e la C razionale ($p = 0$), si ottiene *un esempio di varietà ad irregolarità superficiale nulla e ad irregolarità tridimensionale* > 0.

Nel caso $p_g = p_a = p = 1$, si ha invece *un esempio di varietà ad irregolarità superficiale* > 0 *e ad irregolarità tridimensionale nulla.*

Nel caso $p_g = p_a = 0$, $p > 0$, si ha *un esempio di varietà col genere geometrico minore del genere aritmetico* ($P_g = 0$, $P_a = p$).

Nel caso $p_g = p = 0$, $p_a < 0$ si ha *un esempio di varietà avente diverse da zero ambedue le irregolarità e che tuttavia è priva d'integrali doppi di* 1^a *specie.*

29. ***Varietà delle terne di punti di una curva C di genere p.*** — Ho già avuto occasione altrove [53]) di assegnare il numero degl'integrali tripli, doppi, semplici di 1^a specie appartenenti ad una tal varietà V; questi numeri risultano rispettivamente uguali a $\binom{p}{3}$, $\binom{p}{2}$, p, cosicchè *il genere geometrico* P_g *e l'irregolarità superficiale* q_2 *della* V *sono espressi da*

$$P_g = \binom{p}{3}, \qquad q_2 = p.$$

Ricordo anche la costruzione del sistema canonico di V [54]).

---

[52]) Maroni, *Sulle superficie algebriche possedenti due fasci di curve algebriche unisecantisi* [Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, t. XXXVIII (1902-1903), pp. 149-154], pag. 151; de Franchis, *Sulle varietà* ∞^2 *delle coppie di punti di due curve o di una curva algebrica* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XVII (1903), pp. 104-121], pag. 108.

[53]) *Sulle superficie che rappresentano le coppie di punti di una curva algebrica* [Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, t. XXXVIII (1902-1903), pp. 185-200], pag. 198.

[54]) Loco cit. [53]), pag. 200.

Sia Σ la serie ∞^1 di superficie F_0, identiche alla superficie delle coppie di punti della curva C, ciascuna delle quali rappresenta le terne aventi un punto fisso. Per un punto generico di V passano tre superficie F_0 (cioè Σ è d'indice 3); e sopra una fissata F_0, le altre segano il relativo sistema di grado 1 e d'indice 2, che appartiene alla F_0 fissata, in quanto la si consideri come superficie delle coppie di punti di C.

Orbene, *sulla V una superficie canonica si ottiene come luogo dei punti comuni alle terne di superficie F_0, tolte da un gruppo variabile in una g^2_{2p-2} canonica del sistema Σ.*

Poichè, data la costruzione un po' complicata del sistema canonico, il calcolo diretto degl'invarianti Ω appartenenti a V, non si presenterebbe così semplice come nel caso precedente, gioverà di calcolare per altra via il genere aritmetico P_a della varietà.

Imitando un ragionamento che ho esposto altrove [55]) per la superficie delle coppie di punti di una curva, e profittando anzi del risultato là stabilito, si prova — senza difficoltà — che il sistema lineare completo cui appartengono totalmente i gruppi di superficie F_0 formanti entro Σ una serie lineare completa g^r_n, ha la dimensione $\binom{r+3}{3}-1$.

Ciò posto, si osservi che il sistema lineare $|nF_0|$, contenente le suddette superficie composte, è semplice ed è privo di gruppi di un numero finito o infinito di punti che presentino alle sue superficie una sola condizione. Sicchè, appena sia $r>1$, si potrà trasformare birazionalmente V in una varietà V', priva di singolarità, sulla quale $|nF_0|$ venga segato dagl'iperpiani.

Ne deriva (n° 11) che, per n assai alto, il sistema $|nF_0|$ è regolare (n° 21).

Da che il sistema $\infty^0|F_0|$ ha il grado 1, il genere curvilineo p, e il genere aritmetico $\binom{p}{2}-p$ [56]), mediante le formole del n° 11, si avrà l'espressione

$$R_n=\binom{n+3}{3}-p\binom{n+2}{2}+\binom{p}{2}(n+1)-\binom{p}{2}+p-P_a-1$$

della dimensione effettiva R_n del sistema $|nF_0|$.

D'altra parte, essendo per $n>2p-2$, $r=n-p$, risulta pure

$$R_n=\binom{n-p+3}{3}-1.$$

Confrontando le due espressioni di R_n, in virtù dell'identità

$$\binom{n+3}{3}=\binom{n-p+3}{3}+p\binom{n+2}{2}-\binom{p}{2}(n+1)+\binom{p}{3},$$

si ottiene *l'espressione cercata del genere aritmetico di V*

$$P_a=\binom{p}{3}-\binom{p}{2}+p.$$

L'irregolarità tridimensionale q_1 vien dunque uguale a $\binom{p}{2}-p$ ed anche in tal

---

[55]) *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e sopra certe classi di superficie* [Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, s. II, t. LIV (1903), pp. 1-49], n° 20.

[56]) DE FRANCHIS, loc. cit. [52]), pag. 118; SEVERI, loc. cit. [53]), pag. 193.

caso *il numero degl'integrali doppi di 1ª specie appartenenti a V, risulta uguale alla somma delle due irregolarità q_1, q_2.*

Cenni di estensioni alle varietà superiori.

30. ***Ancora sul genere aritmetico.*** — Sia V_k una varietà dello S_{k+1}, che possa riguardarsi come proiezione generica di una varietà senza punti multipli, talchè le singolarità di V_k sieno *ordinarie.* Detto n l'ordine di V_k, consideriamo il numero virtuale P_a delle forme indipendenti d'ordine $n-k-2$, passanti per la M_{k-2} doppia di V_k. Per $k=2, 3$ si sa che P_a coincide col genere aritmetico p_k definito al nº 4. Orbene, questa conclusione vale anche per k qualunque. Eccone un cenno di dimostrazione:

Si estendono anzitutto, senz'alcuna difficoltà di concetto, gli sviluppi dei nⁱ 9, 10, 11, 12, 13 e si arriva così, dopo aver definito gl'invarianti relativi $\Omega_0, \Omega_1, \ldots, \Omega_{k-1}$ (grado, genere curvilineo, genere aritmetico superficiale, ..., genere aritmetico a $k-1$ dimensioni della varietà — eventualmente virtuale — $F'-F$), alla forma provvisoria della relazione fondamentale

$$(56)\quad P_a + (-1)^{k-1} p_k = \Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2 - \cdots + (-1)^{k-1}\Omega_{k-1} + k + (-1)^{k-1}.$$

Si ricordi quindi che p_k, e per ragioni analoghe anche P_a, son caratteri numerativi di V_k (Teorema IV).

In particolare per una varietà V_k completa intersezione di $r-k$ forme generiche dello S_r, p_k e P_a risultano funzioni soltanto degli ordini $n_1 n_2 \ldots n_{r-k}$ di queste forme. Le relative espressioni si calcolano facilmente. L'espressione di p_k si ottiene infatti come al nº 15 *a*), e l'espressione di P_a si calcola osservando che le forme d'ordine $n_1 + n_2 + \cdots + n_{r-k} - r - 1 + h$ segano sopra V_k il sistema (completo) aggiunto al multiplo secondo h di una sezione iperpiana, e che d'altra parte, secondo il nº 9 esteso, la dimensione di questo aggiunto si sa esprimere in funzione di P_a.

Confrontando le due espressioni così ottenute si trova

$$(57)\quad p_k = P_a.$$

S'indichino ora con $\alpha_i (i = 1, 2, 3, \ldots)$ i caratteri proiettivi di una qualunque V_k (nº 6). Si avrà allora

$$p_k = \sum c_i \alpha_i, \qquad P_a = \sum c'_i \alpha_i,$$

le c_i, c'_i essendo costanti. Sostituendo al posto delle α_i le loro espressioni (in funzione delle n) relative al caso in cui V_k è intersezione completa, si otterrà l'identità

$$\sum c_i \alpha_i = \sum c'_i \alpha_i,$$

valida qualunque sieno gli ordini n. Ne segue che

$$c_i = c'_i.$$

L'uguaglianza (57) vale perciò per una V_k qualunque e si ottiene *la forma definitiva della relazione fondamentale*

$$\Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2 - \cdots - \Omega_{k-1} + k - 1 = 0 \quad \text{(per } k \text{ pari)}$$
$$\Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2 + \cdots + \Omega_{k-1} + k + 1 = 2P_a \quad \text{(per } k \text{ dispari)}.$$

31. ***Deficienza del sistema segato sopra una varietà a $k-1$ dimensioni F, tracciata sulla varietà V_k, dal relativo sistema aggiunto $|F'|$.*** — Con un ragionamento addirittura identico, salvo adattamenti di parole, a quello svolto per $k=3$, si arriva ad estendere alle V_k il Lemma I del n° 20.

Meno immediata è l'estensione del Lemma II, che perciò riferiremo diffusamente.

Chiameremo anzitutto *regolare* un sistema lineare non speciale $|F|$ di M_{k-1}, appartenente a V_k, quando la sua dimensione sia espressa da

(58) $n_0 - n_1 + n_2 - n_3 + \cdots + (-1)^{k-2} n_{k-2} + (-1)^{k-1} n_{k-1} + (-1)^k P_a + k - 1,$

ove $n_0, n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}$ sono i caratteri virtuali del sistema (grado, genere curvilineo, genere aritmetico superficiale, ..., genere aritmetico della varietà a $k-2$ dimensioni comune a due F, genere aritmetico di una F).

In forza del n° 11, già esteso alle V_k, si può affermare la regolarità di un multiplo assai elevato delle sezioni iperpiane di V_k (supposta priva di singolarità). Se ne deduce anche la regolarità del sistema $|F|$ staccato sopra V_k dalle forme di ordine assai alto che passano per una varietà G_{k-1}, priva di singolarità, tracciata su V_k. Basta infatti scegliere l così alto, che le forme d'ordine l stacchino tanto su G_{k-1} che su V_k, sistemi completi regolari, di cui indichiamo con R, r le dimensioni. La dimensione di $|F|$ risulterà uguale ad $R-r-1$. — Ricordando le formole che legano i caratteri virtuali di due varietà, ai caratteri della loro somma, l'espressione $R-r-1$ si trasforma in un'espressione del tipo (58), e perciò, secondo la definizione, $|F|$ risulta regolare.

Ciò premesso, sulla V_k indichiamo con $|F|$ un *sistema lineare (completo o no) completamente irriducibile* — cioè tale che risultino irriducibili i suoi sistemi lineari caratteristici dei diversi ranghi. Supponiamo inoltre $|F|$ privo di varietà base. Sia $|A|$ un sistema lineare *completo* regolare, il quale segni sopra la varietà F_i comune a $k-i$ ($i=1, 2, 3, \ldots, k-1$, $F_{k-1}=F$) varietà generiche F, un sistema *completo* regolare, che contenga il sistema lineare segnato da $|F|$ su F_i e lasci come residuo un sistema regolare (eventualmente scompleto): il Lemma II afferma allora che il minimo sistema $|F+A|$ è completo e regolare.

Poichè già sappiamo che il lemma è vero per $k=2$, lo ammetteremo sulle varietà a $k-1$ dimensioni, e lo dimostreremo per induzione sulla V_k. Indichiamo perciò con $|C|$ il sistema *completo* $|F+A|$ e proviamo anzitutto che $|C|$ è regolare.

Se $\overline{F}$ designa una fissata F, $\overline{F}_{k-2}$ la sezione di $\overline{F}$ con una generica F, dalle condizioni cui soddisfa per ipotesi il sistema $|A|$, segue che il sistema lineare completo $|B|$, staccato su $\overline{F}$ da $|A|$, soddisfa alle condizioni analoghe. Avendo ammesso il teorema sulle varietà a $d-1$ dimensioni, ne deriva che è completo e regolare il minimo sistema lineare

$$|D| = |B + \overline{F}_{k-2}|$$

tracciato su $\overline{F}$. E poichè $|C|$ segna su $\overline{F}$ un sistema lineare che contiene totalmente ogni varietà composta $B + \overline{F}_{k-2}$, si conclude che tale sistema coincide con $|D|$.

S'indichi ora con r_d la dimensione di $|D|$ e con $\overline{r}_c$ la dimensione (virtuale) che

$|C|$ avrebbe se fosse regolare, cosicchè la dimensione effettiva di $|C|$ risulterà $r_c = \overline{r}_c + \varepsilon$, ove ε è un intero (positivo, negativo o nullo).

La dimensione del sistema completo $|A|$ verrà uguale ad

$$r_a = \overline{r}_c + \varepsilon - r_d - 1.$$

Profittando delle formole che legano i caratteri di $|C|$ ai caratteri dei sistemi $|F|$ ed $|A|$, si trova

$$\overline{r}_a = \overline{r}_c - r_d - 1,$$

ove $\overline{r}_a$ denota la dimensione virtuale di $|A|$. Confrontando questa relazione colla precedente, viene

$$r_a = \overline{r}_a + \varepsilon,$$

donde, a causa della regolarità di $|A|$, segue $\varepsilon = 0$ e perciò $r_c = \overline{r}_c$. Dunque il sistema $|C|$ è regolare.

S'indichi ora con $|E|$ il minimo sistema $|F + A|$: si tratterà di provare che $|E|$ coincide col sistema completo $|C|$.

Poichè $|C|$ segna su $\overline{F}$ il minimo sistema lineare $|B + \overline{F}_{k-2}|$, anche E segnerà su F lo stesso sistema $|D|$. In ambedue i casi il sistema residuo

$$|C - \overline{F}|, \qquad |E - \overline{F}|$$

è il sistema completo $|A|$. Ne deriva che la dimensione di $|E|$, come quella di $|C|$, è espressa da

$$r_a + r_d + 1,$$

e quindi i due sistemi coincidono. C. D. D.

Si hanno allora tutti gli elementi per concludere come al n° 20 che, data su V_k una varietà a $k - 1$ dimensioni F, priva di singolarità, la deficienza δ_1 del sistema segato su F dal sistema aggiunto $|F'|$, non supera la deficienza δ_2 del sistema staccato da $|G'|$ sopra la sezione G di V_k con una forma d'ordine assai alto.—Ora la deficienza δ_2 si valuta facilmente applicando la formola analoga alla (15) del n° 9, e si trova così

$$\delta_2 = q_1 + q,$$

ove q_1 $(= P_g - P_a)$ è l'irregolarità k-dimensionale di V_k e q è l'irregolarità $(k - 1)$ dimensionale di G.

Ammettendo che l'irregolarità $(k - 1)$-dimensionale delle varietà prive di punti multipli, appartenenti a V_k, non possa crescere oltre ogni limite e indicando con q_2 questo limite superiore, che si potrebbe chiamare *l'irregolarità $(k - 1)$-dimensionale di V_k*, si giunge alla conclusione che *la deficienza del sistema segato sopra una F di V_k dal proprio sistema aggiunto, non supera la somma delle irregolarità a $k - 1$ ed a k dimensioni appartenenti a V_k.*

E da ciò segue pure col processo d'induzione completa, *l'invarianza assoluta del genere aritmetico rispetto alle trasformazioni birazionali della varietà.*

Osservazione. — Nel caso di k dispari, dalla relazione fondamentale, stante l'evidente invarianza relativa dei caratteri Ω, si trarrebbe subito l'invarianza (almeno relativa) di P_a; ma un esame più approfondito del modo di variare degli Ω rispetto alle tra-

sformazioni che posseggono su V_k elementi fondamentali (come ha fatto il sig. Pannelli per $k = 3$), porterebbe a stabilire l'invarianza assoluta di P_a. — Nel caso di k pari, volendo dimostrare l'invarianza del P_a per una via — diremo così — aritmetica, occorrerebbe trovare in generale una relazione analoga a quella data da Noether per le superficie ($\omega + I = 12 p_a + 9$).

32. *Le irregolarità di una V_k.* — Dal n° prec. apparisce come essenziale per lo sviluppo della geometria sopra una varietà V_k, la dimostrazione del fatto che le varietà a $k - 1$ dimensioni, prive di punti multipli, le quali soddisfino entro V_k a certe condizioni di genericità (ved. per $k = 3$ il n° 14), hanno la stessa irregolarità $(k - 1)$-dimensionale.

Una volta ammesso questo fatto, ne segue che *per una data V_k si debbono considerare $k - 1$ irregolarità, $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_{k-1}$.*

In generale q_i è l'irregolarità $(k - i + 1)$ — dimensionale di una varietà *generica* a $k - i + 1$ dimensioni contenuta in V_k.

33. *Integrali multipli finiti dei vari ranghi appartenenti ad una V_k.* — Gli sviluppi dei n[i] 24, 25, 26 si estendono senza difficoltà agl'integrali $(k - 1)$-pli di 1ª specie appartenenti ad una V_k e si arriva alla conclusione che *la deficienza del sistema segato sopra una sezione iperpiana di V_k, dal proprio sistema aggiunto, è almeno uguale al numero degl'integrali $(k - 1)$-pli indipendenti, di 1ª specie, che appartengono a V_k.*

Quanto agl'integrali finiti $(k - i)$-pli di V_k $(i = 2, 3, \ldots, k - 1)$, tutto tende a far supporre ch'essi sieno precisamente tanti quanti gl'integrali analoghi di una generica varietà a $k - i$ dimensioni appartenente a V_k (in particolare della sezione di V_k con uno spazio lineare di conveniente dimensione). Il fatto, come abbiamo ricordato (n° 14), è già stato stabilito per gl'integrali semplici.

Ciò che si può senz'altro affermare, in forza del teorema sopra enunciato e della relazione tra la deficienza δ e le irregolarità q_1, q_2, è che una varietà completamente regolare $(q_1 = q_2 = \cdots = q_{k-1} = 0)$ non possiede integrali $(k - i)$-pli di 1ª specie $(i = 1, 2, \ldots, k - 1)$.

34. I teoremi e le induzioni riferite si possono controllare sopra esempi, tra i quali riesce singolarmente istruttivo il caso di una V_k rappresentante le k-ple di punti di una curva C di genere p.

A proposito di questa V_k faremo un'altra osservazione. — Il numero degl'integrali finiti $(k - i)$-pli $(i = 0, 1, \ldots, k - 1)$ ad essa appartenenti, è dato da [57])

$$\binom{p}{k - i},$$

cosicchè in particolare il genere geometrico è espresso da

$$P_g = \binom{p}{k}.$$

Il genere aritmetico P_a si calcola col procedimento da $k - 1$ a k, come al n° 29,

---

[57]) Cfr. la mia Nota citata [53]).

e si trova così

$$P_a = \binom{p}{k} - \binom{p}{k-1} + \binom{p}{k-2} - \cdots + (-1)^{k-1} p.$$

Dunque *per la V_k considerata il genere aritmetico è dato dalla formola*

$$P_a = i_k - i_{k-1} + i_{k-2} - \cdots + (-1)^{k-1} i_1,$$

ove $i_k, i_{k-1}, \ldots, i_1$ denotano rispettivamente i numeri degl'integrali finiti k-pli, $(k-1)$-pli, ..., semplici, che appartengono alla varietà:

Qualora si ammetta che, per una qualunque varietà, *l'espressione*

$$i_k - i_{k-1} + i_{k-2} - \cdots \pm i_1$$

sia un carattere numerativo (n° 6), col metodo della determinazione delle costanti, usato già al n° 30, *si deduce che per ogni varietà V_k vale la relazione*

$$P_a = i_k - i_{k-1} + i_{k-2} - \cdots \pm i_1.$$

Ma la *dimostrazione* di questo risultato si otterrà indubbiamente attraverso a difficoltà gravissime, introducendo molti nuovi elementi e sviluppandone altri, che oggi esistono appena in germe nella teoria delle funzioni algebriche di più variabili.

Padova, 25 dicembre 1908.

FRANCESCO SEVERI.

ÜBER DIE AUFLÖSUNG UNENDLICHVIELER LINEARER GLEICHUNGEN MIT UNENDLICHVIELEN UNBEKANNTEN.

Von **Otto Toeplitz** (Göttingen).

Adunanza del 17 gennajo 1909.

Die Sätze über die Auflösung von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten pflegt man mit Hilfe der Theorie der Determinanten abzuleiten. Man kann jedoch unter diesen Sätzen solche, deren *Inhalt* den Determinantenbegriff garnicht enthält (wenn auch der übliche Beweis nicht davon frei ist), von den übrigen scheiden, deren *Wortlaut* man nicht formulieren könnte, ohne von Determinanten zu reden. Unter der ersten Kategorie begreifen sich die folgenden drei Sätze:

I. Die beiden homogenen Gleichungssysteme

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l|l} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=0 & a_{11}x_1+\cdots+a_{n1}x_n=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n=0 & a_{1n}x_1+\cdots+a_{nn}x_n=0\end{array}\right.$$

haben stets die gleiche Zahl linear unabhängiger Lösungen; heisse diese Zahl der « Defekt » der beiden Systeme.

II. Ist dieser Defekt 0, so ist das unhomogene Gleichungssystem

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=y_1\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n=y_n\end{array}\right.$$

für jedes Wertsystem der $y_1, \ldots, y_n$ eindeutig auflösbar, und man kann diese Auflösung unter eine ebensolche einheitliche Formel zusammenfassen:

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} x_1=\alpha_{11}y_1+\cdots+\alpha_{1n}y_n\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_n=\alpha_{n1}y_1+\cdots+\alpha_{nn}y_n\,.\end{array}\right.$$

Es ist also stets *entweder* das homogene *oder* das unhomogene Gleichungssystem lösbar (*Alternative*).

III. Ist der Defekt von (1) nicht 0, so ist das unhomogene System (2) dann und (natürlich) nur dann auflösbar, wenn zwischen den Zahlenwerten der $y_1, \ldots, y_n$ genau dieselben linearen Dependenzen bestehen, wie zwischen den Linearformen linkerhand.

Die übrigen Sätze befassen sich dann mit der Aufstellung von Kriterien, wann der Defekt 0 ist und wann nicht, wann also die eine und wann die andere Möglich-

keit der unter II genannten Alternative wirklich eintritt, allgemeiner mit Methoden, den Defekt zu berechnen, wenn die Coefficienten a_{ik} gegeben sind; und das Resultat ist, dass der « Rang » d. h. n — Defekt = dem Grade der grössten nicht verschwindenden Unterdeterminante von $|a_{ik}|$ ist; endlich mit der Herstellung von Auflösungsformeln wiederum mit Hilfe von Determinantenausdrücken.

Im folgenden sollen die Sätze der ersten Classe auf eine besondere Art auf *unendliche* lineare Gleichungssysteme übertragen werden. Obgleich das Charakteristische dieser Betrachtungen eben darin besteht, dass sie von den mannigfachen neueren Untersuchungen über diesen Gegenstand abseits steht, soll hier doch von der neuesten Literatur einiges zusammengestellt werden, damit das Verhältnis der hier folgenden Sätze zu derselben hervortrete.

An erster Stelle wären etwa diejenigen Sätze zu nennen, die aus FREDHOLM's Theorie der Integralgleichungen hervorgegangen sind, sei es durch Analogisieren der Fragestellung auf abzählbar unendlichviele Variablen, sei es durch denjenigen Uebergang von den Funktionen zu ihren abzählbar unendlichvielen FOURIERcoefficienten, den HILBERT in seiner 5. Mitteilung [1]) angegeben hat. Sowohl hinsichtlich des Inhalts als hinsichtlich der Beweise dieser Sätze hat die von HILBERT in Satz 10 seiner 4. Mitteilung [2]) gegebene Behandlung abschliessenden Charakter. Dort werden einerseits die Coefficienten des Gleichungssystems

$$(4)\qquad \begin{cases} (1+a_{11})x_1 + \quad a_{12}x_2 + \quad a_{13}x_3 + \cdots = y_1 \\ \quad a_{21}x_1 + (1+a_{22})x_2 + \quad a_{23}x_3 + \cdots = y_2 \\ \quad a_{31}x_1 + \quad a_{32}x_2 + (1+a_{33})x_3 + \cdots = y_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

der Convergenzbedingung unterworfen, dass $\sum_{i,k} a_{ik}^2$ convergiert, bzw. der etwas geringeren und naturgemässeren Bedingung, die HILBERT als « *Vollstetigkeit* » des Systems der a_{ik} bezeichnet. Andererseits werden auch nur solche Wertsysteme $x_1, x_2, \ldots$ als Lösungen in Betracht gezogen, deren Quadratsumme $\sum_i x_i^2$ convergiert, sog. « *beschränkte Wertsysteme* ». Alsdann gelten die drei determinantenfreien Sätze über endliche Gleichungssysteme genau ebenso für Systeme mit unendlichvielen Unbekannten.

Des weiteren sind diejenigen Arbeiten zu nennen, welche an der Beachtung lediglich beschränkter Lösungssysteme festhalten, aber auf die uneingeschränkte Giltigkeit jener drei Sätze verzichten, indem sie die Convergenzannahmen über die Coefficienten nach

---

[1]) *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen.* Fünfte Mitteilung. [Nachrichten von der Kgl. Gesellschaften der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1906, S. 439-480].

[2]) *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen.* Vierte Mitteilung. [Nachrichten von der Kgl. Gesellschaften der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1906, S. 157-227].

Möglichkeit lockern [3]). Das Weitmöglichste tut E. SCHMIDT, indem er von den Coefficienten von

$$(5)\qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots = y_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

nur verlangt, dass die Coefficienten jeder einzelnen der Linearformen linkerhand beschränkte Wertsysteme sind. Dann, *und offenbar auch nur dann,* garantiert nämlich ein bekannter elementarer Convergenzsatz, dass die linken Seiten von (5) für jedes beschränkte Wertsystem der $x_1, x_2, \ldots$ überhaupt convergieren, so dass man sich im übrigen nun nur noch darum zu kümmern hat, ob diese convergenten Summenwerte bzw. $= y_1, y_2, \ldots$ sind. Andererseits ist SCHMIDT hier auch der einzige, der neben Kriterien und Auflösungsformeln die wenigen hier geltenden Sätze vom Charakter der drei determinantenfreien Sätze über endliche Gleichungen erhält. Und zwar sind das der Satz, dass die Lösungen der homogenen Gleichungen sich stets aus endlich oder abzählbar unendlichvielen linear unabhängigen unter ihnen linear componieren lassen, natürlich mit Coefficienten, die beschränkte Wertsysteme darstellen; ferner diejenigen III nach Möglichkeit analogen Sätze, die in § 13 der SCHMIDTschen Arbeit enthalten sind. Im wesentlichen haben aber hier die I, II, III analogen Sätze keine Giltigkeit, insonderheit die « Alternative », wie sich zuerst schon bei den von HILBERT betrachteten Streckenspektren herausgestellt hat.

Die an die eben berührten Betrachtungen von HILBERT anknüpfenden Untersuchungen von E. HELLINGER [4]) und dem Verfasser [5]) legten es nun nahe, dass diese Alternative sich dadurch wiederherstellen lassen könnte, dass man die Forderung der Beschränktheit für die Lösungssysteme aufhebt, und weiter auch, dass die Betrachtung dieser nicht beschränkten Lösungssysteme für die Theorie dieser Streckenspektren wesentlich sein möchte. Von da aus bin ich zu folgender von alledem unabhängigen und viel elementareren Fragestellung gelangt:

Ich unterwerfe das Lösungssystem keinerlei Convergenzeinschränkung; dafür muss ich die Coefficienten jeder einzelnen Gleichung der stärksten nur möglichen Convergenzeinschränkung unterwerfen, nämlich der, dass nur endlichviele unter ihnen von o verschieden sind; offenbar *nur dann* ist es sicher, dass für kein einziges Wertsystem

---

[3]) E. SCHMIDT *Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. XXV (1. Semester 1908), S. 53-77]. Ferner: O. TOEPLITZ, *Die* JACOBI*sche Transformation der quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen* [Nachrichten von der Kgl. Gesellschaften der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1907, S. 101-109], einfacher bei E. HILB, *Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten* [Sitzungsberichte der Physikalisch-medizinischen Sozietät in Erlangen, Band XL (1908)].

[4]) *Die Orthogonalinvarianten quadratischer Formen von unendlichvielen Variablen.* Inaugural-Dissertation (Göttingen 1907).

[5]) *Zur Transformation der Scharen bilinearer Formen von unendlichvielen Veränderlichen* [Nachrichten von der Kgl. Gesellschaften der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1907, S. 110-115].

x_1, x_2, ... eine der Linearformen linkerhand divergiert *(zeilenfinite Gleichungssysteme).* Das erste Resultat ist dann (§ 1), dass in passender Formulierung die Alternative hier wieder gilt. In § 2 wird gezeigt, wie man durch die Methode des § 1 die Sätze I, II, III über *endliche* Gleichungen erhält, ohne Determinanten zu benutzen. In § 3 wird dann verfolgt, wie den analogen Sätzen für *unendliche* Gleichungen von der in § 1 behandelten Art über die blosse Alternative II hinaus eine möglichste Vollständigkeit gegeben werden kann [6]).

§ 1.

Die Alternative bei zeilenfiniten Gleichungssystemen.

Ein unendliches lineares Gleichungssystem bzw. die Matrix seiner Coefficienten heisse *« zeilenfinit »*, wenn jede einzelne seiner Gleichungen nur endlich viele der unendlichvielen Variablen x_1, x_2, ... enthält

$$(6)\qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n_1}x_{n_1} = y_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n_2}x_{n_2} = y_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ; \end{cases}$$

dabei können n_1, n_2, ... oder ein Teil dieser Zahlen successive grösser werden, wie z. B. bei den als « Recursionsformeln » bekannten hierher gehörigen Systemen der Gestalt:

$$(7)\qquad \begin{cases} r_{11}x_1 = y_1 \\ r_{21}x_1 + r_{22}x_2 = y_2 \\ r_{31}x_1 + r_{32}x_2 + r_{33}x_3 = y_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \qquad (r_{11} \neq 0,\ r_{22} \neq 0, \ldots),$$

oder den etwas allgemeineren vom Typus (6), bei denen n_1, n_2, ... beständig zunehmen und a_{1n_1}, a_{2n_2}, ... sämtlich von o verschieden sind. Auch diese kann man allenfalls noch als Recursionsformeln bezeichnen, insofern sich auch bei ihnen die Auflössung successive vollziehen lässt; dabei wird ohne weiteres klar, dass für diese Recursionen im *weiteren* Sinne die homogenen Gleichungen stets lösbar sind, ausser in dem Falle der *strengen* Recursionsformeln (7), wo dann die unhomogenen Gleichungen stets und nur auf eine Weise lösbar sind — das ist aber die Alternative.

Diese Alternative soll nun für den allgemeinen Fall (6) durch Zurückführung auf den Fall der Recursionsformeln (im weiteren Sinne) bewiesen werden, d. h. genauer der Satz:

Besteht zwischen keiner endlichen Anzahl der Linearformen linkerhand in (6) *eine lineare Dependenz* [7]) *so sind entweder die unhomogenen Gleichungen* (6) *eindeutig und*

[6]) Die Arbeit ist vom Verfasser wesentlich in derselben Form in der mathematischen Gesellschaft zu Göttingen am 17. November 1908 vorgetragen worden.

[7]) Diese Einschränkung wird in § 3 aufgehoben.

durch Auflösungsformeln von derselben Gestalt auflösbar, oder die zugehörigen homogenen Gleichungen ($y_1 = 0$, $y_2 = 0$, ...) *haben eine Lösung. Als Lösung ist dabei jedes nur mögliche Wertsystem* $x_1, x_2, \ldots$ *zugelassen.*

Beweis. Unter der «*Länge*» einer Linearform $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$ sei der Index des letzten nicht verschwindenden Coefficienten in ihr verstanden. Danach ist z. B. die Linearform $x_2 + 3x_7$ von der Länge 7, die Linearform x_n von der Länge n, u. s. f.

Jede lineare Composition von endlich vielen der in (1) gegebenen Linearformen $y_1, y_2, \ldots$, etwa $b_1 y_1 + \cdots + b_r y_r$ wird selbst eine Linearform der $x_1, x_2, \ldots$ sein von endlicher Länge. Gäbe es eine solche Verbindung $b_1 y_1 + \cdots + b_r y_r$, die die Länge 0 hat, also mit anderen Worten identisch 0 ist, so würde das eine lineare Dependenz zwischen einer endlichen Anzahl der gegebenen Formen $y_1, y_2, \ldots$ bedeuten, entgegen der Voraussetzung. Demnach ist die Länge jeder solchen Combination eine positive ganze Zahl. Unter allen diesen positiven ganzen Zahlen, die derart bei den verschiedenen möglichen Combinationen der $y_1, y_2, \ldots$ auftreten, muss es eine kleinste geben; heisse diese ν_1.

Dann gibt es weiter — von einem constanten Factor abgesehen — nur eine einzige lineare Combination der $y_1, y_2, \ldots$ von dieser kürzesten Länge ν_1. Denn gesetzt, es wären $a_1 y_1 + \cdots + a_n y_n$ und $b_1 y_1 + \cdots + b_n y_n$ zwei solche Combinationen, so würden beide x_{ν_1} mit einem von 0 verschiedenen Coefficienten enthalten, und keine der späteren Variablen; seien α bzw. β diese Coefficienten, so wäre also

$$\beta(a_1 y_1 + \cdots + a_n y_n) - \alpha(b_1 y_1 + \cdots + b_n y_n) = (\beta a_1 - \alpha b_1) y_1 + \cdots + (\beta a_n - \alpha b_n) y_n$$

eine neue, kürzere Combination der $y_1, y_2, \ldots$, es sei denn, dass $\beta a_1 - \alpha b_1, \ldots$, $\beta a_n - \alpha b_n$ einzeln verschwinden; dann wäre aber die Grössenreihe $b_1, \ldots, b_n$ der Reihe $a_1, \ldots, a_n$ proportional, da α, β nicht 0 sind, d. h. es sind in der Tat alle kürzesten Combinationen der $y_1, y_2, \ldots$ nur durch einen constanten Factor unterschieden. Dieser werde so fixiert, dass x_{ν_1} den Coefficienten 1 hat. Alsdann heisse diese nunmehr eindeutig bestimmte kürzeste Combination η_1.

Ich *streiche* jetzt von denjenigen der Formen $y_1, y_2, \ldots$, die bei der Bildung von η_1 wirklich auftreten (mit einem von 0 verschiedenen Coefficienten), irgend eine, etwa die kürzeste unter ihnen, bzw., wenn deren mehrere sind, die oberste von diesen [8]), *aus,* y_{k_1}, und bemerke, dass jede lineare Combination der $y_1, y_2, \ldots$ sich auch aus den undurchstrichenen y_i, d. h. $y_1, \ldots, y_{k_1-1}, y_{k_1+1}, \ldots$ und η_1 zusammensetzen lässt — eben weil ein solches y_i ausgestrichen worden ist, das bei der Bildung von η_1 wirklich vorkommt, sodass dieses sich aus η_1 und den übrigen componieren lässt.

Nunmehr unterwerfe ich die undurchstrichenen y_i genau demselben Verfahren: unter allen linearen Compositionen von je endlich vielen der undurchstrichenen y_i gibt es eine und (bei Fixierung eines constanten Factors) nur eine kürzeste; heisse sie η_2,

[8]) Dieser Modus ist zwar nicht für den vorliegenden Beweis, aber für einen späteren Zweck angebracht; hier würde es zunächst etwa auch genügen, einfach das oberste der wirklich verwendeten y_i zu streichen.

und sei ν_2 ihre Länge. Dann ist sicher $\nu_2 \geqq \nu_1$; denn wäre $\nu_2 < \nu_1$, so wäre η_2 als Combination der undurchstrichenen y_i a fortiori auch eine solche aller y_i, und als solche darf sie nicht kürzer sein als η_1, die kürzeste unter allen diesen. Sie ist aber sogar *sicher länger*. Denn wäre $\nu_2 = \nu_1$, so wäre η_2, von einem constanten Factor abgesehen, dieselbe Combination der y_i wie η_1. Nun ist aber bei der Bildung von η_1 ausdrücklich y_{k_1} verwendet, und bei der Bildung von η_2 ist es ausdrücklich nicht verwendet; also können η_1, η_2 nicht wesentlich dieselben Combinationen sein. So folgt $\nu_2 > \nu_1$. Und jede Combination der undurchstrichenen y_i von der Länge ν_2 ist wesentlich gleich η_2.

Ich behaupte endlich allgemeiner, dass jede Combination u von endlich vielen *aller* y_i, die nicht länger ist als η_2, sich linear aus η_1 und η_2 zusammensetzen lässt. In der Tat lässt sich u, wie oben hervorgehoben, auch aus η_1 und den undurchstrichenen y_i componieren

$$u = a\eta_1 + a_1 y_1 + \cdots + a_{k_1-1} y_{k_1-1} + a_{k_1+1} y_{k_1+1} + \cdots + a_n y_n, \quad \text{also} \quad u - a\eta_1$$

aus den undurchstrichenen y_i; andererseits ist u und $a\eta_1$ nicht länger als η_2, mithin auch $u - a\eta_1$; eine Verbindung der *undurchstrichenen* y_i, die nicht länger als η_2 ist, ist aber $= b\eta_2$, also $u = a\eta_1 + b\eta_2$, wie behauptet.

So werde das Verfahren fortgesetzt: Von den in η_2 verwendeten y_i das kürzeste gestrichen, die kürzeste Combination der übrigen, η_3, gebildet; diese ist sicher länger als η_2 u. s. f. Man gelangt dabei zu einer Folge von successive länger werdenden Combinationen $\eta_1, \eta_2, \ldots$, die das *reducierte System* heissen mögen. Es gilt jetzt nur noch zu zeigen, dass man umgekehrt jedes y_i aus einer endlichen Anzahl von Formen η_i linear componieren kann, *dass also das reducierte System dem gegebenen aequivalent ist.* Dann ist nämlich die Gesamtheit der endlichen Composition der η_i und der y_i genau dieselbe, und es ist leicht zu übersehen, dass es mit den Auflösungsverhältnissen, z. B. mit der Alternative bei aequivalenten Systemen genau gleichsteht. Hat y_α die Länge n_α, so wird es unter den η_i ein erstes geben, dessen Länge n_α eben überschreitet, da die Länge der successiven η_i nie stehen bleibt, sondern beständig wächst. Sei $\eta_{\beta+1}$ dieses η_i, so wird y_α sich als eine solche lineare Combination der y_i, welche nicht länger ist als η_β, aus $\eta_1, \ldots, \eta_\beta$ linear componieren lassen; wie vorher im niedrigsten Falle bewiesen worden und successive durch vollständige Induction dann weiter gezeigt gedacht werde. Also lässt y_α sich aus endlich vielen η_i componieren, q. e. d.

§ 2.

Endliche Gleichungssysteme.

Wendet man die Construction des vorigen Paragraphen auf n lineare Gleichungen mit n Unbekannten an und setzt dabei ebenso die lineare Independenz der linken Seiten voraus, d. h. die Nichtlösbarkeit des zweiten der beiden homogenen Gleichungssysteme (1) der Einleitung, so erhält man successive n Formen $\eta_1, \ldots, \eta_n$, deren jede sicher

länger ist als die vorangehende; da die letzte höchstens die Länge n haben kann, die erste mindestens die Länge 1 haben muss, kann das successive Zunehmen nicht anders zu stande kommen, als dadurch, dass η_1 die Länge 1 hat, η_2 die Länge 2 u. s. f., η_n die Länge n. Dann ist aber die recursive, eindeutige Auflösbarkeit evident. Das ist Satz II.

Um auch den ganzen übrigen in der Einleitung geschilderten Sachverhalt, so weit er determinantenfrei ist, zu erhalten, hat man in zwei Richtungen zu ergänzen: erstens muss man die Annahme der linearen Independenz der linken Seiten fallen lassen, ausserdem aber im Zusammenhange hiermit anstatt n Gleichungen mit n Unbekannten allgemeiner m Gleichungen mit n Unbekannten betrachten. Dieses letztere ist hier auch deshalb erwünscht, weil erst von da aus verständlich wird, welche Sätze bei den unendlichen, zeilenfiniten Gleichungssystemen erwartet werden können; denn bei unendlich vielen Gleichungen und Unbekannten ist der Unterschied zwischen Gleichheit und Ungleichheit beider Anzahlen verwischt.

Um mit dem ersten zu beginnen, setze ich $y'_i = y_i$, falls y_i von den vorangehenden $y_1, \ldots, y_{i-1}$ linear unabhängig ist; anderenfalls setze ich $y'_i =$ einer derjenigen linearen Compositionen von $y_1, \ldots, y_i$, die in Bezug auf die $x_1, \ldots, x_n$ identisch verschwinden, etwa—um eine unter ihnen eindeutig zu fixieren—diejenige, die erst ein möglichst spätes y als erstes wirklich enthält. Die y'_i sind dann n lineare Compositionen der y_i, aus denen sich die y_i umgekehrt, gemäss einer recursiven Auflösung zusammensetzen. Von diesen y'_i sind dann eben so viele identisch 0, als wesentlich verschiedene Dependenzen zwischen den y_i bestanden; die übrigen sind aber linear independent. Denn bestände zwischen ihnen noch eine lineare Dependenz, so würde das letzte von dieser betroffene y von den vorangehenden nicht unabhängig sein, würde sich also nicht unter dieser zweiten Classe befinden.

Was das zweite betrifft, den Fall von m Gleichungen mit n Unbekannten

$$(8) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = y_m, \end{cases}$$

so ist es nun berechtigt, diese als independent anzunehmen. Alsdann ergibt die Methode von § 1 m reduzierte Formen $\eta_1, \ldots, \eta_m$, deren Länge successive zunimmt. Daraus folgt unter anderem, dass $m \leqq n$ sein muss, da sonst mehr als $(n-1)$-mal eine Verlängerung vorkommen müsste, während nur n Variable zur Verfügung stehen. Im übrigen aber kann man nun die $\eta_1, \ldots, \eta_m$ noch weiter auf eine endgiltige, einfachste Gestalt reducieren, indem man auch die unabhängigen Variablen $x_1, \ldots, x_n$ einer passenden, eindeutig invertierbaren linearen Substitution unterwirft. Dass auch bei dieser Reduction das Gleichungssystem nur in ein aequivalentes übergeführt wird, d. h. ein solches, dessen Auflösungsverhältnisse genau dieselben sind, wie die des ursprünglichen, ist wieder unmittelbar evident.

Zu diesem Ende setze man, wenn $\eta_1 (x_1, x_2, \ldots)$ die obige Linearform der x_1,

$x_2, \ldots$ bedeutet

$$x_1 = \xi_1, \ldots, x_{\nu_1-1} = \xi_{\nu_1-1}, x_{\nu_1} = 2\xi_{\nu_1} - \eta_1(\xi_1, \xi_2, \ldots), x_{\nu_1+1} = \xi_{\nu_1+1}, \ldots$$

$$\ldots, x_{\nu_2-1} = \xi_{\nu_2-1}, x_{\nu_2} = 2\xi_{\nu_2} - \eta_2(\xi_1, \xi_2, \ldots) + \alpha_{2,\nu_1}\eta_1(\xi_1, \xi_2, \ldots) - \alpha_{2,\nu_1}\xi_{\nu_1}, \ldots$$

Führt man diese Grössen in das System der Formen $\eta_1, \eta_2, \ldots$ ein, so kommt

$$\eta_1 = \xi_{\nu_1}, \qquad \eta_2 = \xi_{\nu_2}, \qquad \ldots,$$

d. h. das Gleichungssystem geht in diese vollständig reducierte Gestalt über, aus der man alle Auflösungsverhältnisse unmittelbar ablesen kann. Dass aber diese Substitution der x_i in die ξ_i eindeutig invertierbar ist, erkennt man aus ihrem recursiven Charakter, wenn man beachtet, dass auch in x_{ν_1} die letzte Variable ξ_{ν_1} den Coefficienten 1 hat, u. ebenso auch $\xi_{\nu_2}, \xi_{\nu_3}, \ldots$ bzw. in $x_{\nu_2}, x_{\nu_3}, \ldots$. Dies fasst sich nun alles zu dem Gesamtergebnis zusammen:

Ein lineares Gleichungssystem von der Gestalt (8) *kann man durch eindeutig invertierbare Substitution einerseits der abhängigen Variablen* $y_1, \ldots, y_m$ *in* $\eta_1, \ldots, \eta_m$, *andererseits der unabhängigen Variablen* $x_1, \ldots, x_n$ *in* $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *auf eine solche Normalform bringen, dass in deren Coefficientenschema nach Wegstreichung derjenigen Zeilen und Kolonnen, die nur Nullen enthalten, ein quadratisches Schema stehen bleibt, in dessen Diagonale überall* 1, *sonst überall* 0 *steht*

$$\eta_1 = \xi_{\nu_1}, \qquad \eta_2 = \xi_{\nu_2}, \qquad \ldots \qquad (0 < \nu_1 < \nu_2 < \ldots).$$

§ 3.

Vollständiges Theorem über zeilenfinite Gleichungssysteme.

Die Schlüsse des vorigen Paragraphen übertragen sich unmittelbar auf unendliche, zeilenfinite Gleichungssysteme. Dabei sind die Substitutionen der y_i in η_i und der x_i in ξ_i nicht nur wiederum sicher eindeutig invertierbar, sondern sie bzw. ihre Coefficientenschemata sowie auch die ihrer Inversionen sind ebenfalls alle zeilenfinit [9]). Diese Beschaffenheit der Substitutionen gewährleistet wiederum auch hier bei den unendlichen Systemen, dass die Auflösungsverhältnisse, die uns hier interessieren und in dem hier festgehaltenen Sinne (ohne Convergenzeinschränkungen nämlich), durch sie nicht verändert werden, dass sie das gegebene System in ein « äquivalentes » überführen. So kann gesagt werden:

Jedes zeilenfinite, unendliche, lineare Gleichungssystem ist einem solchen aequivalent, in welchem nach Wegstreichung aller Zeilen und Kolonnen, die lediglich Nullen enthalten,

---

[9]) Aus der im § 1 angewandten Art des successiven Austreichens der y_i kann man folgern, dass die dort hergestellte Substitution selbst nebst ihrer Inversion auch kolonnenfinit ist, d. h. dass in jeder *Kolonne* ihres Coefficientenschemas nur endlich viele Grössen von 0 verschieden sind.

ein Schema übrig bleibt, in dessen Diagonale überall 1, *sonst überall* 0 *steht*

$$\eta_1 = \xi_{\nu_1}, \quad \eta_2 = \xi_{\nu_2}, \quad \ldots \qquad (0 < \nu_1 < \nu_2 < \ldots).$$

Aus dieser Normalform kann man alle Auflösungsverhältnisse unmittelbar ablesen. Man kann dieses Ergebnis auch so aussprechen, dass *die linearen Transformationen des «Gesamtraumes» der abzählbar unendlichvielen Variablen* $x_1, x_2, \ldots$ *in denjenigen Fragen denen von endlichvielen Variablen sich genau analog verhalten, die von dem Begriff des Ranges beherrscht werden, oder dass es angängig ist, für sie in ähnlicher Weise gewisse Cardinalzahlen analog dem Rang einzuführen* [10]), *die* 0, *endlich oder abzählbar-unendlich sein können.*

Die Schlüsse und Sätze der ganzen Arbeit gelten, wenn man die Coefficienten der vorkommenden Gleichungssysteme und zugleich deren Lösungen auf irgend einen gegebenen Rationalitätsbereich beschränkt.

Göttingen, den 15. December 1908.

OTTO TOEPLITZ.

[10]) Es sind drei solche Cardinalzahlen, nämlich die Anzahl der Zeilen und die der Kolonnen der Normalform, die nur mit Nullen besetzt sind, ausserdem die Zahl der mit 1 besetzten Stellen.

CONTRIBUTO ALLA CRITICA DI ALCUNE QUESTIONI CHE SI RIATTACCANO ALL'INTEGRAZIONE DELL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE DI LAPLACE.

Memoria di **Giuseppe Pucciano** (S. Demetrio Corone).

Adunanza del 27 dicembre 1908.

Il teorema di Green.

1. Sia dato in un piano un campo τ semplicemente connesso, il cui contorno sia σ. Supporremo che τ e σ soddisfino alle condizioni che enunciai nella Memoria: *Sulle condizioni di validità del teorema di* CAUCHY [1]) e che σ abbia, in ogni suo punto, normale unica, i cui due raggi penetrino uno nel campo τ e l'altro nel campo esterno a τ. Indichiamo con a, b le coordinate cartesiane dei punti di σ, con x, y quelle di un punto O generico del piano, con n_i la direzione del raggio della normale nei punti di σ, il quale penetra in τ, con n_e la direzione del raggio opposto, e poniamo

$$r = + \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2}, \qquad \theta = \text{arc tang}\,\frac{b-y}{a-x}.$$

Quando dal campo τ vorremo escludere il contorno, lo diremo esplicitamente, o adopreremo la locuzione « interno di τ ».

Sia $f(xy)$ una funzione conosciuta in un campo τ. Senza alterare il concetto comune di continuità della $f(xy)$ in un punto di τ, spieghiamo che la $f(xy)$ si dirà continua in un punto P di σ, quando ad η arbitrariamente piccolo si può far corrispondere ε in modo che il valore assoluto della differenza dei valori di $f(xy)$ in due punti qualsiasi comuni a τ ed al cerchio di centro P e di raggio ε sia minore di η. Se una funzione $f(xy)$ è continua in un punto P di τ indicheremo con f_P il valore di $f(xy)$ in P, oppure con f_{iP} se ci preme di far rilevare ch'esso è il limite della f se ci avviciniamo a P percorrendo una linea qualsiasi formata da soli punti di τ. Potrebbe darsi che i valori della f lungo una linea S_i tracciata in τ fino al punto P abbiano un limite, quantunque la f non sia continua in P, in tal caso indicheremo quel limite con f_{S_iP}. È chiaro che, quando la f è continua in P, esiste, qualunque sia S_i, f_{S_iP} e dev'essere

$$f_{S_iP} = f_{iP} = f_P.$$

[1]) Di prossima pubblicazione nel « Giornale di Matematiche di BATTAGLINI ».

Viceversa è dimostrato [2]) che, se esiste, qualunque sia S_i, $f_{S_i P}$, la f è continua in P. Se è data una linea l in τ e si vogliano estendere i simboli precedenti a rappresentare il valore ed il limite della f in un punto qualunque della l adopreremo l'indice l invece dell'indice P. Similmente con la sostituzione dell'indice e all'indice i i simboli adottati rappresenteranno nel campo esterno a τ ciò che rappresentano in τ.

Una funzione u dicesi armonica in τ quando è monodroma, finita, continua in ogni punto di τ; ammette derivate monodrome, finite, continue in ogni punto di τ, escluso il contorno, e soddisfa all'equazione differenziale di LAPLACE in ogni punto di τ escluso il contorno. Perchè una funzione possa dirsi armonica in un campo esterno ad un campo finito τ è necessario ch'essa sia nulla nei punti all'infinito del piano a meno d'una costante finita.

Indichiamo con ν_i e ν_e i raggi delle normali a σ, i quali penetrano rispettivamente nell'interno e nell'esterno di τ. Una funzione u, armonica in τ, se esistono

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i\sigma} \quad \text{e} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i\sigma},$$

e per conseguenza anche

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n_i}\right)_{\nu_i\sigma},$$

verifica il teorema di GREEN

$$\int_\sigma u_{i\sigma} \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial n_i} d\sigma - \int_\sigma \left(\frac{\partial u}{\partial n_i}\right)_{\nu_i\sigma} \log \frac{1}{r} d\sigma = [\sigma]_0 u(xy),$$

ove $[\sigma]_0$ è zero o 2π secondo che $O \equiv (xy)$ è esterno od interno a τ, ed il senso in cui va percorso σ, nell'eseguire l'integrazione, è quello, in cui deve rotare d'un angolo retto la direzione positiva dell'asse delle x per coincidere con la direzione positiva dell'asse delle y.

Il sig. A. LIAPOUNOFF [3]) dopo aver notato che l'ipotesi dell'esistenza di

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i\sigma} \quad \text{e} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i\sigma}$$

non lascia traccia nella formula finale, dimostra il teorema di GREEN nella sola ipotesi dell'esistenza di

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n_i}\right)_{\nu_i\sigma}$$

e della convergenza uniforme sulle ν_i di

$$\frac{\partial u}{\partial n_i} \quad \text{a} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial n_i}\right)_{\nu_i\sigma}.$$

---

[2]) VIVANTI, *Corso di Calcolo infinitesimale* (Messina, Ant. Trimarchi, 1899), pag. 71.

[3]) A. LIAPOUNOFF, *Sur certaines questions qui se rattachent au problème de* DIRICHLET [Journal de Mathématiques pures et appliquées, s. V, t. IV (1898), pp. 241-311].

Si può notare incidentalmente che tale convergenza uniforme produce che i valori

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n_i}\right)_{\nu_i\sigma}$$

si succedano con continuità su σ e che d'altra parte, ammessa tale continuità, la convergenza uniforme di

$$\frac{\partial u}{\partial n_i} \quad \text{a} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial n_i}\right)_{\nu_i\sigma}$$

è una condizione necessaria per la validità del teorema di GREEN. Posto difatti

$$W = \int_\sigma u_{i\sigma} \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial n_i} d\sigma, \qquad V = \int_\sigma \left(\frac{\partial u}{\partial n_i}\right)_{\nu_i\sigma} \log \frac{1}{r} d\sigma,$$

nel campo esterno a τ, se il teorema di GREEN è verificato, dev'essere

$$W = V,$$

quindi deve esistere

$$\left(\frac{\partial W}{\partial n_i}\right)_{\nu_e\sigma}$$

e dev'essere

$$\left(\frac{\partial W}{\partial n_i}\right)_{\nu_e\sigma} = \left(\frac{\partial V}{\partial n_i}\right)_{\nu_e\sigma};$$

e poichè

$$\frac{\partial V}{\partial n_i} \text{ converge uniformemente sulle } \nu_e \text{ a } \left(\frac{\partial V}{\partial n_i}\right)_{\nu_e\sigma} \text{ [4]},$$

anche

$$\frac{\partial W}{\partial n_i} \text{ converge uniformemente sulle } \nu_e \text{ a } \left(\frac{\partial W}{\partial n_i}\right)_{\nu_e\sigma},$$

e perciò esiste

$$\left(\frac{\partial W}{\partial n_i}\right)_{\nu_i\sigma}, \text{ e } \frac{\partial W}{\partial n_i} \text{ converge uniformemente sulle } \nu_i \text{ a } \left(\frac{\partial W}{\partial n_i}\right)_{\nu_i\sigma} = \left(\frac{\partial W}{\partial n_i}\right)_{\nu_e\sigma} \text{ [5]}.$$

Ma nel campo interno a τ dev'essere

$$W - V = 2\pi u,$$

quindi, per la convergenza uniforme sulle ν_i di

$$\frac{\partial V}{\partial n_i} \quad \text{a} \quad \left(\frac{\partial V}{\partial n_i}\right)_{\nu_i\sigma},$$

e perchè si ha

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n_i}\right)_{\nu_i\sigma} - \left(\frac{\partial V}{\partial n_i}\right)_{\nu_e\sigma} = -2\pi\left(\frac{\partial u}{\partial n_i}\right)_{\nu_i\sigma},$$

[4]) LIAPOUNOFF, Memoria citata [3]), § 20.

[5]) E. R. NEUMANN, *Studien über die Methoden von* C. NEUMANN *und* G. ROBIN *zur Lösung der beiden Randwertaufgaben der Potentialtheorie* (Leipzig, Teubner, 1905). Vedi specialmente pag. 46.

anche

$$\frac{\partial u}{\partial n_i} \text{ converge uniformemente sulle } \nu_i \text{ a } \left(\frac{\partial u}{\partial n_i}\right)_{\nu_i\sigma}.$$

Noi non insisteremo oltre su questo punto, chè lo scopo di questo capitolo è quello di far vedere che il teorema di GREEN è valido anche in casi in cui, pur esistendo i limiti $\left(\frac{\partial u}{\partial n_i}\right)_{\nu_i\sigma}$, essi non si succedono con continuità su σ. Anzi metteremo in evidenza un teorema che vale anche in casi, in cui non esistono o sono addirittura infiniti, in qualche punto di σ, i limiti $\left(\frac{\partial u}{\partial n_i}\right)_{\nu_i\sigma}$. Da tale teorema dedurremo quello di GREEN.

2. Nella detta mia Memoria dal titolo: *Sulle condizioni di validità del teorema di* CAUCHY dimostro che, *se è data in un campo τ una funzione $f(z)$ della variabile complessa $z = x + iy$, e se essa è monodroma, finita, continua in ogni punto di τ, ed olomorfa soltanto nell'interno di τ, la $f(z)$ verifica il teorema di* CAUCHY

$$\int_\sigma f(z)\frac{dz}{z - z_0} = i\,[\sigma]_{z_0} f(z_0).$$

Se poniamo $f(z) = u + iv$ ed effettuiamo le opportune trasformazioni, dal teorema di CAUCHY si ottengono le altre due uguaglianze

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} \displaystyle\int_\sigma u_{i\sigma}\frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial n_i}\,d\sigma - \int_\sigma v_{i\sigma}\frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial \sigma}\,d\sigma = [\sigma]_0\, u(xy), \\ \displaystyle\int_\sigma v_{i\sigma}\frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial n_i}\,d\sigma + \int_\sigma u_{i\sigma}\frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial \sigma}\,d\sigma = [\sigma]_0\, v(xy). \end{cases}$$

Ognuna di tali uguaglianze si traduce nel seguente teorema, tenendo presenti le suddette condizioni per la validità del teorema di CAUCHY:

Se è data una funzione $u(xy)$ armonica in un campo τ, e se esiste una funzione armonica $v(xy)$ nello stesso campo, la quale sia associata alla $u(xy)$ in ogni punto interno di τ, allora è verificata la relazione

$$\int_\sigma u_{i\sigma}\frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial n_i}\,d\sigma - \int_\sigma v_{i\sigma}\frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial \sigma}\,d\sigma = [\sigma]_0\, u(xy).$$

Questo teorema non implica in alcun modo l'esistenza dei limiti delle derivate di u e di v su σ, come vedremo meglio con qualche esempio.

Intanto osserviamo come dall'enunciato teorema si deduca quello di GREEN. Supponiamo che la $v_{i\sigma}$ ammetta, in ogni punto di σ, la derivata prima rispetto all'arco di σ e che tale derivata sia finita, atta all'integrazione definita sovra ogni arco di σ e soddisfacente alla relazione

$$\int_A^B \frac{\partial v_{i\sigma}}{\partial \sigma}\,d\sigma = v_{iB} - v_{iA}.$$

La $\frac{\partial v_{i\sigma}}{\partial \sigma}$ potrebbe avere un numero finito di discontinuità oppure un numero infinito di discontinuità che cadano tutte in un intorno comunque piccolo d'un numero finito di punti. Basta difatti notare che, se nell'arco AB si trova il solo punto C in cui la $\frac{\partial v_{i\sigma}}{\partial \sigma}$ pur essendo finita è discontinua, si ha

$$\int_A^B \frac{\partial v_{i\sigma}}{\partial \sigma} d\sigma = \int_A^{C_1} \frac{\partial v_{i\sigma}}{\partial \sigma} d\sigma + \int_{C_1}^{C_2} \frac{\partial v_{i\sigma}}{\partial \sigma} d\sigma + \int_{C_2}^B \frac{\partial v_{i\sigma}}{\partial \sigma} d\sigma,$$

ove C_1 è compreso fra A e C, e C_2 fra C e B. Poichè ad ε arbitrariamente piccolo si può far corrispondere l'arco $C_1 C_2$ tanto piccolo che si abbia

$$|v_{iC_1} - v_{iC_2}| < \varepsilon, \qquad \left| \int_{C_1}^{C_2} \frac{\partial v_{i\sigma}}{\partial \sigma} d\sigma \right| < \varepsilon,$$

dev'essere

$$\int_A^B \frac{\partial v_{i\sigma}}{\partial \sigma} d\sigma = v_{iB} - v_{iA}.$$

Supporremo inoltre che il numero dei punti in cui la $\frac{\partial v_{i\sigma}}{\partial \sigma}$ ha discontinuità di prima specie sia finito ed indichiamo con

$$\left[\frac{\partial v_{i\sigma}}{\partial \sigma}\right]' \quad \text{e} \quad \left[\frac{\partial v_{i\sigma}}{\partial \sigma}\right]''$$

rispettivamente la derivata a sinistra ed a destra di $v_{i\sigma}$ in quei punti.

La (I) intanto si può trasformare nella

$$\text{(II)} \qquad \int_\sigma u_{i\sigma} \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial n_i} d\sigma + \int_\sigma \left(\frac{\partial v_{i\sigma}}{\partial \sigma}\right) \log \frac{1}{r} d\sigma = [\sigma]_0 u(x\,y).$$

La $\frac{\partial v_{i\sigma}}{\partial \sigma}$ ha un valore unico finito in ogni punto di σ, eccetto quelli in cui essa ha discontinuità di prima specie. E poichè il valore d'un integrale è indipendente dai valori, purchè finiti, che la funzione da integrare ha in un numero discreto di punti, possiamo sostituire alla $\frac{\partial v_{i\sigma}}{\partial \sigma}$, nei punti in cui possiede discontinuità di prima specie, i valori finiti

$$\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{\partial v_{i\sigma}}{\partial \sigma}\right]' + \left[\frac{\partial v_{i\sigma}}{\partial \sigma}\right]''\right\}.$$

Poniamo

$$W = \int_\sigma u_{i\sigma} \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial n_i} d\sigma, \qquad V = -\int_\sigma \frac{\partial v_{i\sigma}}{\partial \sigma} \log \frac{1}{r} d\sigma.$$

Poichè per ipotesi il contorno σ ha solo punti ordinari, senza aggiungere altre ipotesi, esistono, anche nei punti in cui la $\frac{\partial v_{i\sigma}}{\partial \sigma}$ è discontinua, come dimostrai nella Memoria: *Studio sui potenziali logaritmici di strato lineare semplice e doppio, e delle loro derivate*

prime [6]), i limiti

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n_i}\right)_{\nu_i\sigma} \quad \text{e} \quad \left(\frac{\partial V}{\partial n_i}\right)_{\nu_e\sigma},$$

e, nei punti in cui la $v_{i\sigma}$ ha derivata unica, si ha

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n_i}\right)_{\nu_i\sigma} - \left(\frac{\partial V}{\partial n_i}\right)_{\nu_e\sigma} = 2\pi \frac{\partial v_{i\sigma}}{\partial \sigma},$$

nei punti in cui la $v_{i\sigma}$ ha la derivata a sinistra distinta da quella a destra, si ha

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n_i}\right)_{\nu_i\sigma} - \left(\frac{\partial V}{\partial n_i}\right)_{\nu_e\sigma} = \pi \left\{ \left[\frac{\partial v_{i\sigma}}{\partial \sigma}\right]' + \left[\frac{\partial v_{i\sigma}}{\partial \sigma}\right]'' \right\}.$$

Intanto è nel campo esterno

$$W = V,$$

quindi deve esistere la

$$\left(\frac{\partial W}{\partial n_i}\right)_{\nu_e\sigma}.$$

Ma pel teorema di LIAPOUNOFF, così chiamato da E. R. NEUMANN, poichè $u_{i\sigma}$ è continua su σ, deve esistere

$$\left(\frac{\partial W}{\partial n_i}\right)_{\nu_i\sigma} \quad \text{e dev'essere} \quad \left(\frac{\partial W}{\partial n_i}\right)_{\nu_i\sigma} = \left(\frac{\partial W}{\partial n_i}\right)_{\nu_e\sigma};$$

quindi si deduce dalla (II) che esiste

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n_i}\right)_{\nu_i\tau}$$

e che è, ricordando la convenzione fatta pei punti in cui la $v_{i\sigma}$ non ha derivata unica,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n_i}\right)_{\nu_i\sigma} = -\frac{\partial v_{i\sigma}}{\partial \sigma}.$$

Così resta dimostrato che:

Se u e v sono due funzioni armoniche in un campo τ e coniugate in ogni punto interno a τ, e se $\frac{\partial v_{i\sigma}}{\partial \sigma}$ esiste, è finita, ha al più un numero finito di discontinuità di 1ª specie ed al più un numero finito od infinito di discontinuità di 2ª specie che cadano in un intorno comunque piccolo d'un numero finito di punti, allora, nei punti in cui $\frac{\partial v_{i\sigma}}{\partial \sigma}$ è unica, si ha

$$\frac{\partial v_{i\sigma}}{\partial \sigma} = -\left(\frac{\partial u}{\partial n_i}\right)_{\nu_i\sigma}$$

e, nei punti in cui la derivata a destra di $v_{i\sigma}$ è distinta dalla derivata a sinistra, si ha

$$\frac{1}{2}\left\{ \left[\frac{\partial v_{i\sigma}}{\partial \sigma}\right]' + \left[\frac{\partial v_{i\sigma}}{\partial \sigma}\right]'' \right\} = -\left(\frac{\partial u}{\partial n_i}\right)_{\nu_i\sigma}.$$

Inoltre la u verifica il teorema di GREEN

$$\int_\sigma u_{i\sigma} \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial n_i} d\sigma - \int_\sigma \left(\frac{\partial u}{\partial n_i}\right)_{\nu_i\sigma} \log \frac{1}{r} d\sigma = [\sigma]_0 u(xy).$$

[6]) Questi Rendiconti, t. XXIII (1° semestre 1907), pp. 374-393.

3. Volendo studiare ora sotto quale aspetto le predette condizioni siano necessarie per la validità del teorema di GREEN dobbiamo fare un'osservazione. Potrebbe darsi che, se una funzione armonica u verifica il teorema di GREEN, la funzione

$$V' = \int_\sigma u_{i\sigma} \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial \sigma} d\sigma$$

possieda sempre i limiti

$$V'_{i\sigma} \quad \text{e} \quad V'_{e\sigma}$$

e che sia

$$V'_{i\sigma} = V'_{e\sigma}$$

o che almeno se esista $V'_{e\sigma}$ esista anche $V'_{i\sigma}$ e sia

$$V'_{i\sigma} = V'_{e\sigma}.$$

Io ho dimostrato, come lascerò scorgere in un'altra Nota, che, se la u è esprimibile sotto forma d'un potenziale di strato semplice, la suddetta proprietà è vera su qualunque contorno, e che, se la u è esprimibile sotto forma di potenziale di strato doppio, la proprietà è vera quando s'impongano alcune restrizioni od al momento dello strato od alla natura del contorno.

Poichè non ho potuto avere un risultato generale posso soltanto dimostrare il seguente teorema:

Supponiamo:

1° *che sia data una funzione u armonica in un campo τ;*

2° *che la derivata normale della u abbia i limiti finiti*

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n_i}\right)_{v_i\sigma};$$

3° *che*

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n_i}\right)_{v_i\sigma}$$

abbia su σ un numero finito, al più, di discontinuità di 1ª specie ed, al più, un numero finito od infinito di discontinuità di 2ª specie, che cadano tutte in un intorno comunque piccolo d'un numero finito di punti;

4° *che esista una funzione $v'(s)$ dell'arco s del contorno σ, monodroma, finita per ogni valore dell'arco s, la cui derivata prima sia uguale a*

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n_i}\right)_{v_i\sigma}$$

nei punti in cui

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n_i}\right)_{v_i\sigma}$$

considerata come funzione dell'arco di σ è continua od ha discontinuità di 2ª specie;

5° *che la*

$$\int_\sigma u_{i\sigma} \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial \sigma} d\sigma$$

sia continua in ogni punto del piano;

6° *che la u verifichi il teorema di* GREEN;

allora esiste una funzione $v(xy)$ armonica in τ, che ha su σ i valori $v_{i\sigma} = - v'(s)$ e che è associata alla u in ogni punto di τ, escluso il contorno.

Difatti notiamo che per le ipotesi fatte si ha

$$v'(s) - v'(0) = \int_0^S \left(\frac{\partial u}{\partial n_i}\right)_{v_i\sigma} d\sigma$$

e poichè dev'essere

$$\int_0^\sigma \left(\frac{\partial u}{\partial n_i}\right)_{v_i\sigma} d\sigma = 0,$$

la $v'(s)$ è funzione periodica col periodo uguale a σ.

Allora il teorema di GREEN, tenendo presente che il valore d'un integrale non varia se alla funzione da integrare si sostituisce un'altra che differisce dalla prima in un numero discreto di punti, nei quali ha però valori finiti, e notando che la $v'(s)$ ha in ogni punto di σ la derivata a destra e quella a sinistra finite, si trasforma nell'altro

$$\text{(II)}' \qquad \int_\sigma u_{i\sigma} \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial n_i} d\sigma + \int_\sigma v'(s) \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial \sigma} d\sigma = [\sigma]_0 u(xy).$$

Indichiamo con M_1 il primo membro di tale uguaglianza. Con l'effettiva derivazione si verifica che in tutto il piano ad M_1 è associata la funzione

$$M_2 = \int_\sigma u_{i\sigma} \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial \sigma} d\sigma - \int_\sigma v'(s) \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma, \text{ escludendo } \sigma;$$

e poichè M_1 è nullo nel campo esterno a τ, M_2 dev'essere costante nello stesso campo. Ma M_2 è zero nei punti all'infinito del piano, quindi dev'essere zero in tutto il campo esterno a τ. Per ipotesi la

$$\int_\sigma u_{i\sigma} \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial \sigma} d\sigma$$

è continua in tutti i punti del piano, quindi M_2 definisce una funzione armonica $2\pi v(xy)$ in tutto il campo τ, associata a $2\pi u(xy)$ ed avente sul contorno σ i valori limiti

$$2\pi v_{i\sigma} = - 2\pi v'(s).$$

4. Pria di terminare questo capitolo dobbiamo accennare ad un teorema che può essere inteso come reciproco di quello di GREEN.

Siano date m_σ e g_σ, funzioni dell'arco del contorno σ d'un campo τ. La m_σ sia continua e quindi atta all'integrazione definita estesa a tutto il contorno σ, e la g_σ, pur potendo avere un numero finito di discontinuità di 1ª specie ed un numero finito od infinito di discontinuità di 2ª specie le quali cadano tutte in un intorno comunque piccolo d'un numero discreto di punti, sia però finita ed in ogni punto monodroma: esista inoltre una

funzione φ_σ, *monodroma e finita dell'arco di* σ *la cui derivata prima sia uguale a* g_σ *nei punti in cui* g_σ *ha discontinuità di* 2^a *specie od è continua. Se lungo il contorno* σ' *d'un campo* τ', *esterno ed analogo a* τ, *il potenziale di strato doppio*

$$W = \int_\sigma m_\sigma \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial n_i} d\sigma$$

è uguale al potenziale di strato semplice

$$V = \int_\sigma g_\sigma \log \frac{1}{r} d\sigma,$$

esiste una funzione u, *armonica nel campo* τ, *la quale ha sul contorno i valori limiti*

$$u_{i\sigma} = m_\sigma :$$

la sua derivata normale ha su σ, *percorrendo le normali, i valori limiti*

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n_i}\right)_{\nu_i \sigma} = g_\sigma$$

e la u *è esprimibile sotto la forma analitica fornita dal teorema di* GREEN.

Difatti, notiamo che la

$$W - V$$

è nulla in ogni punto di σ', quindi, essendo armonica in τ', è nulla in ogni punto di τ', e perciò in tutto il campo esterno a τ. Allora è

$$W_{e\sigma} - V_\sigma = 0,$$

e poichè V_σ, pensata come funzione dell'arco di σ, è monodroma, finita, continua e periodica, col periodo σ, anche tale dev'essere $W_{e\sigma}$ e quindi anche m_σ. Inoltre la g_σ è monodroma finita e generalmente continua, perciò è atta all'integrazione definita estesa a σ, e, per l'ipotesi fatta, dev'essere

$$\varphi(\sigma) - \varphi(0) = \int_0^\sigma g_\sigma d\sigma.$$

Nei punti in cui g_σ ha discontinuità di prima specie facilmente si vede che le derivate a destra ed a sinistra di φ_σ esistono, sono finite ed uguali al limite destro e sinistro di g_σ. Sicchè se nell'integrale V sostituisco al valore di g_σ, nei punti in cui questa ha una discontinuità di 1^a specie, il suo limite destro, il valore di V, in ogni punto che non appartenga a σ, non si altera, mentre si ha il vantaggio che la nuova funzione g_σ è in ogni punto di σ la derivata a destra di φ_σ. Indicando con r_0 il valore di r relativo all'origine dell'arco di σ, si ha

$$V = [\varphi(\sigma) - \varphi(0)] \log \frac{1}{r_0} - \int_\sigma \varphi_\sigma \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial \sigma} d\sigma,$$

e poichè nei punti all'infinito del piano è

$$W - V = 0, \qquad W = 0, \qquad \int_\sigma \varphi_\sigma \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial \sigma} d\sigma = 0,$$

dev'essere

$$\varphi(\sigma) - \varphi(0) = 0$$

e quindi φ_σ dev'essere periodica con periodo uguale a σ. Allora, come dimostrai nella citata Memoria: *Studio sui potenziali logaritmici,* etc. in ogni punto di σ esistono i limiti

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n_i}\right)_{v_i\sigma} \quad \text{e} \quad \left(\frac{\partial V}{\partial n_i}\right)_{v_e\sigma}$$

e, nei punti in cui φ_σ ha derivata unica, è

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n_i}\right)_{v_i\sigma} - \left(\frac{\partial V}{\partial n_i}\right)_{v_e\sigma} = -2\pi g_\sigma$$

nei punti in cui la derivata a destra di φ_σ è distinta da quella a sinistra, è, adottando i simboli precedenti,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n_i}\right)_{v_i\sigma} - \left(\frac{\partial V}{\partial n_i}\right)_{v_e\sigma} = -\pi\{[g_\sigma]' + [g_\sigma]''\}.$$

Intanto, poichè è, nel campo esterno a τ, $W - V = 0$, dev'esistere in ogni punto di σ il limite

$$\left(\frac{\partial W}{\partial n_i}\right)_{v_e\sigma} = \left(\frac{\partial V}{\partial n_i}\right)_{v_e\sigma}$$

ed allora pel teorema di LIAPOUNOFF deve anche esistere il limite

$$\left(\frac{\partial W}{\partial n_i}\right)_{v_i\sigma} \quad \text{e dev'essere} \quad \left(\frac{\partial W}{\partial n_i}\right)_{v_i\sigma} = \left(\frac{\partial W}{\partial n_i}\right)_{v_e\sigma}.$$

Sicchè la

$$\frac{1}{2\pi}(W - V)$$

definisce una funzione $u(xy)$ armonica in τ, i cui valori limiti $u_{i\sigma}$ sono uguali ad m_σ, mentre la sua derivata normale, nei punti in cui φ_σ ha derivata unica, ha i valori limiti

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n_i}\right)_{v_i\sigma} = g_\sigma$$

e nei punti, in numero discreto, in cui le derivate a destra ed a sinistra di φ_σ sono distinte, ha i valori limiti

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n_i}\right)_{v_i\sigma} = \frac{1}{2}\{[g_\sigma]' + [g_\sigma]''\}.$$

Pertanto possiamo scrivere

$$\int_\sigma u_{i\sigma} \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial n_i} d\sigma - \int_\sigma \left(\frac{\partial u}{\partial n_i}\right)_{v_i\sigma} \log \frac{1}{r} d\sigma = [\sigma]_0 u(xy).$$

Alcune questioni di esistenza.

1. Dato un potenziale logaritmico di strato semplice

$$V = \int_\sigma g_\sigma \log \frac{1}{r} d\sigma$$

con l'effettiva derivazione si verifica ch'esso è la funzione coniugata dell'altra

$$W = \int g_\sigma \theta\, d\sigma.$$

Mi riserbo di pubblicare uno studio completo sulla W e di dimostrare ch'essa è funzione armonica nel campo τ limitato da σ, quantunque sia determinata a meno d'una costante arbitraria, e che inoltre è funzione armonica in ogni altro campo semplicemente connesso, che non abbia punti interni appartenenti a σ. Per ora allo scopo d'illustrare gli argomenti trattati in questa memoria e nell'altra *Sulle condizioni di validità del teorema di* CAUCHY considererò qualche caso particolare per semplicità. Supponiamo quindi che φ_σ sia una funzione dell'arco di σ, monodroma, finita, continua e periodica con periodo uguale a σ. Supponiamo inoltre che φ_σ abbia derivata unica finita e continua in ogni punto di σ, eccettuati al più un numero discreto di punti, in cui tale derivata, quantunque unica, abbia discontinuità di 2ª specie, ed eccettuati un altro numero discreto di punti in cui la derivata a destra di φ_σ sia distinta da quella a sinistra. Indichiamo con g_σ la derivata a destra di φ_σ in ogni punto di σ, e poniamo

$$V^{(1)} = -\int_\sigma g_\sigma \log \frac{1}{r} d\sigma = \int_\sigma \varphi_\sigma \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial \sigma} d\sigma.$$

La $V^{(1)}$ è funzione associata della

$$W^{(1)} = + \int \varphi_\sigma \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial n_i} d\sigma.$$

La $W^{(1)}$ è funzione armonica determinata a meno d'una costante arbitraria che può comparire in φ_σ. Entrambe le funzioni $V^{(1)}$ e $W^{(1)}$ sono monodrome finite e continue in τ. Poniamo

$$V^{(2)} = \int_\sigma V^{(1)}_{i\sigma} \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial \sigma} d\sigma, \qquad W^{(2)} = \int_\sigma V^{(1)}_{i\sigma} \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial n_i} d\sigma,$$

$$V^{(3)} = \int_\sigma V^{(2)}_{i\sigma} \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial \sigma} d\sigma, \qquad W^{(3)} = \int_\sigma V^{(2)}_{i\sigma} \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial n_i} d\sigma,$$

. . . .

$$V^{(n)} = \int_\sigma V^{(n-1)}_{i\sigma} \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial \sigma} d\sigma, \qquad W^{(n)} = \int_\sigma V^{(n-1)}_{i\sigma} \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial n_i} d\sigma$$

e dimostriamo che se $V_{i\sigma}^{(n-2)}$ e $V_{i\sigma}^{(n-1)}$ esistono, sono monodrome, finite, continue e periodiche dell'arco di σ, col periodo uguale a σ, delle stesse proprietà gode $V_{i\sigma}^{(n)}$. Difatti $W^{(n-1)}$ e $V^{(n-1)}$ sono associate e, per l'ipotesi fatta, armoniche in τ: possiamo quindi applicare la formula (II) del precedente capitolo, e si ha

$$\int_\sigma W_{i\sigma}^{(n-1)} \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial n_i} d\sigma - \int_\sigma V_{i\sigma}^{(n-1)} \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial \sigma} d\sigma = [\sigma]_0 W^{(n-1)}.$$

Poichè il primo integrale del primo membro ed il secondo membro di tale uguaglianza in τ sono funzioni armoniche, lo stesso deve verificarsi pel secondo integrale del primo membro ch'è $V^{(n)}$, quindi resta dimostrato l'asserto. Poichè φ_σ e $V_{i\sigma}^{(1)}$ sono effettivamente funzioni monodrome, finite, continue e periodiche dell'arco di σ, col periodo uguale a σ, tutte le funzioni V e le funzioni W sono armoniche in τ. Pertanto alla

$$f(z) = W^{(n)} + i V^{(n)}$$

è applicabile il teorema di CAUCHY; ma se si tenti di provare l'esistenza del limite delle derivate prime di W e di V su σ s'incontrerebbero delle difficoltà insormontabili, come si può dedurre dall'esempio seguente.

2. Supponiamo che a σ appartenga un segmento AB ed indichiamo con σ' la parte rimanente di σ. Mi valgo d'un contorno siffatto unicamente per la semplicità dei calcoli. Assumiamo il punto A come origine degli archi S di σ, i quali sian positivi nel verso AB del segmento AB: sia C un punto fisso compreso fra A e B e sia $AP = S$. Consideriamo il potenziale logaritmico di strato semplice

$$V^{(1)} = -\int_\sigma g_\sigma \log \frac{1}{r} d\sigma$$

e supponiamo che g_σ abbia nel tratto AC il valore -1 e nel tratto CB il valore 1: il punto C possiamo pensare che appartenga a CB e che quindi il valore di g_σ in C sia 1. La funzione φ_σ che abbia in AC i valori

$$-S + 2AC$$

ed in CB i valori

$$S$$

è monodroma finita e continua per ogni valore di S compreso fra O ed AB ed ha la derivata a destra, escluso l'estremo superiore, uguale a g_σ. Nella parte σ' la g_σ abbia valori arbitrarî, purchè soddisfi alle condizioni del precedente paragrafo e la φ_σ abbia, nel punto B, il limite destro uguale ad AB, e, nel punto A, il limite sinistro uguale a $2AC$. Così la $W^{(1)}$ e la $V^{(1)}$ sono armoniche nel campo τ ed associate. Ma alla $W^{(1)}$ non potremmo applicare il teorema di GREEN, perchè la sua derivata normale ha limite infinito nel punto C. Per dimostrar ciò notiamo che si può scegliere AB come asse

delle x ed allora, preso O sul raggio ν_i uscente da C, si ha

$$\left(\frac{\partial W}{\partial n_i}\right)_0 = \int_{zero}^{AB} \varphi_\sigma \frac{(a-x)^2 - y^2}{[(a-x)^2 + y^2]^2} d a$$

$$= \int_{zero}^{x} (2x - a) \frac{(a-x)^2 - y^2}{[(a-x)^2 + y^2]^2} d a + \int_{x}^{AB} a \frac{(a-x)^2 - y^2}{[(a-x)^2 + y^2]^2} d a$$

$$= \int_{zero}^{-x} (t - x) \frac{(t^2 - y^2) d t}{(t^2 + y^2)^2} + \int_{zero}^{AB-x} (t + x) \frac{(t^2 - y^2) d t}{(t^2 + y^2)^2} .$$

Questi due integrali si calcolano facilmente e si vede che il loro limite per $y = 0$ è infinito logaritmicamente [7]).

3. Volendo qualche esempio facile che serva di applicazione a quanto io ho dimostrato sul teorema di GREEN, basta considerare che σ sia una circonferenza e che φ_σ sia una funzione dell'arco di questa, monodroma, finita, continua e periodica col periodo uguale a σ. Si supponga inoltre che φ_σ ammetta la derivata prima, la quale sia generalmente continua e finita. Con g_σ si rappresenti la derivata a destra di φ_σ. La g_σ è monodroma e finita; in un numero discreto di punti ha discontinuità di 1ª e di 2ª specie; e nei rimanenti punti è continua. La derivata normale del potenziale logaritmico di strato semplice

$$V^{(1)} = \int_\sigma g_\sigma \log \frac{1}{r} d \sigma$$

non converge uniformemente ai suoi valori limiti su σ, percorrendo le normali. Intanto la funzione associata di $V^{(1)}$ è

$$W^{(1)} = \int_\sigma \varphi_\sigma \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial n} d \sigma$$

la quale, a meno d'una costante arbitraria che può figurare in φ_σ, è armonica. Inoltre è

$$W_{i\sigma}^{(1)} = W_\sigma^{(1)} + \pi \varphi_\sigma ,$$

e poichè, essendo σ una circonferenza, è

$$W_\sigma^{(1)} = \text{costante},$$

si ha

$$\frac{\partial W_{i\sigma}^{(1)}}{\partial \sigma} = \pi g_\sigma ,$$

7) Questo esempio, per rispetto alla analoga questione dello spazio, è del sig. STEKLOFF, come gentilmente mi ha comunicato il prof. R. MARCOLONGO. Molti altri potrebbero ricavarsi dalla considerazione di quanto dimostrai sui limiti delle derivate prime dei potenziali di strato semplice e doppio che presentino caratteristiche singolarità [loc. cit. [6])].

quindi alla $V^{(1)}$ è applicabile il teorema di GREEN, poichè dev'essere $\left(\frac{\partial V^{(1)}}{\partial n_i}\right)_{v_i\sigma} = -\pi g_\sigma$;

ed anche $\int_\sigma V_{i\sigma}^{(1)} \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial n_i} d\sigma + \pi \int_\sigma g_\sigma \log \frac{1}{r} d\sigma = [\sigma]_0 V_0^{(1)}$.

S. Demetrio Corone, 23 dicembre 1908.

GIUSEPPE PUCCIANO.

NOTA ADDIZIONALE.

I teoremi enunciati nelle pagine 102, 103, 104 e 105 di questa Memoria, possono, con maggiore uniformità, estensione e rigore, essere espressi nel seguente modo:

TEOREMA I (vedi pag. 102).—*Se u e v sono due funzioni armoniche in un campo τ e coniugate in ogni punto interno a τ; se esistono la derivata a destra $\left[\frac{\partial v_{i\sigma}}{\partial \sigma}\right]'$ e la derivata a sinistra $\left[\frac{\partial v_{i\sigma}}{\partial \sigma}\right]''$ della $v_{i\sigma}$ rispetto all'arco di σ; se tali derivate sono, in ogni punto di σ, finite, e verificano, purchè sia r finito e non nullo, le relazioni*

$$\int_\sigma \left[\frac{\partial\left(v_{i\sigma} \log \frac{1}{r}\right)}{\partial \sigma}\right]' d\sigma = \int_\sigma \left[\frac{\partial\left(v_{i\sigma} \log \frac{1}{r}\right)}{\partial \sigma}\right]'' d\sigma = 0,$$

allora si ha

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n_i}\right)_{v_i\sigma} = -\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{\partial v_{i\sigma}}{\partial \sigma}\right]' + \left[\frac{\partial v_{i\sigma}}{\partial \sigma}\right]''\right\},$$

$$\int_\sigma u_{i\sigma} \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial n_i} d\sigma - \int_\sigma \left(\frac{\partial u}{\partial n_i}\right)_{v_i\sigma} \log \frac{1}{r} d\sigma = [\sigma]_0 u(xy).$$

TEOREMA II (vedi pp. 103 e 104). — *Supponiamo:*

1° *che sia data una funzione u armonica in un campo τ;*

2° *che la derivata normale della u ammetta, in ogni punto di σ, i limiti finiti*

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n_i}\right)_{v_i\sigma};$$

3° che la

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n_i}\right)_{v;\sigma}$$

pensata come funzione dell'arco di σ, *avente origine nel punto generico* A, *sia atta all'integrazione definita in tutto il contorno* σ, *e che l'integrale indefinito*

$$v'_\sigma = \int \left(\frac{\partial u}{\partial n_i}\right)_{v;\sigma} d\sigma$$

ammetta, rispetto al limite superiore variabile, la derivata prima a destra $\left[\frac{\partial v'_\sigma}{\partial \sigma}\right]'$ *e la derivata prima a sinistra* $\left[\frac{\partial v'_\sigma}{\partial \sigma}\right]''$;

4° che tali derivate, in ogni punto di σ, *siano finite, e verifichino, purchè sia* r *finito e non nullo, le relazioni*

$$\int_\sigma \left(\frac{\partial u}{\partial n_i}\right)_{v;\sigma} \log\frac{1}{r}\, d\sigma = \int_\sigma \left[\frac{\partial v'_\sigma}{\partial \sigma}\right]' \log\frac{1}{r}\, d\sigma = \int_\sigma \left[\frac{\partial v'_\sigma}{\partial \sigma}\right]'' \log\frac{1}{r}\, d\sigma$$

$$\int_\sigma \left[\frac{\partial\left(v'_\sigma \log\frac{1}{r}\right)}{\partial \sigma}\right]' d\sigma = \log\frac{1}{r_A}([v'_A]'' - [v'_A]');$$

5° che la

$$\int_\sigma u_{i\sigma} \frac{\partial \log\frac{1}{r}}{\partial \sigma} d\sigma$$

sia continua in ogni punto del piano;

6° che la u *verifichi il teorema di* GREEN;

allora esiste una funzione $v(xy)$ *armonica in* τ, *la quale ha su* σ *i valori* $v_{i\sigma} = - v'_\sigma$ *e che è associata alla* u *in ogni punto di* τ, *escluso il contorno.*

TEOREMA III (vedi pp. 104 e 105). — *Siano date* m_σ *e* g_σ *funzioni dell'arco, avente origine in* A, *del contorno* σ *d'un campo* τ. *La* m_σ *sia uniforme, finita e continua, e la* g_σ *sia uniforme, finita ed atta all'integrazione definita in tutto il contorno* σ. *L'integrale indefinito*

$$\varphi_\sigma = \int g_\sigma d\sigma$$

ammetta la derivata prima a destra $\left[\frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial \sigma}\right]'$ *e quella a sinistra* $\left[\frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial \sigma}\right]''$ *in ogni punto di* σ, *ed esse siano finite e verifichino, purchè sia* r *finito e non nullo, le relazioni*

$$\int_\sigma g_\sigma \log\frac{1}{r}\, d\sigma = \int_\sigma \left[\frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial \sigma}\right]' \log\frac{1}{r}\, d\sigma = \int_\sigma \left[\frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial \sigma}\right]'' \log\frac{1}{r}\, d\sigma,$$

$$\int_\sigma \left[\frac{\partial\left(\varphi_\sigma \log\frac{1}{r}\right)}{\partial \sigma}\right]' d\sigma = \log\frac{1}{r_A}([\varphi_A]'' - [\varphi_A]').$$

Se in ogni punto del contorno σ' d'un campo τ', esterno ed analogo a τ, il potenziale di strato doppio

$$W = \int_\sigma m_\sigma \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial \sigma} d\sigma$$

è uguale al potenziale di strato semplice

$$V = \int_\sigma g_\sigma \log \frac{1}{r} d\sigma,$$

esiste una funzione u, armonica nel campo τ, la quale ha sul contorno i valori limiti

$$u_{i\sigma} = m_\sigma :$$

la sua derivata normale ha in ogni punto di σ, percorrendo le normali, i valori limiti

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n_i}\right)_{\nu_i \sigma} = \left\{\left[\frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial \sigma}\right]' + \left[\frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial \sigma}\right]''\right\}$$

e la u è esprimibile nella forma analitica fornita dal teorema di GREEN.

Le dimostrazioni dei predetti teoremi, tranne le variazioni di forma dovute alla diversità dell'enunciazione delle ipotesi, sono analoghe a quelle che si riscontrano nelle pagine citate.

S. Demetrio Corone, 11 aprile 1909.

GIUSEPPE PUCCIANO.

ÜBER DAS KONVERGENZPROBLEM DER DIRICHLET'SCHEN REIHEN.

Von **Edmund Landau** (Göttingen).

Adunanza del 14 marzo 1909.

Einleitung.

Ich habe in einer früheren Arbeit [1]) zum ersten Male einen Satz bewiesen, welcher gestattet, aus Eigenschaften der durch eine Dirichlet'sche Reihe definierten analytischen Funktion einen Schluss über die Konvergenz der Reihe zu ziehen. Der Satz lautete:

Es sei für alle $\delta > 0$

$$(1)\qquad b_n = O(n^\delta),$$

also a fortiori die Reihe mit der komplexen Variablen $s = \sigma + ti$

$$(2)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$$

für $\sigma > 1$ *absolut konvergent. Die dort durch* (2) *definierte analytische Funktion* $f(s)$ *sei für* $\sigma \geqq \eta$ *regulär, wo* $0 < \eta < 1$ *ist; ferner sei für* $|t| \geqq 1$, $\sigma \geqq \eta$

$$|f(s)| < B|t|^k,$$

wo B *und* $k \geqq 0$ *konstant sind. Dann ist die Reihe* (2) *auf der Geraden* $\sigma = 1$ *und darüber hinaus konvergent, nämlich mindestens für*

$$\sigma > 1 - \frac{1-\eta}{2^{\nu+1}},$$

wo

$$[k] = \nu$$

gesetzt ist.

---

[1]) Satz IX der *Beiträge zur analytischen Zahlentheorie* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. XXVI (2. Sem. 1908), S. 169-302], S. 252-255. Ich bemerke bei dieser Gelegenheit, dass in der Reproduktion einer Hilfsbetrachtung aus dieser Arbeit in meiner späteren Abhandlung *Zwei neue Herleitungen für die asymptotische Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grenze* [Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Jahrgang 1908, S. 746-764] ein wesentliches Wort versehentlich fortgeblieben ist. Auf S. 758, Z. 10 v. u. lies *definiert, stetig und* statt *definiert und.* Selbstverständlich ist die Voraussetzung der Stetigkeit für das spezielle $\varphi(x)$ auf S. 763 erfüllt.

Nun hat kürzlich Herr SCHNEE [2]) den Fall

$$0 \leqq k < 1,$$

wo also

$$\nu = 0$$

ist und mein Ergebnis

$$1 - \frac{1-\eta}{2} = \frac{\eta+1}{2}$$

lautet, genauer untersucht und dabei gefunden: Unter meinen Voraussetzungen, auch wenn die Annahme

$$0 < \eta$$

noch fortgelassen wird, konvergiert (2) für

$$\sigma > 1 - \frac{1-\eta}{1+k}$$

$$= \frac{\eta+k}{1+k},$$

was kleiner, d. h. besser ist als mein $\frac{\eta+1}{2}$.

Der Beweis von Herrn SCHNEE ist in seiner zweiten Hälfte recht kompliziert, und es erscheint mir daher von Interesse, einen an dieser Stelle vereinfachten Beweis des Satzes von Herrn SCHNEE mitzuteilen, den ich mir jetzt zurechtgelegt habe. Nach Voranschickung von fünf Hilfssätzen im § 1 geschieht dies im § 2. Da Herr SCHNEE seiner Publikation den allgemeineren (wenn auch nicht allgemeinsten) Typus DIRICHLET'scher Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n s}$$

(an Stelle des Spezialfalls

$$\lambda_n = \log n)$$

zu Grunde legt, wo

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots,$$

(3)
$$\limsup_{n=\infty} \frac{\log n}{\lambda_n} = a$$

und für jedes $\delta > 0$

(4)
$$\frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = O(e^{\lambda_n(a+\delta)})$$

ist, so werde ich das Gleiche tun und für diesen allgemeineren Typus, wo statt (1)

$$b_n = O(e^{\lambda_n \delta})$$

vorausgesetzt wird und

$$\eta < a$$

(statt $\eta < 1$) sein soll, das SCHNEE'sche Endresultat

$$\frac{\eta + ka}{1+k}$$

---

[2]) *Zum Konvergenzproblem der* DIRICHLET'*schen Reihen* [Mathematische Annalen, Bd. LXVI (1909), S. 337-349].

auf vereinfachtem Wege erreichen. In § 3 werde ich zeigen, dass im Falle

$$\eta + ka < 0$$

sich dies Ergebnis zu

$$\eta + ka$$

verschärfen lässt.

All dies gilt für

$$0 \leq k < 1.$$

Der zweite Teil der Arbeit beschäftigt sich mit dem Fall

$$k \geq 1$$

und untersucht, wie weit man in diesem Fall mit der älteren Methode meiner früheren Arbeit einerseits und der im vorliegenden ersten Teil vereinfachten Methode von Herrn SCHNEE andererseits gelangen kann. Es ergibt sich, dass jede dieser Methoden in manchen Fällen das schärfere Resultat liefert. Im einzelnen beweise ich, nachdem im § 4 zwei Hilfssätze vorangeschickt sind, in § 5 für den allgemeineren Typus und unter der weiteren Annahme

$$-a \leq \eta$$

(die natürlich nur für $a > 0$ einen Inhalt hat) durch die erstgenannte Methode mein damaliges Ergebnis; dasselbe lautet hier

$$a - \frac{1}{2^{\nu+1}}(a - \eta). \tag{5}$$

Im § 6 ermittele ich durch die zweitgenannte Methode die gleichfalls giltige Schranke

$$a - \frac{\nu + 1 - k}{\nu + 2^{\nu} - k}(a - \eta). \tag{6}$$

Der alte Wert (5) oder der neue Wert (6) ist besser, je nachdem der Bruchbestandteil $k - \nu$ in k

$$> \frac{2^{\nu}}{2^{\nu+1} - 1}$$

oder

$$< \frac{2^{\nu}}{2^{\nu+1} - 1}$$

ist. Jedenfalls ist also das äusserste erzielte Ergebnis

$$a - (a - \eta)\,\text{Max.}\left(\frac{1}{2^{\nu+1}}, \frac{\nu + 1 - k}{\nu + 2^{\nu} - k}\right). \tag{7}$$

Der dritte Teil der vorliegenden Arbeit gelangt für $0 \leq k < 1$ auf anderem Wege zu dem SCHNEE'schen Ergebnis mit dem Zusatze des § 3 und für $k \geq 1$ noch weiter als der zweite Teil, nämlich (sogar ohne die Annahme $-a \leq \eta$) auch zu

$$\text{Min.}\left(\frac{\eta + ka}{1 + k}, \eta + ka\right),$$

und zwar dadurch, dass ich von einem neuen funktionentheoretischen Hilfssatz der

Herren PHRAGMÉN und LINDELÖF [3]) Gebrauch mache und eine Folgerung, die Herr LINDELÖF [4]) schon daraus gezogen hat, mit der Methode von Herrn SCHNEE kombiniere.

Wenn auch die Beweisanordnung des dritten Teils die wenigsten Rechnungen erfordert, so erscheint es mir doch von Interesse, für $0 \leqq k < 1$ die zu demselben Ergebnis führenden Untersuchungen des ersten Teils (von denen übrigens manches im dritten Teil benutzt wird) und für $k \geqq 1$ die ein geringeres Ergebnis liefernden Untersuchungen des zweiten Teils vollständig zu publizieren, zumal manche dabei verwendeten Kunstgriffe als neu anzusehen sind und die ganzen Untersuchungen auch für andere Zwecke der analytischen Zahlentheorie wichtig sind; insbesondere erscheint mir der ziemlich tief liegende Hilfssatz 6 an sich von Interesse.

Zur Bequemlichkeit des Lesers habe ich aber auch manche aus neuerer Zeit bekannten Hilfssätze mit Beweisen meinen eigenen Untersuchungen vorangeschickt. Der Leser braucht die oben zitierten Arbeiten von mir und den Herren SCHNEE, PHRAGMÉN und LINDELÖF daher nicht zu kennen.

Die Einteilung des dritten Teils ist folgende. Im § 7 beweise ich im Anschluss an die Herren PHRAGMÉN und LINDELÖF ihren allgemeinen funktionentheoretischen Hilfssatz in der speziellen, hier anzuwendenden Gestalt. Im § 8 ziehe ich im Anschluss an Herrn LINDELÖF aus jenem Satz eine allgemeine funktionentheoretische Folgerung. Im § 9 beweise ich alsdann für alle $k \geqq 0$ die Konvergenz der DIRICHLET'schen Reihe in der Halbebene

$$\sigma > \text{Min.}\left(\frac{\eta + ka}{1 + k},\ \eta + ka\right).$$

ERSTER TEIL.

§ 1.

Es ist im folgenden durchweg

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \ldots$$

eine Folge reeller Grössen, für welche

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots < \lambda_n < \lambda_{n+1} < \cdots$$

ist, welche ferner ins Unendliche so wachsen, dass

$$\limsup_{n=\infty} \frac{\log n}{\lambda_n} = a \tag{3}$$

[3]) *Sur une extension d'un principe classique de l'Analyse et sur quelques propriétés des fonctions monogènes dans le voisinage d'un point singulier* [Acta Mathematica, Bd. XXXI (1908), S. 381-406], S. 382.

[4]) *Quelques remarques sur la croissance de la fonction* $\zeta(s)$ [Bulletin des Sciences mathématiques, Ser. II, Bd. XXXII (1908), S. 341-356], S. 344-348.

existiert, wo

$$a \geqq 0$$

ist, und welche schliesslich für jedes $\delta > 0$ die Relation

$$(4) \qquad \frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = O(e^{\lambda_n(a+\delta)})$$

erfüllen.

HILFSSATZ 1. — *Es ist für*

$$x < -a$$

die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n x}$$

konvergent.

Beweis: Nach (3) ist für jedes $\delta > 0$ von einem gewissen n an

$$\log n < \lambda_n (a + \delta),$$

$$\frac{\log n}{a + \delta} < \lambda_n;$$

wegen

$$x < 0$$

ist also

$$e^{\lambda_n x} = O(e^{\frac{\log n}{a+\delta} x})$$

$$= O(n^{\frac{x}{a+\delta}});$$

wegen

$$x < -a$$

ist bei passender Wahl eines positiven δ

$$x < -(a + \delta),$$

$$\frac{x}{a + \delta} < -1,$$

woraus die Behauptung folgt.

HILFSSATZ 2. — *Für*

$$x \geqq -a$$

und jedes $\delta > 0$ *ist*

$$\sum_{\lambda_n \leqq x} e^{\lambda_n x} = O(e^{x(x+a+\delta)}).$$

Hierbei bezieht sich die Abschätzung auf stetig wachsendes x.

Beweis: Es ist

$$\sum_{\lambda_n \leqq x} e^{\lambda_n x} = \sum_{\lambda_n \leqq x} e^{\lambda_n (x+a+\delta)} e^{\lambda_n(-a-\delta)},$$

also wegen

$$x + a + \delta > 0$$

$$\sum_{\lambda_n \leqq x} e^{\lambda_n x} \leqq e^{x(x+a+\delta)} \sum_{\lambda_n \leqq x} e^{\lambda_n(-a-\delta)};$$

nun ist nach Hilfssatz 1

$$\sum_{\lambda_n \leqq x} e^{\lambda_n(-a-\delta)} = O(1),$$

woraus die Behauptung folgt.

Es werde jetzt im Folgenden durchweg

$$w_m = \frac{\lambda_m + \lambda_{m+1}}{2}$$

gesetzt, für $m = 1, 2, \ldots$.

Hilfssatz 3. — *Es ist für* $x < -a$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_n x}}{|w_m - \lambda_n|} = O(1).$$

Hierbei bezieht sich die Abschätzung auf ganzzahlig wachsendes m, und die Konvergenz der Reihe steht nach Hilfssatz 1 von vornherein fest, da der absolute Betrag des Nenners bei festem m obendrein für $n = \infty$ über alle Grenzen wächst.

Beweis: Nach (4) ist bei gegebenem $\delta > 0$

$$\frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = O\left(e^{\lambda_n\left(a+\frac{\delta}{2}\right)}\right),$$

also für $n \geqq n_0 = n_0(\delta)$

$$\frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} < e^{\lambda_n(a+\delta)},$$

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n > e^{-\lambda_n(a+\delta)},$$

folglich für $n \geqq n_0$ nebst jedem $v > 0$

$$\lambda_{n+v} - \lambda_n = \sum_{\nu=n}^{n+v-1} (\lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu)$$

$$> \sum_{\nu=n}^{n+v-1} e^{-\lambda_\nu(a+\delta)}$$

$$\geqq v e^{-\lambda_{n+v-1}(a+\delta)}. \tag{8}$$

Nun zerlege ich für jedes m

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_n x}}{|w_m - \lambda_n|}$$

in vier Teile

$$\sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 + \sum\nolimits_3 + \sum\nolimits_4,$$

wo

$$\begin{array}{ll} \lambda_n \leqq \lambda_m - 1 & \text{in } \sum_1, \\ \lambda_m - 1 < \lambda_n \leqq \lambda_m & \text{in } \sum_2, \\ \lambda_{m+1} \leqq \lambda_n < \lambda_{m+1} + 1 & \text{in } \sum_3, \\ \lambda_{m+1} + 1 \leqq \lambda_n & \text{in } \sum_4 \end{array}$$

ist. Für alle $m \geqq 1$ enthalten $\sum_2$ und $\sum_3$ mindestens je ein Glied und nur endlich viele, $\sum_4$ unendlich viele, $\sum_1$ keines oder endlich viele.

Es ist in $\sum_1$

$$\begin{aligned}|w_m - \lambda_n| &= w_m - \lambda_n \\ &> \lambda_m - \lambda_n \\ &\geqq 1,\end{aligned}$$

in $\sum_4$

$$\begin{aligned}|w_m - \lambda_n| &= \lambda_n - w_m \\ &> \lambda_n - \lambda_{m+1} \\ &\geqq 1;\end{aligned}$$

daher ist

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_1 &\leqq \sum_{\lambda_n \leqq \lambda_m - 1} e^{\lambda_n x} \\ &< \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n x} \\ &= O(1), \\ \sum\nolimits_4 &< \sum_{\lambda_n \geqq \lambda_{m+1}+1} e^{\lambda_n x} \\ &< \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n x} \\ &= O(1).\end{aligned}$$

Bei gegebenem $\delta > 0$ ist für alle $m \geqq m_0 = m_0(\delta)$ der Index des ersten Gliedes von $\sum_2$ grösser als $n_0 = n_0(\delta)$, also in jedem Glied von $\sum_2$ nach (8)

$$\begin{aligned}|w_m - \lambda_n| &= w_m - \lambda_n \\ &= \frac{\lambda_{m+1} + \lambda_m}{2} - \lambda_n \\ &\geqq \frac{\lambda_{m+1} + \lambda_n}{2} - \lambda_n \\ &= \frac{\lambda_{m+1} - \lambda_n}{2} \\ &\geqq \tfrac{1}{2}(m - n + 1)\, e^{-\lambda_m(a+\delta)}\end{aligned}$$

und in jedem Glied von $\sum_3$

$$\begin{aligned}|w_m - \lambda_n| &= \lambda_n - w_m \\ &= \lambda_n - \frac{\lambda_{m+1} + \lambda_m}{2} \\ &\geqq \lambda_n - \frac{\lambda_n + \lambda_m}{2} \\ &= \frac{\lambda_n - \lambda_m}{2} \\ &\geqq \tfrac{1}{2}(n - m)\, e^{-\lambda_{n-1}(a+\delta)}.\end{aligned}$$

Daher ist

$$\sum\nolimits_2 = O\left(e^{\lambda_m(a+\delta)} \cdot \sum_{\lambda_{m-1}<\lambda_n\leqq\lambda_m} \frac{e^{\lambda_n \varkappa}}{m-n+1}\right)$$
$$= O\left(e^{\lambda_m(\varkappa+a+\delta)} \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{m-n+1}\right)$$
$$= O\left(e^{\lambda_m(\varkappa+a+\delta)} \sum_{\rho=1}^{m} \frac{1}{\rho}\right)$$
$$= O(e^{\lambda_m(\varkappa+a+\delta)} \log m)$$
$$= O(e^{\lambda_m(\varkappa+a+\delta)} \lambda_m)$$
$$= O(e^{\lambda_m(\varkappa+a+2\delta)}).$$

Da bei passender Wahl eines $\delta > 0$

$$\varkappa + a + 2\delta < 0$$

ist, ist also bewiesen:

$$\sum\nolimits_2 = O(1).$$

Für $\sum_3$ ergibt sich

$$\sum\nolimits_3 = O \sum_{\lambda_{m+1}\leqq\lambda_n<\lambda_{m+1}+1} \frac{e^{\lambda_n \varkappa}}{n-m} e^{\lambda_{n-1}(a+\delta)}$$
$$= O\left(e^{\lambda_{m+1}(\varkappa+a+\delta)} \sum_{\lambda_{m+1}\leqq\lambda_n<\lambda_{m+1}+1} \frac{1}{n-m}\right)$$
$$= O\left(e^{\lambda_{m+1}(\varkappa+a+\delta)} \sum_{\rho=1}^{\gamma-m} \frac{1}{\rho}\right),$$

wo γ der Index des letzten λ in $\sum_3$ ist. Wegen

$$\lambda_\gamma < \lambda_{m+1} + 1$$

ergibt sich

$$\sum_{\rho=1}^{\gamma-m} \frac{1}{\rho} < \sum_{\rho=1}^{\gamma} \frac{1}{\rho}$$
$$= O(\log \gamma)$$
$$= O(\lambda_\gamma)$$
$$= O(\lambda_{m+1})$$
$$= O(e^{\lambda_{m+1}\delta}),$$

also

$$\sum\nolimits_3 = O(e^{\lambda_{m+1}(\varkappa+a+2\delta)}),$$
$$\sum\nolimits_3 = O(1).$$

Zusammengenommen kommt heraus:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_n \varkappa}}{|w_m - \lambda_n|} = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 + \sum\nolimits_3 + \sum\nolimits_4$$
$$= O(1) + O(1) + O(1) + O(1)$$
$$= O(1),$$

was zu beweisen war.

HILFSSATZ 4. — *Es sei*

$$g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

für $\sigma > \alpha$ *konvergent, für* $\sigma > \alpha + \tau$ *absolut konvergent, wo*

$$\tau > 0$$

ist. Dann ist bei gegebenem $\varepsilon > 0$ *für*

$$\alpha + \varepsilon \leqq \sigma \leqq \alpha + \tau + \varepsilon$$

gleichmässig

$$g(s) = g(\sigma + ti)$$

$$= O(|t|^{1-\frac{\sigma-\alpha-\varepsilon}{\tau}}),$$

wo sich die Abschätzung auf positiv oder negativ unendlich werdendes t *bezieht.*

Anders geschrieben: Für $\alpha + \varepsilon \leqq \sigma \leqq \alpha + \tau + \varepsilon$, $|t| \geqq 1$ liegt der Quotient

$$\frac{|g(s)|}{|t|^{1-\frac{\sigma-\alpha-\varepsilon}{\tau}}}$$

unterhalb einer absolut konstanten (d. h. von σ und t unabhängigen) Schranke.

(Übrigens wird beim Beweise dieses Satzes von den Voraussetzungen (3) und (4) kein Gebrauch gemacht; er gilt auch ohne dieselben für den allgemeinsten Typus DIRICHLET'scher Reihen, wenn nur ein absolutes Konvergenzgebiet für das spezielle $g(s)$ vorhanden ist.)

Beweis: Es sei

$$y = y(t)$$

als ganze, mit stetig wachsendem $|t| \geqq e^{\lambda_1 \tau}$ unendlich werdende Zahl durch

$$\lambda_y \leqq \frac{\log |t|}{\tau} < \lambda_{y+1} \tag{9}$$

definiert.

Wenn

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu e^{-\lambda_\nu\left(\alpha+\frac{\varepsilon}{2}\right)} = S(n)$$

gesetzt wird, wo also nach Voraussetzung

$$S(n) = O(1)$$

ist, so ergibt sich für $\sigma \geqq \alpha + \varepsilon$

$$g(s) = \sum_{n=1}^{y} a_n e^{-\lambda_n(\sigma+ti)} + \sum_{n=y+1}^{\infty} (S(n) - S(n-1)) e^{-\lambda_n\left(\sigma-\alpha-\frac{\varepsilon}{2}+ti\right)}$$

$$= \sum_{n=1}^{y} a_n e^{-\lambda_n(\sigma+ti)} + \sum_{n=y+1}^{\infty} S(n) (e^{-\lambda_n\left(\sigma-\alpha-\frac{\varepsilon}{2}+ti\right)} - e^{-\lambda_{n+1}\left(\sigma-\alpha-\frac{\varepsilon}{2}+ti\right)})$$

$$- S(y) e^{-\lambda_{y+1}\left(\sigma-\alpha-\frac{\varepsilon}{2}+ti\right)}$$

$$= \sum_{n=1}^{y} a_n e^{-\lambda_n(\sigma+ti)} + \left(\sigma - \alpha - \frac{\varepsilon}{2} + ti\right) \sum_{n=y+1}^{\infty} S(n) \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-u\left(\sigma-\alpha-\frac{\varepsilon}{2}+ti\right)} du$$

$$- S(y) e^{-\lambda_{y+1}\left(\sigma-\alpha-\frac{\varepsilon}{2}+ti\right)},$$

$$|g(s)| \leqq \sum_{n=1}^{y} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma} + \left|\sigma - \alpha - \frac{\varepsilon}{2} + ti\right| \sum_{n=y+1}^{\infty} |S(n)| \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-u\left(\sigma-\alpha-\frac{\varepsilon}{2}\right)} du$$

$$+ |S(y)| e^{-\lambda_{y+1}\left(\sigma-\alpha-\frac{\varepsilon}{2}\right)}.$$

Für

$$\alpha + \varepsilon \leqq \sigma \leqq \alpha + \tau + \varepsilon$$

ist also gleichmässig

$$g(s) = O \sum_{n=1}^{y} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma} + O\left(|t| \int_{\lambda_{y+1}}^{\infty} e^{-u\left(\sigma-\alpha-\frac{\varepsilon}{2}\right)} du\right) + O\left(e^{-\lambda_{y+1}\left(\sigma-\alpha-\frac{\varepsilon}{2}\right)}\right)$$

$$= O \sum_{n=1}^{y} |a_n| e^{-\lambda_n(\alpha+\tau+\varepsilon)} e^{\lambda_n(\alpha+\tau+\varepsilon-\sigma)} + O\left(|t| \frac{e^{-\lambda_{y+1}\left(\sigma-\alpha-\frac{\varepsilon}{2}\right)}}{\sigma-\alpha-\frac{\varepsilon}{2}}\right) + O\left(e^{-\lambda_{y+1}\left(\sigma-\alpha-\frac{\varepsilon}{2}\right)}\right)$$

$$= O\left(e^{\lambda_y(\alpha+\tau+\varepsilon-\sigma)} \sum_{n=1}^{y} |a_n| e^{-\lambda_n(\alpha+\tau+\varepsilon)}\right) + O\left(|t| \frac{e^{-\lambda_{y+1}\left(\sigma-\alpha-\frac{\varepsilon}{2}\right)}}{\frac{\varepsilon}{2}}\right) + O\left(e^{-\lambda_{y+1}\left(\sigma-\alpha-\frac{\varepsilon}{2}\right)}\right)$$

$$= O\left(e^{\lambda_y(\alpha+\tau+\varepsilon-\sigma)} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n(\alpha+\tau+\varepsilon)}\right) + O\left(|t| e^{-\lambda_{y+1}\left(\sigma-\alpha-\frac{\varepsilon}{2}\right)}\right) + O\left(e^{-\lambda_{y+1}\left(\sigma-\alpha-\frac{\varepsilon}{2}\right)}\right)$$

$$= O\left(e^{\lambda_y(\alpha+\tau+\varepsilon-\sigma)}\right) + O\left(|t| e^{-\lambda_{y+1}\left(\sigma-\alpha-\frac{\varepsilon}{2}\right)}\right)$$

$$= O\left(e^{\lambda_y(\alpha+\tau+\varepsilon-\sigma)}\right) + O\left(|t| e^{-\lambda_{y+1}(\sigma-\alpha-\varepsilon)}\right),$$

folglich nach (9)

$$g(s) = O\left(e^{\frac{\log|t|}{\tau}(\alpha+\tau+\varepsilon-\sigma)}\right) + O\left(|t| e^{-\frac{\log|t|}{\tau}(\sigma-\alpha-\varepsilon)}\right)$$

$$= O\left(|t|^{\frac{\alpha+\tau+\varepsilon-\sigma}{\tau}}\right) + O\left(|t|^{1-\frac{\sigma-\alpha-\varepsilon}{\tau}}\right)$$

$$= O\left(|t|^{1-\frac{\sigma-\alpha-\varepsilon}{\tau}}\right),$$

was zu beweisen war.

Hilfssatz 5. — *Es sei*

$$T > 0, \quad c > 0, \quad v \gtreqless 0, \quad \nu \geqq 0$$

und hiervon ν *ganz* [5]. *Dann ist bei gerader Bahn*

1) *für* $v > 0$

$$\left| \int_{c-Ti}^{c+Ti} \frac{e^{vs}}{s^{\nu+1}} ds - \frac{2\pi i v^{\nu}}{\nu!} \right| \leqq \frac{2 e^{vc}}{v T^{\nu+1}},$$

2) *für* $v < 0$

$$\left| \int_{c-Ti}^{c+Ti} \frac{e^{vs}}{s^{\nu+1}} ds \right| \leqq \frac{2 e^{vc}}{-v T^{\nu+1}}.$$

Beweis: 1) Es sei

$$v > 0.$$

Ich wähle ein

$$A < 0.$$

5) Im ersten Teil der Arbeit wird übrigens nur $\nu = 0$ zur Anwendung kommen.

Nach dem CAUCHY'schen Satz ist bei Integration über das Rechteck mit den Ecken $c \pm Ti$, $A \pm Ti$, welches den Pol $s = 0$ mit dem Residuum $\frac{v^\nu}{\nu!}$ im Innern enthält,

$$\int_{c-Ti}^{c+Ti} \frac{e^{vs}}{s^{\nu+1}} ds - \frac{2\pi i v^\nu}{\nu!} = \int_{c-Ti}^{A-Ti} \frac{e^{vs}}{s^{\nu+1}} ds + \int_{A-Ti}^{A+Ti} \frac{e^{vs}}{s^{\nu+1}} ds + \int_{A+Ti}^{c+Ti} \frac{e^{vs}}{s^{\nu+1}} ds.$$

Für $A = -\infty$ konvergiert das zweite Integral rechts gegen 0, da seine Weglänge fest ($2T$) ist und der Integrand mit Rücksicht auf

$$\left|\frac{e^{vs}}{s^{\nu+1}}\right| \leqq \frac{e^{vA}}{(-A)^{\nu+1}},$$

$$v > 0$$

gleichmässig den Limes 0 hat. Ebenso hat das erste und das dritte Integral rechts wegen

$$\left|\frac{e^{vs}}{s^{\nu+1}}\right| \leqq \frac{e^{v\sigma}}{T^{\nu+1}},$$

$$v > 0$$

einen Limes für $A = -\infty$, und es ergibt sich

$$\int_{c-Ti}^{c+Ti} \frac{e^{vs}}{s^{\nu+1}} ds - \frac{2\pi i v^\nu}{\nu!} = \int_{c-Ti}^{-\infty-Ti} \frac{e^{vs}}{s^{\nu+1}} ds + \int_{-\infty+Ti}^{c+Ti} \frac{e^{vs}}{s^{\nu+1}} ds,$$

$$\left|\int_{c-Ti}^{c+Ti} \frac{e^{vs}}{s^{\nu+1}} ds - \frac{2\pi i v^\nu}{\nu!}\right| \leqq \int_{-\infty}^{c} \frac{e^{v\sigma}}{T^{\nu+1}} d\sigma + \int_{-\infty}^{c} \frac{e^{v\sigma}}{T^{\nu+1}} d\sigma$$

$$= \frac{2e^{vc}}{vT^{\nu+1}}.$$

2) Es sei

$$v < 0.$$

Ich wähle ein

$$A > 0$$

und erhalte nach dem CAUCHY'schen Satz bei geraden Wegen

$$\int_{c-Ti}^{c+Ti} \frac{e^{vs}}{s^{\nu+1}} ds = \int_{c-Ti}^{A-Ti} \frac{e^{vs}}{s^{\nu+1}} ds + \int_{A-Ti}^{A+Ti} \frac{e^{vs}}{s^{\nu+1}} ds + \int_{A+Ti}^{c+Ti} \frac{e^{vs}}{s^{\nu+1}} ds,$$

also, da das zweite Integral rechts wegen

$$\left|\frac{e^{vs}}{s^{\nu+1}}\right| \leqq \frac{e^{vA}}{A^{\nu+1}},$$

$$v < 0$$

für $A = \infty$ den Limes 0 hat und da die beiden anderen wegen

$$\left|\frac{e^{vs}}{s^{\nu+1}}\right| \leqq \frac{e^{v\sigma}}{T^{\nu+1}},$$

$$v < 0$$

für $A = \infty$ Grenzwerte besitzen,

$$\int_{c-Ti}^{c+Ti} \frac{e^{vs}}{s^{v+1}} ds = \int_{c-Ti}^{\infty-Ti} \frac{e^{vs}}{s^{v+1}} ds + \int_{\infty+Ti}^{c+Ti} \frac{e^{vs}}{s^{v+1}} ds,$$

$$\left| \int_{c-Ti}^{c+Ti} \frac{e^{vs}}{s^{v+1}} ds \right| \leqq \int_{c}^{\infty} \frac{e^{v\sigma}}{T^{v+1}} d\sigma + \int_{c}^{\infty} \frac{e^{v\sigma}}{T^{v+1}} d\sigma$$

$$= \frac{2 e^{vc}}{-v T^{v+1}}.$$

§ 2.

SATZ I. — *Es sei für alle* $\delta > 0$

$$b_n = O(e^{\lambda_n \delta}),$$

also [6]

$$(10) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n s}$$

für $\sigma > a$ *absolut konvergent. Die dort durch die Reihe* (10) *definierte analytische Funktion* $f(s)$ *sei für* $\sigma > \eta$ *regulär, wo*

$$\eta < a$$

ist; für $\sigma > \eta$ *sei gleichmässig*

$$(11) \qquad f(s) = O(|t|^k),$$

wo

$$0 \leqq k < 1$$

ist. Dann ist die Reihe (10) *für*

$$\sigma > \frac{\eta + ka}{1 + k}$$

konvergent.

Wie in der Einleitung bemerkt, ist dieser Satz zuerst auf weniger einfachem Wege als im Folgenden von Herrn SCHNEE bewiesen worden. Ob beide Male $\sigma > \eta$ oder $\sigma \geqq \eta$ steht, ist natürlich gleichgiltig; beide Wortlaute besagen dasselbe.

Beweis: Es darf

$$0 < k < 1$$

vorausgesetzt werden; denn wenn hierfür der Satz bewiesen ist, so folgt die Richtigkeit im Falle $k = 0$ daraus, dass (10) für

$$\sigma > \frac{\eta + k'a}{1 + k'}$$

bei jedem $k' > 0$, also eben für

$$\sigma > \lim_{k' = 0} \frac{\eta + k'a}{1 + k'} = \eta$$

konvergiert.

[6] Nach Hilfssatz 1 wegen $-\sigma < -a$.

Es sei also

$$0 < k < 1.$$

Es ist nur nötig, zu beweisen, dass aus der Konvergenz von (10) für

$$\sigma > \beta,$$

wo

$$\frac{\eta + ka}{1 + k} < \beta \leqq a \tag{12}$$

ist, die Konvergenz für

$$s = \gamma$$

folgt, wo γ eine passend wählbare Zahl $< \beta$ ist; denn dann kann die Konvergenzabszisse der Reihe (10) eben nicht grösser als

$$\frac{\eta + ka}{1 + k}$$

sein, worin gerade die Behauptung besteht.

Es sei also (10) für

$$\sigma > \beta$$

konvergent, wo (12) gilt. Ich wähle alsdann γ so, dass

$$\eta + k(a - \eta) - k^2(a - \beta) < \gamma < \beta \tag{13}$$

ist, und werde für γ die Konvergenz nachweisen. Eine solche Wahl von γ, die (13) befriedigt, ist möglich; denn nach (12) ist

$$\eta + ka < (1 + k)\beta,$$
$$(1 - k)(\eta + ka) < (1 - k^2)\beta,$$
$$\eta - k\eta + ka - k^2 a < \beta - k^2\beta,$$
$$\eta + k(a - \eta) - k^2(a - \beta) < \beta,$$

so dass γ eingeschoben werden kann. Eo ipso ist dann

$$\gamma > \eta,$$

nämlich wegen

$$\begin{aligned}\gamma - \eta &> k(a - \eta) - k^2(a - \beta)\\ &> k(a - \eta) - k^2\left(a - \frac{\eta + ka}{1 + k}\right)\\ &= k(a - \eta) - k^2\frac{a - \eta}{1 + k}\\ &= \frac{k(a - \eta)}{1 + k}\\ &> 0;\end{aligned}$$

ferner ist

$$\gamma < a,$$

wegen

$$\gamma < \beta.$$

Es ist nun die Konvergenz von

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n \gamma}$$

zu beweisen, oder, was ganz dasselbe ist, die Existenz von

$$\lim_{m=\infty} \sum_{n=1}^{m} b_n e^{-\lambda_n \gamma}.$$

ε sei eine positive Konstante, $T = T(m)$ eine positive Funktion des ganzzahligen m; über beides wird noch genauer verfügt werden.

Es ist bei gerader Bahn wegen der gleichmässigen Konvergenz der Reihe für $f(s+\gamma)$ auf der Geraden [7] $\sigma = a - \gamma + \varepsilon$

$$\int_{a-\gamma+\varepsilon-Ti}^{a-\gamma+\varepsilon+Ti} \frac{e^{w_m s}}{s} f(s+\gamma)\,ds = \int_{a-\gamma+\varepsilon-Ti}^{a-\gamma+\varepsilon+Ti} \frac{e^{w_m s}}{s} \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n (s+\gamma)}\,ds$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n \gamma} \int_{a-\gamma+\varepsilon-Ti}^{a-\gamma+\varepsilon+Ti} \frac{e^{(w_m-\lambda_n)s}}{s}\,ds.$$

Nach dem Hilfssatz 5, bei dem hier

$$c = a - \gamma + \varepsilon,$$
$$v = w_m - \lambda_n,$$
$$\nu = 0$$

zu setzen ist, ist in den Gliedern $n \leqq m$

$$\left|\int_{a-\gamma+\varepsilon-Ti}^{a-\gamma+\varepsilon+Ti} \frac{e^{(w_m-\lambda_n)s}}{s}\,ds - 2\pi i\right| \leqq \frac{2\, e^{(w_m-\lambda_n)(a-\gamma+\varepsilon)}}{(w_m-\lambda_n)T},$$

in den Gliedern $n \geqq m+1$

$$\left|\int_{a-\gamma+\varepsilon-Ti}^{a-\gamma+\varepsilon+Ti} \frac{e^{(w_m-\lambda_n)s}}{s}\,ds\right| \leqq \frac{2\, e^{(w_m-\lambda_n)(a-\gamma+\varepsilon)}}{(\lambda_n-w_m)T};$$

daher ist

$$\left|\int_{a-\gamma+\varepsilon-Ti}^{a-\gamma+\varepsilon+Ti} \frac{e^{w_m s}}{s} f(s+\gamma)\,ds - 2\pi i \sum_{n=1}^{m} b_n e^{-\lambda_n\gamma}\right| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| e^{-\lambda_n\gamma} \frac{2\, e^{(w_m-\lambda_n)(a-\gamma+\varepsilon)}}{|w_m-\lambda_n|\,T}$$
$$= \frac{2}{T} e^{w_m(a-\gamma+\varepsilon)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n|\, e^{-\lambda_n(a+\varepsilon)}}{|w_m-\lambda_n|};$$

die hierin auftretende Summe ist wegen der Voraussetzung

$$b_n = O(e^{\lambda_n \delta})$$

konvergent [8] und nach dem Hilfssatz 3

$$= O(1).$$

Es hat sich also bisher ergeben:

$$2\pi i \sum_{n=1}^{m} b_n e^{-\lambda_n\gamma} = \int_{a-\gamma+\varepsilon-Ti}^{a-\gamma+\varepsilon+Ti} \frac{e^{w_m s}}{s} f(s+\gamma)\,ds + \frac{1}{T} e^{w_m(a-\gamma+\varepsilon)} O(1).$$

Ich wähle nun ε so, dass

$$0 < \varepsilon < \gamma - \eta$$

---

7) Auf dieser ist nämlich $\sigma + \gamma = a + \varepsilon > a$.

8) Man nehme $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

ist, und gebe über $T = T(m)$ vorläufig nur an, dass

$$T = e^{w_m g}$$

ist, wo g eine noch näher zu fixierende positive Konstante ist. Dann ist also

$$(14) \qquad 2\pi i \sum_{n=1}^{m} b_n e^{-\lambda_n \gamma} = \int_{a-\gamma+\varepsilon-Ti}^{a-\gamma+\varepsilon+Ti} \frac{e^{w_m s}}{s} f(s+\gamma)\, ds + O(e^{w_m(a-\gamma-g+\varepsilon)}).$$

Ich wende jetzt den CAUCHY'schen Satz auf die Funktion

$$\frac{e^{w_m s}}{s} f(s+\gamma)$$

und das Rechteck mit den Ecken $a - \gamma + \varepsilon \pm Ti$, $\eta - \gamma + \varepsilon \pm Ti$ an, auf und in welchem wegen

$$\begin{aligned} \eta - \gamma + \varepsilon + \gamma &= \eta + \varepsilon \\ &> \eta \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \eta - \gamma + \varepsilon &< 0, \\ a - \gamma + \varepsilon &> 0 \end{aligned}$$

der Integrand mit eventueller Ausnahme des sicher darin gelegenen Punktes $s = 0$ regulär ist; $s = 0$ ist im Falle

$$f(\gamma) = 0$$

auch regulär, im Falle

$$f(\gamma) \neq 0$$

Pol mit dem Residuum $f(\gamma)$. Unter allen Umständen liefert daher (14)

$$\begin{aligned} 2\pi i\left(\sum_{n=1}^{m} b_n e^{-\lambda_n\gamma} - f(\gamma)\right) &= O(e^{w_m(a-\gamma-g+\varepsilon)}) + \int_{a-\gamma+\varepsilon-Ti}^{\eta-\gamma+\varepsilon-Ti} \frac{e^{w_m s}}{s} f(s+\gamma)ds + \int_{\eta-\gamma+\varepsilon-Ti}^{\eta-\gamma+\varepsilon+Ti} \frac{e^{w_m s}}{s} f(s+\gamma)ds \\ &\quad + \int_{\eta-\gamma+\varepsilon+Ti}^{a-\gamma+\varepsilon+Ti} \frac{e^{w_m s}}{s} f(s+\gamma)\, ds \\ (15) \qquad &= O(e^{w_m(a-\gamma-g+\varepsilon)}) + I_1 + I_2 + I_3, \end{aligned}$$

wo I_1, I_2, I_3 Abkürzungen für die drei vorangehenden Integrale sind.

Hierin ist nach der Voraussetzung (11)

$$\begin{aligned} I_2 &= O\left(e^{w_m(\eta-\gamma+\varepsilon)} \int_1^T \frac{t^k}{t}\, dt\right) \\ &= O(e^{w_m(\eta-\gamma+\varepsilon)}\, T^k) \\ (16) \qquad &= O(e^{w_m(\eta-\gamma+kg+\varepsilon)}). \end{aligned}$$

Zur Abschätzung von I_3 könnte ich die nach (11) auf dem ganzen Weg gleichmässig giltige Relation

$$(17) \qquad f(s+\gamma) = O(T^k)$$

verwenden, was

$$\begin{aligned} I_3 &= O\int_{\eta-\gamma+\varepsilon}^{a-\gamma+\varepsilon} \frac{e^{w_m\sigma}}{T} T^k\, d\sigma \\ &= O\int_{\eta-\gamma+\varepsilon}^{a-\gamma+\varepsilon} e^{w_m(a-\gamma+\varepsilon)}\, T^{k-1}\, d\sigma \\ &= O(e^{w_m(a-\gamma+\varepsilon)}\, T^{k-1}) \\ (18) \qquad &= O(e^{w_m(a-\gamma+\varepsilon+(k-1)g)}) \end{aligned}$$

ergibt.

Im Falle $\beta = a$ begnüge ich mich auch mit dieser Abschätzung.

Es ist jedoch im Falle $\beta < a$ vorteilhafter, (17) nur auf einer Teilstrecke zu verwerten [9]). Denn, da die Konvergenz von $f(s)$ für $\sigma > \beta$, d. h. die von $f(s+\gamma)$ für $\sigma > \beta - \gamma$ vorausgesetzt wird und $f(s+\gamma)$ für $\sigma > a - \gamma$ absolut konvergiert, ist nach Hilfssatz 4 für

$$s = \sigma + Ti, \quad \beta - \gamma + \varepsilon \leqq \sigma \leqq a - \gamma + \varepsilon$$

gleichmässig

$$f(s+\gamma) = O\left(T^{1-\frac{\sigma-\beta+\gamma-\varepsilon}{a-\beta}}\right). \tag{19}$$

Von einer gewissen Stelle an ist (19) vorteilhafter als (17), da der Exponent in (19) von 1 zu 0 abnimmt, also einmal unter k hinunterkommt. Genauer gesagt: Ich verwende (17) für die σ des Intervalls, für welche überdies

$$k \leqq 1 - \frac{\sigma - \beta + \gamma - \varepsilon}{a - \beta}$$

ist, d. h.

$$k(a-\beta) \leqq a - \beta - \sigma + \beta - \gamma + \varepsilon,$$

$$\sigma \leqq a - \gamma - k(a-\beta) + \varepsilon;$$

alsdann verwende ich (19). Natürlich ist dieser Scheidepunkt zwischen $\beta - \gamma + \varepsilon$ und $a - \gamma + \varepsilon$ gelegen, wo ja der Exponent in (19) 1 bezw. 0 ist.

Es ergibt sich also

$$I_3 = O\int_{\eta-\gamma+\varepsilon}^{a-\gamma-k(a-\beta)+\varepsilon} \frac{e^{w_m\sigma}}{T}\, T^k\, d\sigma + O\int_{a-\gamma-k(a-\beta)+\varepsilon}^{a-\gamma+\varepsilon} \frac{e^{w_m\sigma}}{T}\, T^{1-\frac{\sigma-\beta+\gamma-\varepsilon}{a-\beta}}\, d\sigma.$$

Im ersten Integral ersetze ich einfach $e^{w_m\sigma}$ durch den Endwert

$$e^{w_m(a-\gamma-k(a-\beta)+\varepsilon)};$$

im zweiten Integral beachte ich, dass der von σ abhängige Faktor

$$e^{w_m\sigma}\, T^{-\frac{\sigma}{a-\beta}} = e^{w_m\sigma\left(1-\frac{g}{a-\beta}\right)}$$

seinen grössten Wert am Anfang oder am Ende erreicht. Der Wert des zweiten Integranden am Anfang stimmt mit dem Wert des ersten Integranden am Ende seines Weges überein; der Wert des zweiten Integranden am Ende ist

$$\frac{e^{w_m(a-\gamma+\varepsilon)}}{T} = e^{w_m(a-\gamma-g+\varepsilon)},$$

was übrigens schon bei dem ersten Gliede in (15) vorkam. Für $\beta < a$ ergibt sich also

$$I_3 = O\left(e^{w_m(a-\gamma-k(a-\beta)+(k-1)g+\varepsilon)}\right) + O\left(e^{w_m(a-\gamma-g+\varepsilon)}\right); \tag{20}$$

die im Falle $\beta = a$ in (18) gefundene Abschätzung ist daher in dieser enthalten.

In jedem Falle ist also, da aus Symmetriegründen I_1 dieselbe Abschätzung liefert

---

[9]) Hierin liegt die wesentliche Abweichung von dem SCHNEE'schen Beweise, der den Hilfssatz 4 nicht verwendet.

als I_3, nach (15), (16) und (20)

$$(21) \quad \sum_{n=1}^{m} b_n e^{-\lambda_n \gamma} - f(\gamma) = O(e^{w_m(a-\gamma-g+\varepsilon)}) + O(e^{w_m(\eta-\gamma+kg+\varepsilon)}) + O(e^{w_m(a-\gamma-k(a-\beta)+(k-1)g+\varepsilon)}).$$

Die behauptete Existenz von

$$\lim_{m=\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n \gamma}$$

[wo alsdann natürlich der Grenzwert $= f(\gamma)$ herauskommt] ist also bewiesen, wenn ich zeigen kann, dass jeder der drei Koeffizienten von w_m rechts in (21) bei passender Wahl eines $g > 0$ und eines $\varepsilon > 0$, wo noch $\varepsilon < \gamma - \eta$ sein musste, negativ ist. Es genügt also, zu konstatieren, dass bei passender Wahl einer positiven Zahl g zugleich dreierlei erfüllt ist:

$$(22) \qquad a - \gamma - g < 0,$$

$$(23) \qquad \eta - \gamma + kg < 0$$

und

$$(24) \qquad a - \gamma - k(a - \beta) + (k - 1)g < 0.$$

Ich setze g gleich dem Wert, der die zwei linken Seiten von (23) und (24) einander gleich macht, d. h.

$$g = a - \eta - k(a - \beta),$$

was

$$\begin{aligned} &\geqq a - \eta - (a - \beta) \\ &= \beta - \eta \\ &> 0 \end{aligned}$$

ist. Dann ist jener gemeinsame Wert

$$\eta - \gamma + k(a - \eta) - k^2(a - \beta)$$

nach (13) negativ, also (23) und (24) erfüllt; ferner ist die linke Seite von (22)

$$\begin{aligned} a - \gamma - g &= a - \gamma - a + \eta + k(a - \beta) \\ &= \eta - \gamma + k(a - \beta) \\ &< \eta - \eta - k(a - \eta) + k^2(a - \beta) + k(a - \beta) \\ &= k(-a + \eta + ka - k\beta + a - \beta) \\ &= k(\eta + ka - (1 + k)\beta) \\ &= k(1 + k)\left(\frac{\eta + ka}{1 + k} - \beta\right) \\ &< 0, \end{aligned}$$

also (22) erfüllt.

Damit ist der Satz I bewiesen.

Der Satz I bleibt natürlich richtig, wenn die Voraussetzung

$$\eta < a$$

fallen gelassen wird; es ist nämlich für

$$\eta \geqq a$$

seine Behauptung wegen

$$\frac{\eta + ka}{1 + k} \geqq a$$

trivial.

§ 3.

Satz II. — *Es seien alle Voraussetzungen des Satzes I erfüllt und ausserdem*

$$\eta + ka < 0.$$

Dann konvergiert die Reihe (10) *für*

$$\sigma > \eta + ka.$$

Für

$$\eta + ka \geqq 0$$

wäre dies auch richtig, aber nichts Neues, da alsdann

$$\frac{\eta + ka}{1 + k} \leqq \eta + ka$$

wäre.

Beweis: Um das Folgende deutlicher zu machen, zeige ich zunächst, dass im Falle

$$\eta + ka < 0$$

die durch Satz I gelieferte Schranke gewiss für $0 < k < 1$ nicht die genaue ist. Nach Satz I konvergiert (10) für

$$\sigma > \frac{\eta + ka}{1 + k};$$

daher ist für jedes $\delta > 0$

$$b_n = O\left(e^{\lambda_n\left(\frac{\eta+ka}{1+k}+\delta\right)}\right).$$

Ich setze

$$\begin{aligned} f(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n s} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n \frac{\eta+ka}{1+k}} e^{-\lambda_n\left(s - \frac{\eta+ka}{1+k}\right)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \bar{b}_n e^{-\lambda_n \bar{s}} \qquad (25) \\ &= g(\bar{s}), \end{aligned}$$

wo

$$\begin{aligned} \bar{s} &= s - \frac{\eta + ka}{1 + k} \\ &= \bar{\sigma} + \bar{t}i \end{aligned}$$

eine neue komplexe Variable bezeichnet und

$$\begin{aligned} \bar{b}_n &= b_n e^{-\lambda_n \frac{\eta+ka}{1+k}} \\ &= O(e^{\lambda_n \delta}) \end{aligned}$$

ist. $g(\bar{s})$ ist für

$$\bar{\sigma} > \eta - \frac{\eta + ka}{1 + k} = \frac{(\eta - a)k}{1 + k} = \mathrm{H}$$

regulär; ebenda ist

$$g(\bar{s}) = O(|t|^k) = O(|\bar{t}|^k).$$

Daher konvergiert nach dem Satze I die Reihe (25) für

$$\bar{\sigma} > \frac{\mathrm{H} + ka}{1 + k} = \frac{\frac{(\eta - a)k}{1 + k} + ka}{1 + k} = \frac{k\eta - ka + ka + k^2 a}{(1 + k)^2} = \frac{k}{1 + k}\,\frac{\eta + ka}{1 + k},$$

also (10) für

$$\sigma > \frac{k}{1 + k}\,\frac{\eta + ka}{1 + k} + \frac{\eta + ka}{1 + k} = \left(1 + \frac{k}{1 + k}\right)\frac{\eta + ka}{1 + k},$$

was für $0 < k < 1$ schon eine Verschärfung von

$$\frac{\eta + ka}{1 + k}$$

darstellt.

Nun sei gleich β die Konvergenzabszisse von (10); wenn

$$\beta = -\infty$$

ist, ist die Behauptung trivial. Sonst werde

$$s - \beta = \bar{\bar{s}} = \bar{\bar{\sigma}} + \bar{\bar{t}} i,$$

$$b_n e^{-\lambda_n \beta} = \bar{\bar{b}}_n,$$

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n \beta} e^{-\lambda_n (s - \beta)}$$

(26)
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\bar{b}}_n e^{-\lambda_n \bar{\bar{s}}} = h(\bar{\bar{s}})$$

gesetzt. Dann ist infolge der Konvergenz von (10) für $\sigma > \beta$ bei jedem $\delta > 0$

$$\overline{\overline{b}}_n = O(e^{\lambda_n \delta}).$$

Weil die Funktion $h(\overline{\overline{s}})$ für

$$\overline{\overline{\sigma}} > \eta - \beta$$

regulär und

$$= O(|\overline{\overline{t}}|^k)$$

ist, ergibt sich nach Satz I die Konvergenz von (26) für

$$\overline{\overline{\sigma}} > \frac{\eta - \beta + ka}{1 + k},$$

also die von (10) für

$$\sigma > \frac{\eta - \beta + ka}{1+k} + \beta$$

$$= \frac{\eta + ka}{1+k} + \frac{\beta k}{1+k}.$$

Daher ist

$$\beta \leqq \frac{\eta + ka}{1+k} + \frac{\beta k}{1+k},$$

$$\frac{\beta}{1+k} \leqq \frac{\eta + ka}{1+k},$$

$$\beta \leqq \eta + ka,$$

womit der Satz II bewiesen ist.

ZWEITER TEIL.

§ 4.

HILFSSATZ 6. — *Es sei für ein festes* $\gamma \leqq a$ *bei jedem* $\delta > 0$

$$a_n = O(e^{\lambda_n(-\gamma+\delta)}),$$

und es gebe ein ganzzahliges $\nu \geqq 1$, *sowie ein* j *derart, dass*

$$-a - \gamma \leqq j \leqq a - \gamma$$

und bei jedem $\delta > 0$

$$\sum_{\lambda_n \leqq x} a_n (x - \lambda_n)^\nu = G(x) + O(e^{x(j+\delta)}) \tag{27}$$

ist, wo $G(x)$ *eine ganze rationale Funktion ist. Dann ist bei jedem* $\delta > 0$

$$\sum_{\lambda_n \leqq x} a_n (x - \lambda_n)^{\nu-1} = \frac{G'(x)}{\nu} + O(e^{x\left(\frac{j+a-\gamma}{2}+\delta\right)}) \tag{28}$$

und

$$\sum_{\lambda_n \leqq x} a_n = \frac{G^{(\nu)}(x)}{\nu!} + O(e^{x\left(\frac{j+(2^\nu-1)(a-\gamma)}{2^\nu}+\delta\right)}). \tag{29}$$

Beweis: Falls $\nu = 1$ ist, sind die Behauptungen (28) und (29) gleichbedeutend. Für $\nu > 1$ ist es nur nötig, (28) zu beweisen, um daraus durch successive Anwendung des Bewiesenen auf (29) schliessen zu können; in der Tat ist (28) genau vom Typus (27), da die an Stelle von j getretene Zahl $\frac{j + a - \gamma}{2}$ gleichfalls $\leqq a - \gamma$ und $\geqq -a - \gamma$ ist. Da bei diesem Übergang das arithmetische Mittel von der alten Zahl j und $a - \gamma$ genommen wird, so kommt eben schliesslich die Konstante

$$a - \gamma - \frac{a - \gamma - j}{2^\nu} = \frac{j + (2^\nu - 1)(a - \gamma)}{2^\nu}$$

heraus, wie in (29) behauptet wurde.

Ich habe also nur (28) für alle $\nu \geqq 1$ zu beweisen; übrigens kann das Glied mit der ganzen rationalen Funktion gegen das Restglied in (27), (28), (29) vernachlässigt werden, sofern das Glied vor $+\delta$ positiv oder Null ist.

Ich verstehe unter h die Funktion von x

$$h(x) = e^{-x\frac{a-\gamma-j}{2}};$$

sie genügt der Bedingung

$$h(x) = O(1)$$

und mit Rücksicht auf

$$h e^{xa} = e^{x\frac{a+\gamma+j}{2}}$$

nebst

$$a + \gamma + j \geqq 0$$

der Relation

$$1 = O(h e^{xa}).$$

Dann ist nach (27)

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda_n \leqq x+h} a_n (x + h - \lambda_n)^\nu &= G(x + h) + O(e^{(x+h)(j+\delta)}) \\ &= G(x + h) + O(e^{x(j+\delta)}),\end{aligned}$$

also, wenn hiervon (27) subtrahiert wird,

$$\begin{aligned}&\sum_{\lambda_n \leqq x} a_n \left((x + h - \lambda_n)^\nu - (x - \lambda_n)^\nu\right) + \sum_{x < \lambda_n \leqq x+h} a_n (x + h - \lambda_n)^\nu \\ &= G(x + h) - G(x) + O(e^{x(j+\delta)}).\end{aligned} \tag{30}$$

Hierin ist, da für $x < \lambda_n \leqq x + h$

$$0 \leqq (x + h - \lambda_n)^\nu < h^\nu$$

ist,

$$\begin{aligned}\sum_{x < \lambda_n \leqq x+h} a_n (x + h - \lambda_n)^\nu &= O \sum_{x < \lambda_n \leqq x+h} e^{\lambda_n(-\gamma+\delta)} h^\nu \\ &= O(e^{x(-\gamma+\delta)} h^\nu \sum_{x < \lambda_n \leqq x+h} 1).\end{aligned} \tag{31}$$

Nun ist die Anzahl der λ_n zwischen x (exkl.) und $x + h$ (inkl.)

$$O(h e^{x(a+\delta)}); \tag{32}$$

denn wegen

$$\frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = O(e^{\lambda_n(a+\delta)})$$

ist für alle $n \geqq 1$ bei passender Wahl von A

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n > \frac{1}{A} e^{-\lambda_n(a+\delta)},$$

also für $n \geqq 1$, $\rho \geqq 2$

$$\lambda_{n+\rho-1} - \lambda_n = \sum_{v=n}^{n+\rho-2} (\lambda_{v+1} - \lambda_v)$$
$$> \frac{1}{A}(\rho - 1) e^{-\lambda_{n+\rho-1}(a+\delta)};$$

aus

$$\lambda_{n+\rho-1} - \lambda_n < h,$$

was insbesondere für das kleinste und grösste der etwa vorhandenen λ des Intervalls x (exkl.) bis $x + h$ (inkl.) zutrifft, folgt also als Abschätzung der Anzahl ρ dieser λ die Ungleichung

$$h > \frac{1}{A}(\rho - 1) e^{-\lambda_{n+\rho-1}(a+\delta)},$$
$$\rho < 1 + h A e^{\lambda_{n+\rho-1}(a+\delta)}$$
$$\leqq 1 + h A e^{(x+h)(a+\delta)}$$
$$= O(h e^{xa}) + O(h e^{xa} e^{x\delta})$$
$$= O(h e^{x(a+\delta)}),$$

wie in (32) behauptet wurde. (31) liefert also weiter

$$\sum_{x<\lambda_n \leqq x+h} a_n (x + h - \lambda_n)^\nu = O(h^{\nu+1} e^{x(a-\gamma+2\delta)}),$$

folglich auch für jedes $\delta > 0$

$$(33) \qquad \sum_{x<\lambda_n \leqq x+h} a_n (x + h - \lambda_n)^\nu = O(h^{\nu+1} e^{x(a-\gamma+\delta)}).$$

Ferner ist, wenn N den Grad der ganzen rationalen Funktion $G(x)$ bezeichnet,

$$G(x + h) - G(x) = h\big(G'(x) + h O(x^{N-2})\big)$$
$$(34) \qquad = h G'(x) + O(h^2 e^{x\delta}).$$

Aus (30), (33) und (34) folgt wegen

$$\nu + 1 \geqq 2,$$
$$\delta \leqq a - \gamma + \delta$$

$$(35) \quad \sum_{\lambda_n \leqq x} a_n \big((x + h - \lambda_n)^\nu - (x - \lambda_n)^\nu\big) = h G'(x) + O(e^{x(j+\delta)}) + O(h^2 e^{x(a-\gamma+\delta)}).$$

Nun ist die linke Seite

$$= \sum_{\lambda_n \leqq x} a_n \left(\nu h (x - \lambda_n)^{\nu-1} + \binom{\nu}{2} h^2 (x - \lambda_n)^{\nu-2} + \cdots + \nu h^{\nu-1}(x - \lambda_n) + h^\nu\right)$$
$$= \nu h \sum_{\lambda_n \leqq x} a_n (x - \lambda_n)^{\nu-1} + \binom{\nu}{2} h^2 \sum_{\lambda_n \leqq x} a_n (x - \lambda_n)^{\nu-2} + \cdots$$
$$\cdots + \nu h^{\nu-1} \sum_{\lambda_n \leqq x} a_n (x - \lambda_n) + h^\nu \sum_{\lambda_n \leqq x} a_n$$

und hierin für jedes $\mu = 0, 1, \ldots, \nu - 2$

$$\sum_{\lambda_n \leqq x} a_n (x - \lambda_n)^\mu = O\left(x^\mu \sum_{\lambda_n \leqq x} e^{\lambda_n(-\gamma+\delta)}\right),$$

was nach Hilfssatz 2

$$= O(x^\mu e^{x(-\gamma+\alpha+2\delta)})$$
$$= O(e^{x(\alpha-\gamma+3\delta)})$$

ist; es ist also auch

$$\sum_{\lambda_n \leqq x} a_n (x - \lambda_n)^\mu = O(e^{x(\alpha-\gamma+\delta)}).$$

Die linke Seite von (35) ist daher [10])

$$= \nu h \sum_{\lambda_n \leqq x} a_n (x - \lambda_n)^{\nu-1} + O(h^2 e^{x(\alpha-\gamma+\delta)}),$$

und (35) liefert

$$\nu h \sum_{\lambda_n \leqq x} a_n (x - \lambda_n)^{\nu-1} = h G'(x) + O(e^{x(j+\delta)}) + O(h^2 e^{x(\alpha-\gamma+\delta)}),$$

also

$$\sum_{\lambda_n \leqq x} a_n (x - \lambda_n)^{\nu-1} = \frac{G'(x)}{\nu} + O\left(\frac{e^{x(j+\delta)}}{h}\right) + O(h e^{x(\alpha-\gamma+\delta)}).$$

Nun hatte h die Bedeutung

$$h = e^{-x\frac{\alpha-\gamma-j}{2}};$$

hierfür ist sowohl

$$\frac{e^{x(j+\delta)}}{h} = e^{x\left(j+\frac{\alpha-\gamma-j}{2}+\delta\right)}$$
$$= e^{x\left(\frac{j+\alpha-\gamma}{2}+\delta\right)}$$

als auch

$$h e^{x(\alpha-\gamma+\delta)} = e^{x\left(-\frac{\alpha-\gamma-j}{2}+\alpha-\gamma+\delta\right)}$$
$$= e^{x\left(\frac{j+\alpha-\gamma}{2}+\delta\right)}.$$

Dadurch ergibt sich

$$\sum_{\lambda_n \leqq x} a_n (x - \lambda_n)^{\nu-1} = \frac{G'(x)}{\nu} + O(e^{x\left(\frac{j+\alpha-\gamma}{2}+\delta\right)}),$$

und (28), also der Hilfssatz 6 ist bewiesen.

Hilfssatz 7. — *Es sei*

$$T > 0, \qquad c > 0, \qquad v \gtreqless 0, \qquad \nu \geqq 1$$

und hierin ν *ganz. Dann ist bei gerader Bahn*

1) *für* $v \geqq 0$

$$\left| \int_{c-Ti}^{c+Ti} \frac{e^{vs}}{s^{\nu+1}} ds - \frac{2\pi i v^\nu}{\nu!} \right| \leqq \frac{2 e^{vc}}{\nu T^\nu},$$

---

[10]) Natürlich gilt das auch für $\nu = 1$, wo das nun folgende Glied mit O einfach Null ist.

2) *für* $v \leqq 0$

$$\left|\int_{c-Ti}^{c+Ti} \frac{e^{vs}}{s^{\nu+1}}\, ds\right| \leqq \frac{2\, e^{vc}}{\nu\, T^{\nu}}.$$

Diese Abschätzung ist teils besser, teils schlechter als die durch den Hilfssatz 5 gelieferte, je nachdem

$$T|v| \lessgtr \nu$$

ist.

Beweis: Das Integral

$$\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{e^{vs}}{s^{\nu+1}}\, ds$$

ist jedenfalls wegen

$$\left|\frac{e^{vs}}{s^{\nu+1}}\right| \leqq \frac{e^{vc}}{|t|^{\nu+1}} \qquad (|t| > 0)$$

$$\leqq \frac{e^{vc}}{t^2} \qquad (|t| > 1)$$

konvergent; es hat nach dem Hilfssatz 5 den Wert

$$\frac{2\pi i v^{\nu}}{\nu!} \quad \text{für} \quad v > 0,$$

$$0 \quad \text{für} \quad v < 0,$$

da ja

$$\lim_{T=\infty} \frac{2\, e^{vc}}{|v|\, T^{\nu+1}} = 0$$

ist. Für $v = 0$ hat es offenbar den Wert 0, da

$$\int_{c-Ti}^{c+Ti} \frac{ds}{s^{\nu+1}} = -\frac{1}{\nu(c+Ti)^{\nu}} + \frac{1}{\nu(c-Ti)^{\nu}}$$

ist.

1) Für $v \geqq 0$ ist also

$$\int_{c-Ti}^{c+Ti} \frac{e^{vs}}{s^{\nu+1}}\, ds - \frac{2\pi i v^{\nu}}{\nu!} = -\int_{c-\infty i}^{c-Ti} \frac{e^{vs}}{s^{\nu+1}}\, ds - \int_{c+Ti}^{c+\infty i} \frac{e^{vs}}{s^{\nu+1}}\, ds,$$

$$\left|\int_{c-Ti}^{c+Ti} \frac{e^{vs}}{s^{\nu+1}}\, ds - \frac{2\pi i v^{\nu}}{\nu!}\right| \leqq 2\int_{T}^{\infty} \frac{e^{vc}}{t^{\nu+1}}\, dt$$

$$= \frac{2\, e^{vc}}{\nu\, T^{\nu}}.$$

2) Für $v \leqq 0$ ergibt sich ebenso

$$\left|\int_{c-Ti}^{c+Ti} \frac{e^{vs}}{s^{\nu+1}}\, ds\right| \leqq \frac{2\, e^{vc}}{\nu\, T^{\nu}}.$$

§ 5.

SATZ III. — *Es mögen alle Voraussetzungen des Satzes I gelten. Nur sei statt*

$$0 \leqq k < 1$$

jetzt

$$k \geqq 1,$$

ferner jetzt

$$-a \leqq \eta < a.$$

Dann ist (10) *für*

$$\sigma > a - \frac{1}{2^{\nu+1}}(a - \eta)$$
$$= \frac{\eta + (2^{\nu+1} - 1)a}{2^{\nu+1}}$$

konvergent.

Beweis: Es ist nur nötig, zu beweisen, dass aus der Konvergenz von (10) für

$$\sigma > \beta,$$

wo

$$a - \frac{1}{2^{\nu+1}}(a - \eta) < \beta \leqq a \tag{36}$$

ist, die Konvergenz für

$$s = \gamma$$

folgt, wo γ eine passend wählbare Zahl $< \beta$ ist.

Es werde also die Konvergenz von (10) für $\sigma > \beta$ vorausgesetzt, wo β die Bedingungen (36) erfüllt, und γ sei vorläufig eine beliebige Zahl derart, dass

$$\eta < \gamma < \beta,$$

also a fortiori

$$\gamma < a$$

ist. Ebenso sei ε eine vorläufig beliebige Zahl, die > 0 und $< \gamma - \eta$ ist.

Es konvergiert bei reellem x das über die Gerade $s = a - \gamma + \varepsilon + ti$ erstreckte Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{e^{xs}}{s^{\nu+2}}\right| \sum_{n=1}^{\infty} |b_n e^{-\lambda_n(s+\gamma)}| \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{x(a-\gamma+\varepsilon)}}{|a - \gamma + \varepsilon + ti|^{\nu+2}} \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| e^{-\lambda_n(a+\varepsilon)} dt;$$

daher ist

$$\int_{a-\gamma+\varepsilon-\infty i}^{a-\gamma+\varepsilon+\infty i} \frac{e^{xs}}{s^{\nu+2}} f(s+\gamma)\, ds = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n \gamma} \int_{a-\gamma+\varepsilon-\infty i}^{a-\gamma+\varepsilon+\infty i} \frac{e^{(x-\lambda_n)s}}{s^{\nu+2}} ds$$

$$= \frac{2\pi i}{(\nu+1)!} \sum_{\lambda_n \leqq x} b_n e^{-\lambda_n \gamma}(x - \lambda_n)^{\nu+1}. \tag{37}$$

Andererseits ist auch

$$\int_{\eta-\gamma+\varepsilon-\infty i}^{\eta-\gamma+\varepsilon+\infty i} \frac{e^{xs}}{s^{\nu+2}} f(s+\gamma)\, ds$$

konvergent, wegen der für $|t| \geqq 1$ giltigen Abschätzung

$$\left|\frac{e^{xs}}{s^{\nu+2}} f(s+\gamma)\right| \leqq \frac{e^{x(\eta-\gamma+\varepsilon)}}{|t|^{\nu+2}} B|t|^k$$

und

$$\nu + 2 - k > 1;$$

ferner ist

$$\int_{\eta-\gamma+\varepsilon-\infty i}^{\eta-\gamma+\varepsilon+\infty i} \frac{e^{xs}}{s^{\nu+2}} f(s+\gamma)\, ds = \int_{a-\gamma+\varepsilon-\infty i}^{a-\gamma+\varepsilon+\infty i} \frac{e^{xs}}{s^{\nu+2}} f(s+\gamma)\, ds - 2\pi i R(x), \tag{38}$$

wo $R(x)$ das Residuum des Integranden für $s = 0$ bezeichnet; denn bei vorläufiger Anwendung des CAUCHY'schen Satzes auf das Rechteck mit den Ecken $\eta - \gamma + \varepsilon \pm \omega i$, $a - \gamma + \varepsilon \pm \omega i$ und nachherigem Grenzübergang $\omega = \infty$ verschwinden die Beiträge der horizontalen Seiten fester Länge, auf denen der Integrand gleichmässig Null wird. $R(x)$ hat folgenden Wert. Es gilt in der Umgebung von $s = 0$

$$e^{xs} f(s+\gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} s^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\gamma)}{n!} s^n;$$

das Residuum von

$$\frac{e^{xs}}{s^{\nu+2}} f(s+\gamma),$$

d. h. der Koeffizient von $s^{\nu+1}$ in $e^{xs} f(s+\gamma)$, ist daher die ganze rationale Funktion von x

$$R(x) = \sum_{\rho=0}^{\nu+1} \frac{x^\rho}{\rho!} \frac{f^{(\nu+1-\rho)}(\gamma)}{(\nu+1-\rho)!}. \tag{39}$$

Aus (37) und (38) folgt

$$\frac{2\pi i}{(\nu+1)!} \sum_{\lambda_n \leq x} b_n e^{-\lambda_n \gamma} (x-\lambda_n)^{\nu+1} = 2\pi i R(x) + \int_{\eta-\gamma+\varepsilon-\infty i}^{\eta-\gamma+\varepsilon+\infty i} \frac{e^{xs}}{s^{\nu+2}} f(s+\gamma) ds$$
$$= 2\pi i R(x) + O\left(e^{x(\eta-\gamma+\varepsilon)} \int_1^\infty \frac{t^k}{t^{\nu+2}} dt\right)$$
$$= 2\pi i R(x) + O(e^{x(\eta-\gamma+\varepsilon)}),$$

$$\sum_{\lambda_n \leq x} b_n e^{-\lambda_n \gamma} (x-\lambda_n)^{\nu+1} = (\nu+1)! R(x) + O(e^{x(\eta-\gamma+\varepsilon)}).$$

Hierauf passen nun alle Voraussetzungen des Hilfssatzes 6, wenn dort $\nu+1$ statt ν geschrieben und gesetzt wird:

$$a_n = b_n e^{-\lambda_n \gamma},$$
$$j = \eta - \gamma,$$
$$G(x) = (\nu+1)! R(x).$$

Denn es ist insbesondere

$$\eta - \gamma < a - \gamma,$$
$$\eta - \gamma \geq -a - \gamma.$$

Die Formel (29) liefert also hier bei jedem $\delta > 0$

$$\sum_{\lambda_n \leq x} b_n e^{-\lambda_n \gamma} = R^{(\nu+1)}(x) + O\left(e^{x\left(\frac{\eta-\gamma+(2^{\nu+1}-1)(a-\gamma)}{2^{\nu+1}}+\delta\right)}\right),$$

also nach (39)

$$= f(\gamma) + O\left(e^{x\left(a + \frac{\eta-a}{2^{\nu+1}} - \gamma + \delta\right)}\right).$$

Wenn nun γ so gewählt wird, dass

$$a - \frac{1}{2^{\nu+1}}(a-\eta) < \gamma < \beta$$

ist, was möglich ist, und alsdann δ hinreichend klein, so erkennt man die Richtigkeit

von

$$\lim_{x=\infty} \sum_{\lambda_n \leq x} b_n e^{-\lambda_n \gamma} = f(\gamma);$$

damit ist der Satz III bewiesen.

§ 6.

SATZ IV. — *Unter den Voraussetzungen des Satzes III konvergiert die Reihe* (10) *für*

$$\sigma > a - \frac{\nu + 1 - k}{\nu + 2^\nu - k}(a - \eta).$$

Beweis: k darf ohne Beschränkung der Allgemeinheit als nicht ganz vorausgesetzt werden, d. h. als $> \nu$. Es ist nur nötig zu beweisen, dass aus der Konvergenz von (10) für

$$\sigma > \beta,$$

wo

$$a - \frac{\nu + 1 - k}{\nu + 2^\nu - k}(a - \eta) < \beta \leq a \tag{40}$$

ist, die Konvergenz für

$$s = \gamma$$

folgt, wo γ eine passend wählbare Zahl $< \beta$ ist.

Es sei also (10) für $\sigma > \beta$ konvergent, wo (40) gilt, und γ sei vorläufig nur durch

$$\eta < \gamma < \beta$$

beschränkt; dann ist

$$\gamma < a.$$

Ebenso sei ε eine beliebige Konstante, für die

$$0 < \varepsilon < \gamma - \eta$$

ist. Es sei

$$T = T(x) = e^{xg},$$

wo über die positive Konstante g noch verfügt werden wird. Auf der Strecke von $a - \gamma + \varepsilon - Ti$ bis $a - \gamma + \varepsilon + Ti$ konvergiert

$$f(s + \gamma) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n (s+\gamma)}$$

gleichmässig; daher ist

$$\int_{a-\gamma+\varepsilon-Ti}^{a-\gamma+\varepsilon+Ti} \frac{e^{xs}}{s^{\nu+1}} f(s+\gamma)\, ds = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n \gamma} \int_{a-\gamma+\varepsilon-Ti}^{a-\gamma+\varepsilon+Ti} \frac{e^{(x-\lambda_n)s}}{s^{\nu+1}}\, ds.$$

x sei gleich $\geq \lambda_1$ gewählt und die ganze Zahl $m = m(x)$ durch

$$\lambda_m \leq x < \lambda_{m+1}$$

definiert.

Es ist für $n \leq m - 1$ nach dem Hilfssatz 5

$$\left| \int_{a-\gamma+\varepsilon-Ti}^{a-\gamma+\varepsilon+Ti} \frac{e^{(x-\lambda_n)s}}{s^{\nu+1}}\, ds - \frac{2\pi i (x - \lambda_n)^\nu}{\nu!} \right| \leq \frac{2\, e^{(x-\lambda_n)(a-\gamma+\varepsilon)}}{(x - \lambda_n) T^{\nu+1}},$$

für $n \geqq m + 2$ nach dem Hilfssatz 5

$$\left| \int_{a-\gamma+\varepsilon-Ti}^{a-\gamma+\varepsilon+Ti} \frac{e^{(x-\lambda_n)s}}{s^{\nu+1}} ds \right| \leqq \frac{2 e^{(x-\lambda_n)(a-\gamma+\varepsilon)}}{(\lambda_n - x) T^{\nu+1}}.$$

Für $n = m + 1$ verwende ich die durch Hilfssatz 7 gelieferte Abschätzung

$$\left| \int_{a-\gamma+\varepsilon-Ti}^{a-\gamma+\varepsilon+Ti} \frac{e^{(x-\lambda_{m+1})s}}{s^{\nu+1}} ds \right| \leqq \frac{2 e^{(x-\lambda_{m+1})(a-\gamma+\varepsilon)}}{\nu T^{\nu}}.$$

Für $n = m$ verwende ich die durch Hilfssatz 7 gelieferte Abschätzung

$$\left| \int_{a-\gamma+\varepsilon-Ti}^{a-\gamma+\varepsilon+Ti} \frac{e^{(x-\lambda_m)s}}{s^{\nu+1}} ds - \frac{2\pi i (x-\lambda_m)^{\nu}}{\nu!} \right| \leqq \frac{2 e^{(x-\lambda_m)(a-\gamma+\varepsilon)}}{\nu T^{\nu}}$$

oder die durch Hilfssatz 5 gelieferte (für $x = \lambda_m$ gewiss wertlose) Abschätzung

$$\left| \int_{a-\gamma+\varepsilon-Ti}^{a-\gamma+\varepsilon+Ti} \frac{e^{(x-\lambda_m)s}}{s^{\nu+1}} ds - \frac{2\pi i (x-\lambda_m)^{\nu}}{\nu!} \right| \leqq \frac{2 e^{(x-\lambda_m)(a-\gamma+\varepsilon)}}{(x-\lambda_m) T^{\nu+1}},$$

je nachdem die eine oder andere besser ist.

Dadurch erhalte ich, wenn Σ' bezeichnet, dass die Indices $n = m$ und $n = m + 1$ fehlen,

$$\left| \int_{a-\gamma+\varepsilon-Ti}^{a-\gamma+\varepsilon+Ti} \frac{e^{xs}}{s^{\nu+1}} f(s+\gamma) ds - \frac{2\pi i}{\nu!} \sum_{\lambda_n \leqq x} b_n e^{-\lambda_n \gamma} (x-\lambda_n)^{\nu} \right|$$
$$\leqq \frac{2}{T^{\nu+1}} \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{|b_n| e^{-\lambda_n \gamma} e^{(x-\lambda_n)(a-\gamma+\varepsilon)}}{|x-\lambda_n|} + \frac{2}{T^{\nu}} |b_m| e^{-\lambda_m \gamma} e^{(x-\lambda_m)(a-\gamma+\varepsilon)} \operatorname{Min.}\left(\frac{1}{\nu}, \frac{1}{(x-\lambda_m) T}\right)$$
$$+ \frac{2}{\nu T^{\nu}} |b_{m+1}| e^{-\lambda_{m+1}\gamma} e^{(x-\lambda_{m+1})(a-\gamma+\varepsilon)}$$

$$(41) \quad \begin{cases} = \dfrac{2 e^{x(a-\gamma+\varepsilon)}}{T^{\nu+1}} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{|b_n| e^{-\lambda_n(a+\varepsilon)}}{|x-\lambda_n|} + \frac{2 e^{x(a-\gamma+\varepsilon)}}{T^{\nu}} |b_m| e^{-\lambda_m(a+\varepsilon)} \operatorname{Min.}\left(\frac{1}{\nu}, \frac{1}{(x-\lambda_m) T}\right) \\ + \dfrac{2 e^{x(a-\gamma+\varepsilon)}}{\nu T^{\nu}} |b_{m+1}| e^{-\lambda_{m+1}(a+\varepsilon)}. \end{cases}$$

Nun ist

$$b_n = O\left(e^{\lambda_n \frac{\varepsilon}{2}}\right)$$

und

$$|x - \lambda_n| \begin{cases} \geqq \lambda_m - \lambda_n & \text{für } n \leqq m - 1, \\ > \lambda_n - \lambda_{m+1} & \text{für } n \geqq m + 2, \end{cases}$$

also

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{|b_n| e^{-\lambda_n(a+\varepsilon)}}{|x-\lambda_n|} = O \sum_{n=1}^{m-1} \frac{e^{-\lambda_n\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)}}{\lambda_m - \lambda_n} + O \sum_{n=m+2}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)}}{\lambda_n - \lambda_{m+1}}$$
$$= O \sum_{n=1}^{m-1} \frac{e^{-\lambda_n\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)}}{w_{m-1} - \lambda_n} + O \sum_{n=m+2}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)}}{\lambda_n - w_{m+1}},$$

wo w_m die alte Bedeutung hat, also

$$= O \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)}}{|w_{m-1} - \lambda_n|} + O \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)}}{|w_{m+1} - \lambda_n|}$$

und daher nach Hilfssatz 3

$$= O(1) + O(1)$$
$$= O(1).$$

Das erste Glied in (41) ist also

$$O\left(\frac{e^{x(a-\gamma+\varepsilon)}}{T^{\nu+1}}\right) = O(e^{x(a-\gamma-(\nu+1)g+\varepsilon)}).$$

In den beiden anderen Gliedern verwende ich die aus der Konvergenz von (10) für $\sigma > \beta$ fliessende Relation

$$b_n = O(e^{\lambda_n(\beta+\varepsilon)})$$

für $n = m$ und $n = m + 1$. Dadurch wird das Glied mit $m + 1$

$$O\left(\frac{e^{x(a-\gamma+\varepsilon)}}{T^{\nu}} e^{\lambda_{m+1}(\beta+\varepsilon)} e^{-\lambda_{m+1}(a+\varepsilon)}\right) = O(e^{x(a-\gamma-\nu g+\varepsilon)} e^{-\lambda_{m+1}(a-\beta)})$$
$$= O(e^{x(a-\gamma-\nu g+\varepsilon)} e^{-x(a-\beta)})$$
$$= O(e^{x(\beta-\gamma-\nu g+\varepsilon)})$$

und das Glied mit m

$$O\left(\frac{e^{x(a-\gamma+\varepsilon)}}{T^{\nu}} e^{\lambda_m(\beta+\varepsilon)} e^{-\lambda_m(a+\varepsilon)} \operatorname{Min.}\left(\frac{1}{\nu}, \frac{1}{(x-\lambda_m)T}\right)\right)$$
$$= O\left(e^{x(a-\gamma-\nu g+\varepsilon)} e^{-\lambda_m(a-\beta)} \operatorname{Min.}\left(\frac{1}{\nu}, \frac{1}{(x-\lambda_m)T}\right)\right);$$

falls nun

$$x - \lambda_m \geqq 1$$

ist, verwende ich

$$e^{-\lambda_m(a-\beta)} \frac{1}{(x-\lambda_m)T} = O\left(1 \cdot \frac{1}{T}\right)$$
$$= O(e^{-xg});$$

falls dagegen

$$x - \lambda_m < 1$$

ist, benutze ich

$$e^{-\lambda_m(a-\beta)} \frac{1}{\nu} = O(e^{-(x-1)(a-\beta)})$$
$$= O(e^{-x(a-\beta)});$$

das Glied mit m ist also in jedem Fall

$$= O(e^{x(a-\gamma-(\nu+1)g+\varepsilon)}) + O(e^{x(\beta-\gamma-\nu g+\varepsilon)}).$$

Es ergibt sich also aus (41) und den vorstehenden Überlegungen unter allen Umständen

$$\frac{2\pi i}{\nu!} \sum_{\lambda_n \leqq x} b_n e^{-\lambda_n \gamma}(x-\lambda_n)^{\nu} = \int_{a-\gamma+\varepsilon-Ti}^{a-\gamma+\varepsilon+Ti} \frac{e^{xs}}{s^{\nu+1}} f(s+\gamma)\,ds + O(e^{x(a-\gamma-(\nu+1)g+\varepsilon)}) + O(e^{x(\beta-\gamma-\nu g+\varepsilon)}).$$

Ich wende nun den CAUCHY'schen Satz auf den Integranden

$$\frac{e^{xs}}{s^{\nu+1}} f(s+\gamma)$$

und das Rechteck mit den Ecken $\eta - \gamma + \varepsilon \pm Ti$, $a - \gamma + \varepsilon \pm Ti$ an. Darin liegt

der Pol (bezw. reguläre Punkt) $s = 0$ mit dem Residuum

$$S(x) = \sum_{\rho=0}^{\nu} \frac{x^\rho}{\rho!} \frac{f^{(\nu-\rho)}(\gamma)}{(\nu-\rho)!},$$

und ich erhalte

$$\frac{2\pi i}{\nu!} \sum_{\lambda_n \leq x} b_n e^{-\lambda_n \gamma}(x-\lambda_n)^\nu = 2\pi i S(x) + O(e^{x(a-\gamma-(\nu+1)g+\varepsilon)}) + O(e^{x(\beta-\gamma-\nu g+\varepsilon)})$$

$$+ \int_{a-\gamma+\varepsilon-Ti}^{\eta-\gamma+\varepsilon-Ti} \frac{e^{xs}}{s^{\nu+1}} f(s+\gamma)\,ds + \int_{\eta-\gamma+\varepsilon-Ti}^{\eta-\gamma+\varepsilon+Ti} \frac{e^{xs}}{s^{\nu+1}} f(s+\gamma)\,ds + \int_{\eta-\gamma+\varepsilon+Ti}^{a-\gamma+\varepsilon+Ti} \frac{e^{xs}}{s^{\nu+1}} f(s+\gamma)\,ds$$

$$= 2\pi i S(x) + O(e^{x(a-\gamma-(\nu+1)g+\varepsilon)}) + O(e^{x(\beta-\gamma-\nu g+\varepsilon)}) + I_1 + I_2 + I_3.$$

Hierin ist

$$\begin{aligned} I_2 &= O\left(e^{x(\eta-\gamma+\varepsilon)} \int_1^T \frac{t^k}{t^{\nu+1}}\,dt\right) \\ &= O(e^{x(\eta-\gamma+\varepsilon)}\, T^{k-\nu}) \\ &= O(e^{x(\eta-\gamma+(k-\nu)g+\varepsilon)}). \end{aligned}$$

Zur Abschätzung von I_3 (die von I_1 ist wörtlich dieselbe) werde für das Intervall $\eta - \gamma + \varepsilon \leq \sigma \leq \beta - \gamma + \varepsilon$ die Voraussetzung

$$f(s+\gamma) = O(T^k) \qquad (s = \sigma + Ti)$$

verwendet, alsdann, d. h. für $\beta - \gamma + \varepsilon \leq \sigma \leq a - \gamma + \varepsilon$, die Abschätzung des Hilfssatzes 4

$$f(s+\gamma) = O\left(T^{1-\frac{\sigma-\beta+\gamma-\varepsilon}{a-\beta}}\right).$$

Das ergibt

$$\begin{aligned} I_3 &= O(e^{x(\beta-\gamma+\varepsilon)}\, T^{k-\nu-1}) + O(e^{x(\beta-\gamma+\varepsilon)}\, T^{1-\nu-1}) + O(e^{x(a-\gamma+\varepsilon)}\, T^{0-\nu-1}) \\ &= O(e^{x(\beta-\gamma+(k-\nu-1)g+\varepsilon)}) + O(e^{x(a-\gamma-(\nu+1)g+\varepsilon)}), \end{aligned}$$

und für I_1 gilt dasselbe.

Daher kommt vorläufig heraus:

$$(42) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{\lambda_n \leq x} b_n e^{-\lambda_n \gamma}(x-\lambda_n)^\nu = \nu!\, S(x) &+ O(e^{x(a-\gamma-(\nu+1)g+\varepsilon)}) + O(e^{x(\beta-\gamma-\nu g+\varepsilon)}) \\ &+ O(e^{x(\eta-\gamma+(k-\nu)g+\varepsilon)}) + O(e^{x(\beta-\gamma+(k-\nu-1)g+\varepsilon)}). \end{aligned} \right.$$

Die günstigste Wahl ist diejenige, bei welcher die grösste der vier Zahlen

$$(43) \qquad a - (\nu+1)g,$$

$$(44) \qquad \beta - \nu g,$$

$$(45) \qquad \eta + (k-\nu)g,$$

$$(46) \qquad \beta + (k-\nu-1)g$$

am kleinsten ist; denn diese vier Zahlen, vermehrt um $-\gamma + \varepsilon$, sind die vier Faktoren von x in den Exponenten auf der rechten Seite von (42). Ich setze

$$g = \beta - \eta,$$

was positiv ist und die beiden letzten Ausdrücke (45) und (46) gleich macht, nämlich

$$= \beta + (k-\nu-1)(\beta-\eta).$$

Dieser gemeinsame Wert ist grösser als der Ausdruck (44), da

$$0 < (k-1)g$$

ist. Er ist auch grösser als der Ausdruck (43); denn hierfür braucht nur

$$a < \beta + kg$$

verifiziert zu werden, und nach (40) ist

$$\begin{aligned}\beta &> a - \frac{\nu+1-k}{\nu+2^\nu-k}(a-\eta)\\ &> a - \frac{1}{2^\nu}(a-\eta)\\ &\geqq a - \frac{1}{2}(a-\eta)\\ &= \frac{\eta+a}{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta + kg &= \beta + k(\beta-\eta)\\ &> \frac{\eta+a}{2}(1+k) - k\eta\\ &= \frac{\eta+a}{2} + k\frac{a-\eta}{2}\\ &> \frac{\eta+a}{2} + \frac{a-\eta}{2}\\ &= a.\end{aligned}$$

Es hat sich also ergeben:

$$\sum_{\lambda_n \leqq x} b_n e^{-\lambda_n\gamma}(x-\lambda_n)^\nu = \nu!\,S(x) + O(e^{x(\beta+(k-\nu-1)(\beta-\eta)-\gamma+\varepsilon)}), \tag{47}$$

wo die Verfügung über γ und ε noch offen bleibt, wenn nur

$$\eta < \eta + \varepsilon < \gamma < \beta$$

ist.

Falls

$$\eta < \gamma < \beta$$

ist, gilt (47) somit für alle hinreichend kleinen positiven ε, also für alle positiven ε.

Auf (47) wende ich nun den Hilfssatz 6 an, in welchem ich setze:

$$\begin{aligned}a_n &= b_n e^{-\lambda_n\gamma},\\ j &= \beta + (k-\nu-1)(\beta-\eta) - \gamma,\\ G(x) &= \nu!\,S(x);\end{aligned}$$

es ist wirklich

$$j \leqq a - \gamma$$

wegen

$$\begin{aligned}j &< \beta + 0\cdot(\beta-\eta) - \gamma\\ &= \beta - \gamma\\ &\leqq a - \gamma\end{aligned}$$

und

$$j \geqq -a-\gamma$$

wegen

$$\begin{aligned} j &= (k-\nu)\beta - (k-\nu-1)\eta - \gamma \\ &> (k-\nu)\eta - (k-\nu-1)\eta - \gamma \\ &= \eta - \gamma \\ &\geqq -a-\gamma. \end{aligned}$$

Die Formel (29) liefert also wegen

$$S^{(\nu)}(x) = f(\gamma)$$

bei jedem $\delta > 0$

$$\sum_{\lambda_n \leqq x} b_n e^{-\lambda_n \gamma} = f(\gamma) + O\left(e^{x\left(\frac{\beta+(k-\nu-1)(\beta-\eta)-\gamma+(2^\nu-1)(a-\gamma)}{2^\nu}+\delta\right)}\right). \tag{48}$$

Wenn γ hinreichend nahe unterhalb β gewählt wird, ist der Koeffizient von x im Exponenten

$$\begin{aligned} &< \frac{(k-\nu-1)(\beta-\eta)+(2^\nu-1)(a-\beta)}{2^\nu} + 2\delta \\ &= \frac{-\beta(\nu+2^\nu-k)+\eta(\nu+1-k)+(2^\nu-1)a}{2^\nu} + 2\delta; \end{aligned} \tag{49}$$

nach (40) ist nun

$$\beta > a - \frac{\nu+1-k}{\nu+2^\nu-k}(a-\eta),$$

$$\begin{aligned} \beta(\nu+2^\nu-k) &> a(\nu+2^\nu-k) - (\nu+1-k)(a-\eta) \\ &= \eta(\nu+1-k) + (2^\nu-1)a, \end{aligned}$$

also der Bruch in (49) negativ; der Ausdruck (49) ist also bei passender Wahl von $\delta > 0$ negativ. Es gibt also nach (48) ein $\gamma < \beta$ derart, dass

$$\lim_{x=\infty} \sum_{\lambda_n \leqq x} b_n e^{-\lambda_n \gamma} = f(\gamma)$$

ist.

Die wahre Konvergenzabszisse β kann also nicht

$$> a - \frac{\nu+1-k}{\nu+2^\nu-k}(a-\eta)$$

sein, und der Satz IV ist bewiesen.

Die Sätze III und IV besagen zusammenfassend die Konvergenz von (10) für

$$\sigma > a - (a-\eta)M_k, \tag{50}$$

wo

$$M_k = \text{Max.}\left(\frac{1}{2^{\nu+1}}, \frac{\nu+1-k}{\nu+2^\nu-k}\right) \tag{51}$$

gesetzt ist. Beide Sätze sind natürlich auch für

$$\eta \geqq a$$

richtig, weil alsdann trivial; die Reihe (10) konvergiert also im Gebiete (50), wenn nur

$$k \geqq 1$$

und

$$-a \leqq \eta$$

ist.

DRITTER TEIL.

§ 7.

Dieser Paragraph ist eine Reproduktion aus der in Anm. [4]) genannten Arbeit von Herrn LINDELÖF.

HILFSSATZ 8. — *Es möge die analytische Funktion $F(s)$ folgende Eigenschaften haben:*

1) *Sie ist regulär im Gebiet $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$, $t \geqq t_0$, wo σ_1, σ_2, t_0 fest und $\sigma_2 > \sigma_1$, $t_0 > 0$ ist.*

2) *Auf dem Rande dieses Gebietes, d. h. auf der endlichen Strecke $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$, $t = t_0$ und auf den unendlichen Strecken $\sigma = \sigma_1$, $t \geqq t_0$ sowie $\sigma = \sigma_2$, $t \geqq t_0$ ist*

(52) $$|F(s)| \leqq C,$$
wo C eine Konstante ist.

3) *Im Streifen $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$ ist gleichmässig*

(53) $$F(s) = O(t^c),$$
wo c eine Konstante ist [11]).

Dann ist im ganzen Bereich $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$, $t \geqq t_0$

$$|F(s)| \leqq C.$$

Beweis: Es sei ε irgend eine positive Konstante. Dann ist die Funktion

$$G(s) = e^{i\varepsilon s} F(s)$$

für $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$, $t \geqq t_0$ regulär. Ebenda ist wegen $t_0 > 0$

(54) $$|G(s)| = e^{-\varepsilon t} |F(s)| < |F(s)|.$$

Insbesondere auf dem Rande des Gebietes ist also nach (52)

(55) $$|G(s)| < C.$$

Andererseits ist wegen (53) und (54) im Streifen $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$ gleichmässig

$$G(s) = O(e^{-\varepsilon t} t^c),$$

also ebenda gleichmässig

(56) $$\lim_{t=\infty} G(s) = 0.$$

---

[11]) Natürlich genügt es, wie der folgende Beweis zeigt, vorauszusetzen, dass für jedes $\delta > 0$ gleichmässig

$$F(s) = O(e^{\delta t})$$

ist.

Jeder Punkt im Innern des Gebietes $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$, $t \geqq t_0$ lässt sich also nach (55) und (56) in ein Rechteck mit den Ecken $\sigma_1 + t_0 i$, $\sigma_2 + t_0 i$, $\sigma_1 + t_1 i$, $\sigma_2 + t_1 i$ einschliessen, auf dessen Rande

$$|G(s)| < C$$

ist; t_1 braucht dazu nur hinreichend gross gewählt zu werden. Daher ist für jeden Punkt des Gebietes

$$|G(s)| < C,$$

also nach (54)

$$|F(s)| < Ce^{\varepsilon t}.$$

Da dies für alle $\varepsilon > 0$ gilt, ist

$$|F(s)| \leqq C,$$

was zu beweisen war.

§ 8.

Auch in diesem Paragraphen ist nichts als neu anzusehen. Er führt nur im Sinne von Herrn LINDELÖF einige seiner Andeutungen [12]) näher aus.

HILFSSATZ 9. — *Es sei*

$$\sigma_1 < \sigma_2,$$

und eine analytische Funktion $f(s)$ habe die Eigenschaften:

1) *$f(s)$ ist regulär für $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$.*

2) *Für $\sigma = \sigma_1$ sei*

(57) $$f(s) = O(|t|^k),$$

wo $k \geqq 0$ konstant ist.

3) *Für $\sigma = \sigma_2$ sei*

(58) $$f(s) = O(1).$$

4) *Für $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$ sei gleichmässig*

(59) $$f(s) = O(|t|^c),$$

wo c konstant ist [13]).

Dann ist für $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$ gleichmässig

(60) $$f(s) = O\left(|t|^{k\frac{\sigma_2-\sigma}{\sigma_2-\sigma_1}}\right).$$

Der Exponent nimmt linear von k zu 0 ab.

---

[12]) Vergl. die Fussnote auf S. 347 der in Anm. [4]) zitierten Abhandlung.

[13]) Die Annahme

$$f(s) = O(e^{\delta|t|})$$

bei jedem $\delta > 0$ würde genügen.

Beweis: Wir nehmen die spezielle Funktion

$$g(s)=\frac{s^{\frac{k}{\sigma_2-\sigma_1}(\sigma_2-s)}}{\sin\left(\frac{\pi k}{2(\sigma_2-\sigma_1)}s\right)}$$

$$(61)\qquad =\frac{e^{\frac{k}{\sigma_2-\sigma_1}(\sigma_2-s)\log s}}{\sin\left(\frac{\pi k}{2(\sigma_2-\sigma_1)}s\right)}$$

zu Hilfe, welche für reelle $s>0$ durch den reellen Logarithmus definiert, in der längs der reellen Achse von 0 bis $-\infty$ aufgeschnittenen Ebene meromorph ist und insbesondere regulär für

$$\sigma_1\leqq\sigma\leqq\sigma_2,\qquad t>0$$

und

$$\sigma_1\leqq\sigma\leqq\sigma_2,\qquad t<0.$$

Für $\sigma_1\leqq\sigma\leqq\sigma_2$ ist gleichmässig bei wachsendem positiven t

$$\left|e^{\frac{k}{\sigma_2-\sigma_1}(\sigma_2-s)\log s}\right|=e^{\frac{k}{\sigma_2-\sigma_1}\Re((\sigma_2-\sigma-ti)\log(\sigma+ti))}$$

$$=e^{\frac{k}{\sigma_2-\sigma_1}\Re\left((\sigma_2-\sigma-ti)\left(\log t+\frac{\pi}{2}i+O\left(\frac{1}{t}\right)\right)\right)}$$

$$=e^{\frac{k}{\sigma_2-\sigma_1}\left((\sigma_2-\sigma)\log t+\frac{\pi}{2}t+O(1)\right)}$$

$$(62)\qquad =e^{\frac{\pi k}{2(\sigma_2-\sigma_1)}t}\,t^{k\frac{\sigma_2-\sigma}{\sigma_2-\sigma_1}}\,e^{O(1)}.$$

Andererseits ist

$$\left|\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi k}{2(\sigma_2-\sigma_1)}s\right)}\right|=\frac{2}{\left|e^{\frac{\pi k}{2(\sigma_2-\sigma_1)}(-t+\sigma i)}-e^{\frac{\pi k}{2(\sigma_2-\sigma_1)}(t-\sigma i)}\right|};$$

im Nenner der rechten Seite hat das erste Glied wegen

$$\left|e^{\frac{\pi k}{2(\sigma_2-\sigma_1)}(-t+\sigma i)}\right|=e^{-\frac{\pi k}{2(\sigma_2-\sigma_1)}t}$$

gleichmässig für $t=\infty$ den Limes 0; der Quotient des zweiten Gliedes durch

$$e^{\frac{\pi k}{2(\sigma_2-\sigma_1)}t}$$

hat den absoluten Betrag 1. Daher ist für $\sigma_1\leqq\sigma\leqq\sigma_2$ gleichmässig bei wachsendem positiven t

$$(63)\qquad \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi k}{2(\sigma_2-\sigma_1)}s\right)}=e^{-\frac{\pi k}{2(\sigma_2-\sigma_1)}t}\,e^{O(1)}.$$

Aus (61), (62) und (63) folgt für $\sigma_1\leqq\sigma\leqq\sigma_2$ gleichmässig bei wachsendem positiven t

$$g(s)=t^{k\frac{\sigma_2-\sigma}{\sigma_2-\sigma_1}}\,e^{O(1)},$$

also bei wachsendem $|t|$

$$g(s) = |t|^{k\frac{\sigma_2-\sigma}{\sigma_2-\sigma_1}} e^{O(1)},$$

d. h. es gibt zwei positive Konstanten A und B derart, dass für $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$, $|t| \geqq 1$

$$(64) \qquad A|t|^{k\frac{\sigma_2-\sigma}{\sigma_2-\sigma_1}} < |g(s)| < B|t|^{k\frac{\sigma_2-\sigma}{\sigma_2-\sigma_1}}$$

ist.

Ich setze nun

$$\frac{f(s)}{g(s)} = F(s).$$

Diese Funktion erfüllt, $t_0 = 1$ gesetzt, alle Voraussetzungen des Hilfssatzes 8; denn erstens ist $g(s)$ für $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$, $t \geqq 1$ von Null verschieden, also $f(s)$ ebenda regulär. Zweitens ist für $\sigma = \sigma_1$ und wachsendes t nach (57) und der ersten Hälfte von (64)

$$F(s) = O\left(\frac{t^k}{t^{k\frac{\sigma_2-\sigma_1}{\sigma_2-\sigma_1}}}\right)$$
$$= O(1),$$

ferner für $\sigma = \sigma_2$ und wachsendes t nach (58) und der ersten Hälfte von (64)

$$F(s) = O\left(\frac{1}{t^{k\frac{\sigma_2-\sigma_2}{\sigma_2-\sigma_1}}}\right)$$
$$= O(1).$$

Drittens ist nach (59) und der ersten Hälfte von (64) für $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$ gleichmässig

$$F(s) = O\left(\frac{t^c}{t^{k\frac{\sigma_2-\sigma}{\sigma_2-\sigma_1}}}\right)$$
$$= O\left(\frac{t^c}{t^0}\right)$$
$$= O(t^c).$$

Nach dem Hilfssatz 8 ist also für $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$, $t \geqq 1$

$$F(s) = O(1),$$

folglich in Verbindung mit der zweiten Hälfte von (64) für $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$

$$f(s) = O(t^{k\frac{\sigma_2-\sigma}{\sigma_2-\sigma_1}}).$$

Ganz ebenso ergibt sich für $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$ und negatives t

$$f(s) = O((-t)^{k\frac{\sigma_2-\sigma}{\sigma_2-\sigma_1}}),$$

also zusammenfassend die Behauptung (60).

§ 9.

SATZ V. — *Unter den Voraussetzungen des Satzes I, bei denen statt*

$$0 \leqq k < 1$$

nur

$$0 \leqq k$$

verlangt wird, ist die Reihe (10) *für*

$$\sigma > \frac{\eta + ka}{1 + k}$$

konvergent.

Beweis: Es darf $k > 0$ angenommen werden. Es sei

$$a \geqq \gamma > \frac{\eta + ka}{1 + k};$$

dann ist die Existenz von

$$\lim_{m=\infty} \sum_{n=1}^{m} b_n e^{-\lambda_n \gamma}$$

zu beweisen.

Es habe w_m die alte Bedeutung. Es seien $\varepsilon < \gamma - \eta$ und g positive Konstanten, über die noch verfügt werden wird, ferner

$$T = e^{w_m g}.$$

Dann folge ich zunächst dem Beweisgange des Satzes I bis zur Formel

$$(15) \qquad 2\pi i \left(\sum_{n=1}^{m} b_n e^{-\lambda_n \gamma} - f(\gamma) \right) = O(e^{w_m(a-\gamma-g+\varepsilon)}) + I_1 + I_2 + I_3$$

und nehme auch für I_2 die damalige Abschätzung

$$(16) \qquad I_2 = O(e^{w_m(\eta-\gamma+kg+\varepsilon)}).$$

Nun kommt das Neue. Für die Behandlung von I_3 (die von I_1 liefert aus Symmetriegründen dieselbe Endabschätzung) wende ich den Hilfssatz 9 an: Auf unser $f(s)$,

$$\sigma_1 = \eta + \varepsilon,$$
$$\sigma_2 = a + \varepsilon.$$

Seine Voraussetzungen sind offenbar erfüllt. Also ist für $\eta + \varepsilon \leqq \sigma \leqq a + \varepsilon$ gleichmässig

$$f(s) = O\left(|t|^{k \frac{a+\varepsilon-\sigma}{a-\eta}}\right),$$

d. h. für $\eta - \gamma + \varepsilon \leqq \sigma \leqq a - \gamma + \varepsilon$ gleichmässig

$$f(s + \gamma) = O\left(|t|^{k \frac{a+\varepsilon-\sigma-\gamma}{a-\eta}}\right).$$

Daher ist

$$I_3 = O \int_{\eta-\gamma+\varepsilon}^{a-\gamma+\varepsilon} \frac{e^{w_m \sigma}}{T} T^{k \frac{a-\gamma+\varepsilon-\sigma}{a-\eta}} d\sigma$$

$$= O \int_{\eta-\gamma+\varepsilon}^{a-\gamma+\varepsilon} e^{w_m\left(\sigma\left(1-\frac{k}{a-\eta} g\right)+\left(-1+\frac{k}{a-\eta}(a-\gamma+\varepsilon)\right) g\right)} d\sigma,$$

also, da die lineare Funktion von σ im Exponenten ihr Maximum am Anfang oder Ende des Intervalls erreicht,

$$I_3 = O\left(\frac{e^{w_m(\eta-\gamma+\varepsilon)} T^k}{T}\right) + O\left(\frac{e^{w_m(a-\gamma+\varepsilon)} T^0}{T}\right)$$
$$= O(e^{w_m(\eta-\gamma+(k-1)g+\varepsilon)}) + O(e^{w_m(a-\gamma-g+\varepsilon)}).$$

Das erste Glied ist gegen die Abschätzung von I_2 zu vernachlässigen, das zweite kam schon in (15) vor.

Es ergibt sich also:

$$\sum_{n=1}^{m} b_n e^{-\lambda_n \gamma} - f(\gamma) = O\,(e^{w_m(a-\gamma-g+\varepsilon)}) + O(e^{w_m(\eta-\gamma+kg+\varepsilon)}).$$

g werde so gewählt, dass beide Exponenten gleich werden, d. h. es werde

$$g = \frac{a-\eta}{1+k}$$

gesetzt. Dann ist jener gemeinsame Wert der Exponenten

$$a - \gamma - \frac{a-\eta}{1+k} + \varepsilon = \frac{\eta + k a}{1+k} - \gamma + \varepsilon,$$

also bei passender Wahl von ε negativ, womit der Satz V bewiesen ist.

Für $\eta \geqq a$ wäre der Satz V trivial.

Satz VI. — *Unter den Voraussetzungen des Satzes V konvergiert, falls überdies*

$$\eta + k a < 0$$

ist, die Reihe (10) *für*

$$\sigma > \eta + k a.$$

Beweis: Wörtlich wie der des Satzes II.

*
* *

Der dritte Teil der vorliegenden Abhandlung hat also zu dem Ergebnis geführt:

$$\frac{\eta + k a}{1+k} \quad \text{für} \quad \eta + k a \geqq 0,$$

$$\eta + k a \quad \text{für} \quad \eta + k a < 0.$$

Dies ist im Falle

$$0 \leqq k < 1$$

mit dem Ergebnis des ersten Teils identisch. Ich behaupte, dass im Falle

$$k \geqq 1$$

das Ergebnis des zweiten Teils darin enthalten ist. Dasselbe lautete, wenn

$$M_k = \text{Max.}\left(\frac{1}{2^{\nu+1}}, \frac{\nu + 1 - k}{\nu + 2^\nu - k}\right) \tag{51}$$

gesetzt wurde und überdies $-a \leqq \eta \leqq a$ angenommen war,

$$a - (a - \eta) M_k,$$

was wegen

$$a-(a-\eta)M_k \geqq a-(a-\eta)\frac{1}{2}$$
$$=\frac{\eta+a}{2}$$
$$\geqq 0$$

nicht negativ ist. Ich behaupte also, dass

$$\frac{\eta+ka}{1+k} \leqq a-(a-\eta)M_k \tag{65}$$

ist.

Hierzu stelle ich zunächst fest, dass

$$1+k \leqq \frac{1}{M_k}, \tag{66}$$

d. h.

$$1+k \leqq 2^{\nu+1} \tag{67}$$

und

$$1+k \leqq \frac{\nu+2^\nu-k}{\nu+1-k} \tag{68}$$

ist. (67) folgt so:

$$1+k<1+\nu+1$$
$$=2+\nu$$
$$<2^{\nu+1},$$

da ja

$$\nu \geqq 1$$

ist. (68) ergibt sich durch Addition von

$$1+\nu \leqq 2^\nu$$

und

$$k(\nu-k) \leqq \nu-k$$

folgendermassen:

$$1+\nu+k\nu-k^2 \leqq \nu+2^\nu-k,$$
$$(1+k)(\nu+1-k) \leqq \nu+2^\nu-k,$$
$$1+k \leqq \frac{\nu+2^\nu-k}{\nu+1-k}.$$

Aus (66) folgt nun

$$\frac{1}{1+k} \geqq M_k,$$
$$\frac{\eta+ka}{1+k} = a-(a-\eta)\frac{1}{1+k}$$
$$\leqq a-(a-\eta)M_k,$$

womit (65) verifiziert ist.

Berlin, den 8. März 1909.

EDMUND LANDAU.

SULL'INVARIANTE ρ_0 DI UNA CLASSE DI SUPERFICIE.

Nota di **Miohele de Franohis** (Catania).

Adunanza del 25 aprile 1909.

L'importante relazione tra gl'invarianti ρ_0 e ρ, relativi ad una superficie algebrica, scoperta da PICARD, può scriversi sotto forma invariantiva così:

$$\rho_0 = I - \rho + 4j + 2,$$

ove I rappresenta l'invariante di ZEUTHEN-SEGRE ed j rappresenta l'irregolarità $p_g - p_a$.

Per le superficie Φ i cui punti rappresentano, senza eccezione, le coppie di punti di una curva di genere p a moduli generali si ha

$$\rho = 2 \text{ [1]}, \qquad I = 2p^2 - 5p - 1, \qquad j = p \text{ [2]}$$

e quindi

$$\rho_0 = 2p^2 - p - 1.$$

Mi son permesso di occuparmi di una così immediata deduzione, perchè, in una recente Nota [3], il sig. REMY, citando i lavori miei e del SEVERI, lascia trasparire il dubbio che ivi non si trovino tutti gli elementi per dedurre immediatamente l'invariante ρ_0 delle superficie Φ.

Per le superficie che rappresentano le coppie di punti di due curve algebriche distinte C, Γ, a moduli generali, di generi p, π, si ha, con lo stesso procedimento,

$$\rho_0 = 4p\pi;$$

se le due curve divengono birazionalmente identiche,

$$\rho_0 = 4p^2 - 1.$$

Catania, aprile 1909.

MICHELE DE FRANCHIS.

---

[1]) SEVERI, *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e sopra certe classi di superficie* [Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, serie II, tomo LIV (1904), pp. 1-49], parte II, n° 23; cfr. anche REMY, *Sur la valeur de l'invariant ρ pour une classe de surfaces algébriques* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris), tome CXLVII (2e semestre 1908), pp. 783-785].

[2]) DE FRANCHIS, *Sulle varietà ∞^2 delle coppie di punti di due curve o di una curva algebrica* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XVII (1903), pp. 104-121] e SEVERI, *Sulle superficie che rappresentano le coppie di punti di una curva algebrica* [Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XXXVIII (1902-1903), pp. 185-200].

[3]) *Sur le nombre des intégrales doubles de seconde espèce de certaines surfaces algébriques* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris), tome CXLVII (2e semestre 1908), pp. 1270-1272]. Vedasi anche dello stesso autore la Nota: *Sur les surfaces algébriques qui représentent les couples de points d'une courbe de genre* trois [Ibid., id., pp. 961-963].

LE CURVE LIMITI DI POLIGONALI CHE SI DEFORMANO CON LEGGE ASSEGNATA.

Memoria di **Antonio Sellerio** (Palermo).

Adunanza del 14 febbrajo 1909.

Dopo le ricerche di WEIERSTRASS e di altri matematici moderni [1]), l'esistenza di funzioni continue prive di derivate rimase certamente messa fuori dubbio, ma l'intuizione che associa sempre al concetto di funzione la sua rappresentazione grafica non potè esserne soddisfatta, giacchè quelle ricerche erano essenzialmente analitiche e mal si prestavano a definire geometricamente le curve rappresentative di tali funzioni. Molto opportuna comparve quindi pochi anni sono una memoria del VON KOCH [2]) nella quale una semplicissima costruzione geometrica ripetuta un numero illimitato di volte riesce a definire una interessante curva continua, priva di tangente, il cui arco, comunque si scelgano gli estremi, non ha lunghezza finita. Il VON KOCH suggerì il metodo per giungere ad una rappresentazione analitica di essa, quale fu poi data effettivamente dal Dr. BROGLIO [3]), mentre E. CESÀRO [4]), per via del tutto diversa, scopriva delle formule rappresentative molto più semplici di quanto si potesse prevedere, insieme con eleganti proprietà della curva.

Nel presente lavoro io ho generalizzato la costruzione geometrica fondamentale del VON KOCH, in modo da poter ottenere svariatissimi tipi di curve continue — prive, o no di tangente — dotate delle proprietà più disparate, alcune delle quali mi lusingo possano gettar qualche lume sulla struttura infinitesimale delle curve; nel § 7, *c*) se ne troverà ad es. una di lunghezza finita e pur priva di tangente in infiniti punti. Di tutte queste curve ho dato la rappresentazione analitica generale e poi, avendole distinte in due grandi classi, sull'una di esse ho fermato la mia attenzione. Nell'ultimo paragrafo infine ho accennato come le considerazioni fatte nel piano per le curve si possano esten-

[1]) Vedi: E. PASCAL, *Esercizii critici di calcolo differenziale e integrale* (Milano, 1909), pp. 61-100.

[2]) *Sur une courbe continue sans tangente obtenue par une construction géométrique élémentaire* [Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, Bd. I (1903-1904), pp. 681-702].

[3]) *Studio analitico della curva del sig.* HELGE VON KOCH [Giornale di Matematiche di BATTAGLINI, vol. XLIV (1906), pp. 168-180].

[4]) *Remarques sur la courbe de* VON KOCH [Atti della R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche, serie II, vol. XII (1905), N° 15, pp. 1-12].

dere senza difficoltà nello spazio alle superficie, e per dare un esempio ho segnalato una superficie continua, priva di piano tangente in qualunque punto ed avente area infinita.

§ 1.

Definizioni.

In un piano, di cui è fissata la faccia positiva, presi su un segmento LM due punti distinti N, Q, si costruisca un triangolo NPQ con gli angoli alla base NQ acuti; chiamo Ω *l'operazione* mediante la quale al segmento LM si sostituisce la spezzata $LNPQM$ e dico che è di *verso positivo* o *negativo*, secondo che il triangolo sta alla sinistra, o alla destra dell'osservatore che percorre il segmento dato da L in M; dico inoltre che la spezzata è percorsa nel *verso positivo* quando un punto si muove su di essa da L in M. Sopra ciascuno dei quattro lati LN, NP, PQ, QM eseguo un'operazione Ω ottenendo una spezzata di 4^2 lati; dico per brevità che su LM si son fatte *due* operazioni Ω e così via. Non è escluso che gli angoli alla base di NPQ possano essere nulli, nel qual caso il *culmine* P della spezzata $LNPQM$ cade su LM e l'operazione Ω dicesi *nulla*.

Ciò posto, se eseguendo infinite operazioni Ω sopra il segmento unitario $AB = P_0$, le successive poligonali P_1, P_2, P_3, ..., composte rispettivamente di 4, 4^2, 4^3, ... lati, tendono ad una posizione limite ed i lati rimpiccioliscono indefinitamente, dico per brevità che si ha *una curva* P [5]).

I quattro lati di P_1 vengono designati con τ_i $(i = 0, 1, 2, 3)$, i quattro che si ottengono da τ_i con un'operazione Ω, vengono designati con τ_{ij} $(j = 0, 1, 2, 3)$ e così via, cosicchè in generale ognuno dei 4^r lati di P_r viene indicato apponendo alla lettera τ un gruppo di r indici $i_1 i_2 \ldots i_r$, formanti nel sistema di numerazione quaternale il numero d'ordine del segmento considerato (per chi percorre la spezzata nel senso positivo) diminuito di 1. Ponendo

$$\vartheta_{ab\ldots cd} = \frac{\tau_{ab\ldots cd}}{\tau_{ab\ldots c}}, \tag{1}$$

si ha

$$\tau_{i_1 i_2 \ldots i_r} = \vartheta_{i_1} \vartheta_{i_1 i_2} \ldots \vartheta_{i_1 i_2 \ldots i_r}. \tag{2}$$

Se LM è il lato $\tau_{ab\ldots c}$, indico con $s_{ab\ldots c}$ e con $h_{ab\ldots c}$ la base NQ e l'altezza PP' del triangolo NPQ e con $\varphi_{ab\ldots c1}$, $\varphi_{ab\ldots c2}$ gli angoli in N ed in Q adiacenti rispettivamente a $\tau_{ab\ldots c1}$, $\tau_{ab\ldots c2}$, intendendo che siano positivi o negativi, secondo che Ω è di verso positivo, o negativo.

Siccome le operazioni Ω dipendono essenzialmente dalle ϑ, intendo per definizione

5) La condizione che i lati rimpiccioliscano indefinitamente non toglie che la curva P possa avere dei tratti rettilinei; basta osservare che se tutte le operazioni Ω sono nulle, si ottiene come curva P lo stesso *segmento rettilineo* AB.

che due operazioni $\Omega_{ab\ldots c}$, $\Omega_{a'b'\ldots d'}$ eseguite sopra $\tau_{ab\ldots c}$, $\tau_{a'b'\ldots d'}$, siano eguali quando siano dello stesso verso e si abbia

$$\mathfrak{I}_{ab\ldots c0} = \mathfrak{I}_{a'b'\ldots d'0}, \qquad \mathfrak{I}_{ab\ldots c1} = \mathfrak{I}_{a'b'\ldots d'1}, \qquad \mathfrak{I}_{ab\ldots c2} = \mathfrak{I}_{a'b'\ldots d'2}, \qquad \mathfrak{I}_{ab\ldots c3} = \mathfrak{I}_{a'b'\ldots d'3}.$$

Chiamo *curve P di prima classe* quelle per cui le Ω siano tutte eguali, cioè non dipendano dagli indici e *curve P di seconda classe* le altre, cosicchè una curva P di 1ª classe è [come disse il Cesàro [6]) a proposito della curva di von Koch] simile a sè stessa in tutte le sue parti; per figurarsela in qualche modo bisogna pensare che fra due vertici consecutivi di una spezzata si inserisca tutta quanta la spezzata ridotta in un rapporto conveniente, su ciascuno dei lati ottenuti si ripeta lo stesso e così via indefinitamente.

§ 2.

Continuità.

Occorre anzitutto stabilire una condizione per la quale la successione delle poligonali P_0, P_1, P_2, ... abbia come limite una *curva continua* epperò servendomi quasi delle stesse parole del von Koch [7]) ricordo: Un insieme di punti del piano si chiama *arco di curva* se vi si può far corrispondere un segmento rettilineo in modo che ad ogni punto di esso corrisponda un punto determinato dell'insieme. Inoltre, se μ, μ' sono in esso i corrispondenti di due punti M, M' del segmento, si dice che la curva è *continua* in μ, quando al tendere di M' verso M in un modo qualunque, μ' si avvicina indefinitamente a μ; se tale condizione si verifica per ogni punto dell'arco, esso dicesi un *arco di curva continua*.

Ciò premesso, sia M un punto qualunque di $AB = P_0$ e t la sua distanza da A; la perpendicolare in M ad AB incontrerà P_1 in *un solo* [7]) punto M_1, che può eventualmente coincidere con M; pongo $MM_1 = \overline{f}_1(t)$. Similmente la perpendicolare in M_1 al lato di P_1 su cui si trova M_1, incontra la spezzatina di 4 lati costruita su di esso in un solo punto M_2 eventualmente coincidente con M_1; pongo $M_1M_2 = \overline{f}_2(t)$ e così via. Intesa a questo modo la funzione continua $\overline{f}_i(t)$, supporrò sempre la legge assegnata per le operazioni Ω esser tale che la serie

$$\overline{f}(t) = \sum_{i=1}^{i=\infty} \overline{f}_i(t) \tag{3}$$

risulti *uniformemente convergente* nell'intervallo (0 1), definendo ivi così una funzione uniforme e continua di t.

La spezzata $MM_1M_2M_3$ ... costituita dalle successive perpendicolari stabilisce una

---

[6]) Memoria citata [4]).

[7]) Ciò per il fatto che gli angoli φ_1, φ_2 sono acuti (Cfr. § 1). Se poi si volesse rinunziare a tale restrizione, bisognerebbe complicare alcun poco quel che segue.

corrispondenza biunivoca fra i punti M del segmento AB, i punti delle successive poligonali e i punti dell'*insieme* P limite delle P_i, giacchè partendo da M e percorrendo $M M_1 M_2 M_3 \ldots$ si incontrano in punti determinati le successive P_i e al limite si giunge ad un punto μ di P ben definito a causa della convergenza della serie (3); dunque P è un vero *arco di curva.*

Siano ora in corrispondenza a t, t' due punti M, M' su AB e μ, μ' su P. Dato ε positivo e piccolo ad arbitrio, deve esser possibile determinare un indice ν, in modo che si abbia

$$\sum_{i=\nu+1}^{\infty} \bar{f}_i(t) < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \sum_{i=\nu+1}^{\infty} \bar{f}_i(t') < \frac{\varepsilon}{3},$$

qualunque siano i valori t, t' in $(0\,1)$; allora tenendo fermo μ e facendo muovere μ' con M' in modo che $M_\nu M'_\nu$ sia minore di $\frac{\varepsilon}{3}$, da

$$\mu\mu' \leqq \mu M_\nu + M_\nu M'_\nu + M'_\nu \mu'$$

e dalle due precedenti seguirà

$$\mu\mu' < \varepsilon,$$

cosicchè: *se la serie* (3) *è uniformemente convergente le poligonali* P_i *hanno per limite un arco di curva continua.*

Osservando che i vertici di una poligonale sono anche vertici delle successive, se ne deduce che in una curva P *possono* esservi:

a) *punti di prima specie,* cioè vertici di poligonali,

b) *punti di seconda specie,* cioè punti limiti che stanno su qualche spezzata, senza essere vertici,

c) *punti di terza specie,* cioè punti limiti che non stanno su nessuna spezzata d'indice finito.

Anche i vertici sono punti limiti. Per i punti delle prime due specie la serie (3) si arresta, giacchè da un certo ν in poi si ha per essi

$$M_i \equiv M_{i+1} \equiv M_{i+2} \equiv \cdots \equiv \mu.$$

Per convincersi di quanta libertà vi sia nella scelta delle Ω affinchè la (3) risulti convergente basta osservare che dicendo per un momento K_i la più grande delle $h_{ab\ldots c}$ con lo stesso numero i di indici, si ha

$$\bar{f}(t) \leqq \sum_{i=0}^{\infty} K_i.$$

§ 3.

Rettificabilità.

Secondo le notazioni adottate si ha:

$$P_r = \sum_{(0)}^{(3)} \tau_{i_1 i_2 \ldots i_r} = \sum_{(0)}^{(3)} \mathfrak{z}_{i_1} \mathfrak{z}_{i_1 i_2} \cdots \mathfrak{z}_{i_1 i_2 \ldots i_r}, \tag{4}$$

intendendo di far variare nelle sommatorie gli indici $i_1, i_2, \ldots, i_r$ da 0 a 3 indipendentemente l'uno dall'altro. Il limite per $r = \infty$ di P_r, dà la lunghezza finita, o infinita, di P, come risulta sia dalle definizioni, sia dall'osservare che la poligonale P_r è iscritta nella curva comunque sia grande r; chiamando *rettificabili* le curve P di lunghezza finita, si ha il

TEOREMA I. — *Le curve di prima classe non hanno nessun arco rettificabile per quanto vicino siano gli estremi; lo stesso dicasi delle curve per cui le* Ω *differiscono solo nel verso.*

Supposto infatti che la lunghezza di P sia esprimibile mediante un numero l, e indicando con (LM) l'arco di P avente per corda LM e con A, C, D, E, B i successivi vertici di P_1, per la similitudine fra una curva P *di prima classe* e le sue parti, si avrebbe:

$$l = (AB) = (AC) + (CD) + (DE) + (EB) = l(\mathfrak{z}_0 + \mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2 + \mathfrak{z}_3),$$

il che, con $l \geqq AB = 1$, non può avvenire a meno che il culmine D non cadesse su AB, nel qual caso si vede subito che P coinciderebbe col segmento rettilineo AB privo d'interesse (e perciò da ritenersi escluso nell'enunciato del teorema). Per la similitudine sopra menzionata se ne deduce facilmente che non ha lunghezza finita un arco di *curva di 1ª classe* avente per estremi due vertici qualunque e a fortiori un arco di cui un solo, o tutti e due gli estremi siano punti limiti.

Agli stessi risultati si perviene osservando che per le *curve di 1ª classe e per quelle altre contemplate nell'enunciato* sussiste la formola ricorrente

$$P_r = (\mathfrak{z}_0 + \mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2 + \mathfrak{z}_3) P_{r-1}, \tag{5}$$

quindi per tali curve la (4) si riduce a

$$P_r = (\mathfrak{z}_0 + \mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2 + \mathfrak{z}_3)^r. \tag{6}$$

È utile far dipendere la rettificabilità di una curva P dalla convergenza di una serie anzicchè da quella della successione $P_1, P_2, P_3, \ldots$; posto perciò

$$\Delta_i = P_i - P_{i-1} = \sum_{(0)}^{(3)} \mathfrak{z}_{i_1} \mathfrak{z}_{i_1 i_2} \cdots \mathfrak{z}_{i_1 i_2 \ldots i_{r-1}} (\mathfrak{z}_{i_1 \ldots i_{r-1} 0} + \cdots + \mathfrak{z}_{i_1 \ldots i_{r-1} 3} - 1) \tag{7}$$

si ha

$$P_r = P_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_r, \tag{8}$$

sicchè *condizione necessaria e sufficiente per la rettificabilità di P è la convergenza della serie*

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \cdots \tag{9}$$

a termini positivi o nulli.

§ 4.

La serie H.

Il termine generale $\Delta_r = P_r - P_{r-1}$ della (9) si compone delle 4^{r-1} differenze positive, o nulle $(\tau_{i_1 \ldots i_{r-1} 1} + \tau_{i_1 \ldots i_{r-1} 2}) - s_{i_1 \ldots i_{r-1}}$ fra i due lati e la base di ciascun trian-

golo relativo all'operazione $\Omega_{i_1 \dots i_{r-1}}$, quindi essendo

$$\tau_{i_1 \dots i_{r-1} 1} + \tau_{i_1 \dots i_{r-1} 2} - s_{i_1 \dots i_{r-1}} = 2 \left(\tau_{i_1 \dots i_{r-1} 1} \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi_{i_1 \dots i_{r-1} 1}}{2} + \tau_{i_1 \dots i_{r-1} 2} \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi_{i_1 \dots i_{r-1} 2}}{2} \right)$$

la serie Δ si può pensare formata da termini della forma

$$\delta = 2 \tau \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi}{2}$$

disposti in ordine qualunque per es. non crescente.

Si consideri d'altra parte la serie

$$H = h + (h_0 + h_1 + h_2 + h_3) + (h_{00} + h_{01} + \cdots + h_{33}) + \cdots \tag{10}$$

la quale, essendo [8])

$$h_{i_1 \dots i_{r-1}} = \tau_{i_1 \dots i_{r-1} 1} \operatorname{sen} \overline{\varphi}_{i_1 \dots i_{r-1} 1} = \tau_{i_1 \dots i_{r-1} 2} \operatorname{sen} \overline{\varphi}_{i_1 \dots i_{r-1} 2}$$

si può pensare formata di termini

$$h = \tfrac{1}{2} \tau \operatorname{sen} \overline{\varphi}$$

disposti parallelamente ai δ. Si ha

$$\frac{\delta}{h} = 2. \operatorname{tang} \frac{\varphi}{2},$$

da cui, osservando che abbiamo $\operatorname{tang} \frac{\varphi}{2} < 1$, si deduce

$$\Delta < 2 H.$$

Se poi gli angoli φ si mantengono eguali o superiori ad un certo angolo $\varepsilon > 0$, segue inoltre

$$\Delta \geqq 2 H. \operatorname{tang} \frac{\varepsilon}{2},$$

onde il

Teorema II. — *La convergenza della serie H è condizione sufficiente per la rettificabilità di P; essa è anche necessaria, se gli angoli φ in valore assoluto non decrescono indefinitamente.*

In quest'ultimo caso, detta l la lunghezza di P si ha la limitazione

$$\operatorname{tang} \frac{\varepsilon}{2} \leqq \frac{l - 1}{2 H} < 1 \tag{11}$$

come segue da (8), (9) ricordando che è $P_0 = 1$.

Così riconosciamo ancora una volta l'irrettificabilità delle curve di cui nell'enunciato del 1° Teorema, giacchè avendosi per esse

$$\sum_{(0)}^{(3)} h_{i_1 i_2 \dots i_r} = h(\vartheta_0 + \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3)^r,$$

la serie (10) risulta divergente, mentre gli angoli $\overline{\varphi}$ han tutti lo stesso valore > 0, se P non è un segmento rettilineo.

---

[8]) Con $\overline{\varphi}_{a \dots b}$ denoto il valore assoluto di $\varphi_{a \dots b}$.

Se invece consideriamo la serie

$$H^{(2)} = h^2 + (h_0^2 + h_1^2 + h_2^2 + h_3^2) + (h_{00}^2 + h_{01}^2 + \cdots + h_{33}^2) + \cdots$$

formata da termini

$$h^{(2)} = \frac{1}{2}\tau^2 \operatorname{sen}^2 \varphi = 2\,h^2$$

abbiamo

$$\frac{h^{(2)}}{\delta} = \tau \cos^2 \frac{\varphi}{2}\,;$$

sicchè, supposta Δ convergente, ne deduciamo *la convergenza di $H^{(2)}$, la quale è pertanto una condizione necessaria alla rettificabilità di P.*

Giovano ancora le seguenti considerazioni:

Se gli angoli $\overline{\varphi}$ non decrescono indefinitamente, da

$$\delta \geqq 2\tau \operatorname{sen}^2 \frac{\varepsilon}{2}$$

segue

$$\Delta \geqq 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\varepsilon}{2}[(\tau_1 + \tau_2) + (\tau_{01} + \tau_{02} + \cdots + \tau_{31} + \tau_{32}) + \cdots].$$

In parole: *Nell'ipotesi attuale, quando la curva è rettificabile, è convergente la serie formata dalla somma di tutte le $\tau_{a\ldots b}$ con l'ultimo indice eguale ad* 1, 2. Se ne deduce fra l'altro che la somma

$$\sum_{(0)}^{(3)} \tau_{i_1\ldots i_{r-1}1} + \sum_{(0)}^{(3)} \tau_{i_1\ldots i_{r-1}2}$$

nelle stesse ipotesi è infinitesima rispetto a P_r al crescere di r, cosicchè si vede subito che *le curve equilatere* [9]) *non sono rettificabili se gli angoli $\overline{\varphi}$ non tendono a zero* [10]).

Dalla diseguaglianza precedente discende a fortiori, posto

$$S = s + (s_0 + s_1 + s_2 + s_3) + (s_{00} + s_{01} + \cdots + s_{33}) + \cdots \tag{12}$$

$$\Delta > 2\,S \operatorname{sen}^2 \frac{\varepsilon}{2}\,;$$

onde: *la convergenza della serie* (12) *è anch'essa necessaria alla rettificabilità di una curva P per cui esista l'ε di cui sopra.*

Abbandonata l'ipotesi precedente, nel caso notevole in cui *tutte le $h_{a\ldots b}$ con lo stesso numero di indici siano eguali*, la (10) diviene

$$H = h + 4\,h_0 + 4^2\,h_{00} + \cdots,$$

sicchè basta che il rapporto fra una $h_{00\ldots0}$ e la precedente finisca coll'essere $< \frac{1}{4}$ perchè P sia continua [11]) e rettificabile.

---

9) Intendo: *le curve limiti di spezzate equilatere.*

10) Si poteva dedurre dal Teorema I pensando per es. ad una P di 1ª classe con $\varphi_1 = \varphi_2 = \varepsilon$.

11) In generale la convergenza della (10) è condizione più che sufficiente per la convergenza della (3).

§ 5.

Area.

Indicando con $(P_r P_{r+1})$ l'area compresa fra P_r e la spezzata successiva, cioè la somma delle aree (positive) dei triangoli relativi alle $\Omega_{i_1 \ldots i_r}$, pongo

$$(P_0 P_r) = (P_0 P_1) + (P_1 P_2) + \cdots + (P_{r-1} P_r),$$

$$(P_0 P) = \lim_{r=\infty} (P_0 P_r) = (P_0 P_1) + (P_1 P_2) + (P_2 P_3) + \cdots \tag{13}$$

e chiamo la prima espressione *area compresa fra* P_0 *e* P_r e la seconda *area compresa fra* P_0 *e* P, o semplicemente *area della curva* P. Non è possibile nel presente studio servirsi delle definizioni che i trattati di calcolo dànno per l'*area* perchè soggette a troppe restrizioni; nè d'altra parte conviene adottare le usuali convenzioni della geometria analitica e trattare le figure $P_0 P_r$, $P_0\, P$ alla stregua dei poligoni intrecciati [12]) perchè in primo luogo mancherebbe in generale [13]) la proprietà

$$(P_0 P_{r+1}) = (P_0 P_r) + (P_r P_{r+1})$$

e quindi $(P_0 P)$ non sarebbe il limite di $(P_0 P_r)$, in secondo luogo la distinzione di aree positive e negative potrebbe far sì che un'area espressa da termini non tutti dello stesso segno risultasse molto piccola in valore assoluto, quand'anche la curva invadesse una considerevole regione del piano. Invece: *la convergenza della serie* (13) *è condizione sufficiente affinchè* P *sia tutta compresa in una regione finita del piano; essa è anche necessaria se le operazioni* Ω *son tutte dello stesso verso e* P *ha un numero finito di nodi* [14]).

Si osservi ora che se immaginiamo di ritagliare da un foglio un triangolo eguale ad $s\tau_1\tau_2$ e di applicarlo contro la base s ad un filo rigido $AB = 1$ come prescrive l'operazione Ω, poi di applicare similmente ai lati τ_0, τ_1, τ_2, τ_3 i triangoli relativi alle operazioni Ω_0, Ω_1, Ω_2, Ω_3 e così via, avendo cura volta per volta di far rotare alcun poco se occorre i triangoli intorno alle loro basi in modo che uno si sovrapponga ad un altro, otteniamo una curva (storta) P immagine materiale della curva piana P e la serie (13) esprime appunto quanta parte di foglio occorre per la sua costruzione. In tal modo le definizioni date sopra per le aree $(P_0 P_r)$, $(P_0 P)$ vengono a trovarsi d'accordo con l'intuizione, onde mi pare opportuno chiamare *quadrabile* una curva P *quando è convergente la* (13).

TEOREMA III. — *Se una curva è rettificabile, è anche quadrabile.*

Poichè la curva P è contenuta per intero nella ellisse avente per fuochi A, B e

[12]) Le aree in tal caso verrebbero in valore assoluto minori (o al più eguali) di quelle date dalle superiori espressioni di $(P_0 P_r)$, $(P_0 P)$.

[13]) Basta per es. supporre che $\tau_{111}\, \tau_{112}$ siano tagliati dal segmento AB.

[14]) La sovrapposizione completa o parziale di due triangoli avviene in tal caso un numero finito di volte; per le curve di prima classe si noti che, o non hanno punti doppi, o ne hanno infiniti.

per asse maggiore la lunghezza l di P, la proposizione enunciata è ovvia nel caso in cui la curva sia priva di nodi; nel caso contrario per ognuno di essi si descriva un circoletto avente per centro per es. il punto nodale e per raggio la sua massima distanza dagli altri punti del cappio. Poichè la lunghezza di ogni cappio supera il doppio del raggio del relativo circolo, dall'ipotesi che P sia rettificabile si trae la convergenza della serie che ha per termini i raggi e di quella che ha per termini le aree dei circoli, ognuna delle quali è maggiore dell'area racchiusa nel cappio, onde il teorema, *la cui dimostrazione non è subordinata alla legge con cui fu costruita la curva.* La (13), scritta diversamente

$$(14)\quad (P_0P) = \tfrac{1}{2}hs + \tfrac{1}{2}(h_0 s_0 + h_1 s_1 + h_2 s_2 + h_3 s_3) + \tfrac{1}{2}(h_{00} s_{00} + \cdots + h_{33} s_{33}) + \cdots$$

mostra che *la convergenza della H è condizione sufficiente per la quadrabilità di P* mentre *la convergenza della $H^{(2)}$ è condizione necessaria,* giacchè i termini della (14) sono della forma

$$p = \tfrac{1}{2}\tau^2 \operatorname{sen}\varphi . \cos\varphi.$$

Se gli angoli (acuti) $\overline{\varphi}$ non decrescono indefinitamente dettone η il massimo, si ha la limitazione

$$\operatorname{tang}\varepsilon \leqq \frac{H^{(2)}}{(P_0P)} \leqq \operatorname{tang}\eta.$$

Teorema IV. — *Le curve di prima classe e quelle altre per cui le* Ω *differiscono solo nel verso sono quadrabili quando è* [15])

$$(15)\qquad \mathfrak{z}_0^2 + \mathfrak{z}_1^2 + \mathfrak{z}_2^2 + \mathfrak{z}_3^2 < 1.$$

Infatti per esse si ha

$$(P_r P_{r+1}) = (\mathfrak{z}_0^2 + \mathfrak{z}_1^2 + \mathfrak{z}_2^2 + \mathfrak{z}_3^2)(P_{r-1}P_r) = \tfrac{1}{2}hs(\mathfrak{z}_0^2 + \mathfrak{z}_1^2 + \mathfrak{z}_2^2 + \mathfrak{z}_3^2)^r$$

e la (14) a parte il fattore $\frac{1}{2}hs$ si riduce alla geometrica

$$1 + (\mathfrak{z}_0^2 + \mathfrak{z}_1^2 + \mathfrak{z}_2^2 + \mathfrak{z}_3^2) + (\mathfrak{z}_0^2 + \mathfrak{z}_1^2 + \mathfrak{z}_2^2 + \mathfrak{z}_3^2)^2 + \cdots.$$

Fra le curve di 1ª *classe prive di punti doppi* sono notevoli le *equilatere* [16]) per le quali *l'area* definita sopra coincide con *l'area* nel senso ordinario, esse sono sempre quadrabili, giacchè posto

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_0 = \mathfrak{z}_1 = \mathfrak{z}_2 = \mathfrak{z}_3 < \tfrac{1}{2}$$

si ha

$$(16)\quad s = 1 - 2\mathfrak{z}, \qquad h = \frac{\sqrt{4\mathfrak{z} - 1}}{2}, \qquad (P_0P) = \frac{1}{4}\frac{\sqrt{4\mathfrak{z} - 1}}{2\mathfrak{z} + 1} \quad \left(\text{con } \mathfrak{z} < \frac{1}{2}\right).$$

Il quadrato di (P_0P) ha per derivata $\dfrac{1 - \mathfrak{z}}{2(1 + 2\mathfrak{z})^3}$, espressione positiva per $\mathfrak{z} < 1$, quindi: *l'area (P_0P) delle equilatere di 1ª classe tende crescendo da un minimo $= 0$ ad un limite superiore $= \frac{1}{8}$ (che non raggiunge), quando $\mathfrak{z}$ cresce da $\frac{1}{4}$ ad $\frac{1}{2}$.*

---

[15]) Nel § 9 sarà dimostrata l'esistenza di curve continue di 1ª classe che non soddisfano alla (15).

[16]) V. §§ 10, 11.

§ 6.

Tangente.

Siano μ, μ' due punti di P; M, M' i loro corrispondenti (v. § 2) in AB; e t, t' i rispettivi *parametri*. Si dice che μ precede o segue μ' secondo che M precede o segue M', cioè secondo che è $t \lesseqgtr t'$. Secondo tale convenzione si vede facilmente che *i vertici di una poligonale si succedono nel medesimo ordine secondo cui si incontrano percorrendo la poligonale nel senso positivo.* Se L, N, P, Q, M sono, come nel § 1, i vertici successivi della spezzatina costruita su $LM = \tau_{ab\ldots c}$, chiamo per brevità $\psi_{ab\ldots c1}$, $\psi_{ab\ldots c2}$ gli angoli MLP, LMP intendendo che siano positivi, o negativi, secondo il verso di Ω e indico con $\overline{\psi}_{ab\ldots c1}$, $\overline{\psi}_{ab\ldots c2}$ i rispettivi valori assoluti.

Ciò posto, sia P una curva con le Ω eguali a meno del segno.

Se μ è il primo estremo di $\tau_{a\ldots c}$, per l'angolo $\psi_{a\ldots c1}$ possono darsi tre casi: 1° sia $\psi_{a\ldots c1} = 0$, si avrà anche $\varphi_{a\ldots c1} = 0$, quindi per l'eguaglianza delle Ω, P non è altro che il segmento rettilineo AB; 2° sia $\psi_{a\ldots c1} = \varphi_{a\ldots c1} \neq 0$ [17]), allora la secante che va da μ ai *culmini* delle spezzate costruite sui lati $\tau_{a\ldots c}$, $\tau_{a\ldots c1}$, $\tau_{a\ldots c11}$, ... che sono punti di un intorno destro di μ non tende a nessuna posizione limite giacchè essa forma con $\tau_{a\ldots c}$ successivamente gli angoli $\varphi_{a\ldots c1} = \varphi_1$, $\varphi_1 \pm \overline{\varphi}_1$, $\varphi_1 \pm \overline{\varphi}_1 \pm \overline{\varphi}_1$, ...; sia infine $\psi_{a\ldots c1} \neq \varphi_{a\ldots c1}$, allora in ogni intorno destro di μ avremo infiniti punti di P su $\tau_{a\ldots c}$ ed infiniti altri sul segmento che congiunge μ al culmine della spezzata costruita su $\tau_{a\ldots c}$ o al suo simmetrico rispetto a tale lato, cosicchè facendo tendere un punto mobile μ' di P a μ dalla destra, la secante $\mu\mu'$ ripassa infinite volte per le medesime posizioni distinte senza tendere ad una posizione limite.

Se μ è un *punto di seconda specie* situato sopra $\tau_{a\ldots b}$, esso cadrà in $\tau_{a\ldots b0}$ ovvero in $\tau_{a\ldots b3}$, supposto per es. che sia nel secondo, starà poi in $\tau_{a\ldots b30}$ ovvero in $\tau_{a\ldots b33}$, ecc. Ora si osservi che μ non essendo un vertice non può trovarsi in tutti i segmenti $\tau_{a\ldots b\ldots c3}$, $\tau_{a\ldots b\ldots c33}$, $\tau_{a\ldots b\ldots c333}$, ... ed accadrà perciò infinite volte che esso si trovi su lati $\tau_{a\ldots b\ldots d0}$ con l'ultimo indice eguale a zero. In ogni intorno destro di μ vi saranno dunque infiniti punti N su $\tau_{a\ldots b}$ secondi estremi di lati $\tau_{a\ldots b\ldots d0}$ e infiniti culmini P, e poichè si ha la limitazione

$$\overline{\psi}_1 < N\mu P < \overline{\varphi}_1,$$

dove le costanti $\overline{\psi}_1 \overline{\varphi}_1$ son diverse da 0 se la curva è diversa dal segmento rettilineo AB, si conclude che facendo tendere μ' sulla curva a μ dalla destra, la secante $\mu\mu'$ non tende a nessuna posizione limite.

Ciò che si è detto a destra dei punti μ di 1ª o 2ª specie vale anche a sinistra.

Sia infine μ un *punto di 3ª specie*. Ricordo il teorema di VON KOCH [18]): *Se una*

---

[17]) Ciò avviene quando è $\tau_{a\ldots c0} = 0$.

[18]) Memoria citata [2]).

curva (qualunque) ha in un punto μ la tangente, questa retta sarà anche la posizione limite di una secante che congiunga due punti della curva tendenti a μ da bande opposte. Se dunque μ è un punto di P definito mediante una successione di infinite perpendicolari MM_1, M_1M_2, M_2M_3, ... incontranti nei punti M_1, M_2, M_3, ... i lati S_1T_1, S_2T_2, S_3T_3, ... delle successive poligonali P_1, P_2, P_3, ..., i punti S_1, S_2, S_3, ... si avvicinano indefinitamente a μ dalla sinistra e T_1, T_2, T_3, ... dalla destra. Ora l'angolo formato da S_iT_i, $S_{i+1}T_{i+1}$ non può esser nullo da un certo i in poi giacchè altrimente M_{i+1}, M_{i+2}, ... coinciderebbero tutti con M_i, e μ sarebbe un punto (di 1ª o di 2ª specie) situato su P_i. Accadrà dunque infinite volte che l'angolo fra due secanti consecutive assuma almeno uno dei valori costanti $\pm\bar{\varphi}_1$, $\pm\bar{\varphi}_2$, e la secante mobile non tenda a nessun limite. Tenendo presente il teorema testè citato, risulta il

TEOREMA V. — *Una curva con le Ω eguali a meno del verso non ha nè tangente destra, nè sinistra, nei punti di prima o di seconda specie, e non ha tangente ordinaria nei punti di terza specie.*

Resta s'intende escluso il caso in cui P sia un segmento rettilineo. Se poi P è una curva con le Ω differenti fra loro, ben poco si può dire in generale, ma già dalla discussione superiore risulta evidente il

TEOREMA VI. — *Condizione necessaria perchè una curva P abbia tangente destra e sinistra nei punti di prima e di seconda specie, e tangente ordinaria nei punti di terza specie, è che gli angoli φ tendano a zero.*

Si vedrà poi che tale condizione è ben lungi dall'essere sufficiente.

Si possono fare le seguenti osservazioni.

OSSERVAZIONE I. — Se μ è di 1ª o di 2ª specie ed $\bar{F}_r(t) = \sum_r^\infty \bar{f}_i(t)$ ivi si annulla ed ha un punto di invariabilità [19]), allora P avrà un segmento rettilineo di cui μ sarà l'estremo sinistro o destro ed ivi si avrà pertanto la tangente destra o sinistra. Se per es. è $\sum_{s=0}^{3} \vartheta_{i_1 \dots i_r s} = 1$, $\sum_{s=0}^{3} \vartheta_{i_1 \dots i_r 0 s} = 1$, $\sum_{s=0}^{3} \vartheta_{i_1 \dots i_r 00 s} = 1$, ... si ha la tangente destra nel 1° estremo di $\tau_{i_1 \dots i_r}$.

OSSERVAZIONE II. — Se μ è un punto di 1ª specie corrispondente al valore t_0 del parametro t, supponiamo che si possano determinare un r ed un $t_1 > t_0$ tale che in tutto l'intervallo (t_0, t_1) la $\bar{F}_r(t)$ si annulli solo in t_0; ciò equivale a supporre che se μ è il primo estremo di un lato $\tau_{a \dots b}$, si possa trovare un sistema $c \dots d$ di indici 0, 1 tale che sia

$$\psi_{a \dots bc \dots d1} = \varphi_{a \dots bc \dots d1}, \qquad \psi_{a \dots d11} = \varphi_{a \dots d11}, \qquad \psi_{a \dots d111} = \varphi_{a \dots d111}, \dots$$

cioè

$$\tau_{a \dots d0} = \tau_{a \dots d10} = \tau_{a \dots d110} = \dots = 0.$$

Se μ_0, μ_1, μ_2, ... sono i secondi estremi dei lati $\tau_{a \dots d}$, $\tau_{a \dots d1}$, $\tau_{a \dots d11}$, ..., la secante

---

[19]) DINI, *Fondamenti per la teorica di variabili reali* (Pisa, 1878), pag. 54.

$\mu\mu_i$ forma per $i = \infty$ l'angolo

(17) $$\Phi_{a\dots d,1} = \varphi_{a\dots d1} + \varphi_{a\dots d11} + \varphi_{a\dots d111} + \cdots$$

con $\mu\mu_0$, quindi *si avrà, o no, in* μ *tangente destra secondo che la serie* (17) *è convergente, o no.*

Di qui si vede che la tendenza a zero degli angoli φ non è sufficiente per l'esistenza della tangente.

Similmente, se si riesce a determinare un s ed un $t'_1 < t_0$ tale che la $\overline{F}_s(t)$ in tutto (t'_1, t_0) si annulli solo in t_0, si potrà trovare un sistema di indici tale che sia

$$\psi_{a\dots b\dots e2} = \varphi_{a\dots b\dots e2}, \qquad \psi_{a\dots e22} = \varphi_{a\dots e22}, \cdots$$

cioè

$$\tau_{a\dots e3} = \tau_{a\dots e33} = \cdots = 0$$

e l'esistenza della tangente sinistra in μ dipende dalla convergenza della serie

(18) $$\Phi_{a\dots e,2} = \varphi_{a\dots e2} + \varphi_{a\dots e22} + \varphi_{a\dots e222} + \cdots.$$

Detto μ'_0 il primo estremo di $\tau_{a\dots b\dots e}$ e supposte esistenti in μ le tangenti sinistra e destra $\mu T'$, μT, il loro angolo è

$$\text{ang}\, T'\mu\mu'_0 + \text{ang}\, \mu'_0\mu\mu_0 + \text{ang}\, \mu_0\mu T + 2K\pi$$

e quando esse coincidono si ha

$$\Phi_{a\dots e,2} + \text{ang}\, \mu'_0\mu\mu_0 + \Phi_{a\dots d,1} \equiv \pi \qquad (\text{mod. } 2\pi)$$

ovvero

$$\Phi_{a\dots e,2} + \text{ang}\, \mu'_0\mu\mu_0 + \Phi_{a\dots d,1} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 2\pi),$$

secondo che μ è un *punto ordinario* o una *cuspide.* Possiamo dunque dire che *si ha in* μ *la tangente ordinaria quando è*

(19) $$\Phi_{a\dots e,2} + \text{ang}\, \mu'_0\mu\mu_0 + \Phi_{a\dots d,1} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } \pi)$$

dove l'ang $\mu'_0\mu\mu_0$ si esprime facilmente mediante le φ con un numero di indici inferiore a quello di $\varphi_{a\dots d1}$ o $\varphi_{a\dots e2}$.

Osservazione III. — Se μ è un punto di prima specie e non si riesce a determinare il t_1 di cui all'osservazione precedente, esisterà un segmento $\tau_{a\dots b\dots d}$ avente in μ il primo estremo, tale che su esso esistano infiniti punti della curva in ogni intorno di μ piccolo a piacere; se dunque in μ vi è la tangente destra, essa deve coincidere con la direzione di $\tau_{a\dots d}$. Ora $\Phi_{a\dots d,1}$ esprime l'angolo che la posizione limite dei segmenti $\tau_{a\dots d1}$, $\tau_{a\dots d11}$, $\tau_{a\dots d111}$ forma con $\tau_{a\dots d}$; $\Phi_{a\dots d0,1}$ l'angolo che la posizione limite di $\tau_{a\dots d0111\dots}$ forma con $\tau_{a\dots d}$; così per $\Phi_{a\dots d00,1}$, $\Phi_{a\dots d000,1}$, ... Facendo crescere indefinitamente il numero degli zeri, le posizioni limiti di $\tau_{a\dots d111\dots}$, $\tau_{a\dots d0111\dots}$, $\tau_{a\dots d00111\dots}$, ... debbono avvicinarsi indefinitamente a $\tau_{a\dots d}$ giusta quanto si è detto sopra *allorchè esiste la tangente destra in* μ *e gli angoli*

$$\Phi_{a\dots b\dots d,1}, \qquad \Phi_{a\dots d0,1}, \qquad \Phi_{a\dots d00,1}, \cdots$$

sono dunque infinitesimi al crescere del numero degli zeri a meno di multipli di π.

Analogamente, se non si riesce a trovare il t'_1 di cui all'osservazione precedente,

per l'esistenza della tangente sinistra in μ *è necessario che gli angoli*

$$\Phi_{a\ldots b\ldots c,2}, \quad \Phi_{a\ldots c3,2}, \quad \Phi_{a\ldots c33,2}, \ldots$$

siano infinitesimi al crescere del numero dei 3 a meno di multipli di π.

Osservazione IV. — Se μ è un punto di seconda specie non esisteranno i valori t_1, t'_1 di cui all'Osservazione II, quindi se μ è su $\tau_{a\ldots b}$ *è necessario affinchè vi sia la tangente destra che le serie* $\Phi_{a\ldots bc\ldots 1}$ *relative ai lati* $\tau_{a\ldots bc\ldots}$ *che hanno* μ *come punto limite dei loro primi estremi tendano a zero.* Analogamente per la tangente sinistra.

Osservazione V. — Se μ è un punto di seconda specie, situato su $\tau_{a\ldots b}$ e in *tutti* i punti di prima specie che stanno su questo lato e formano un intorno destro di μ comunque piccolo esiste la tangente sinistra, *esisterà in* μ *la tangente destra* e sì le une che l'altra coincideranno con la direzione di $\tau_{a\ldots b}$ come si vede facilmente. Analogamente a sinistra, sicchè *se in tutti i punti di prima specie che stanno su un lato* $\tau_{a\ldots b}$ *esiste la tangente unica, lo stesso avverrà nei punti di seconda specie che stanno sullo stesso lato.*

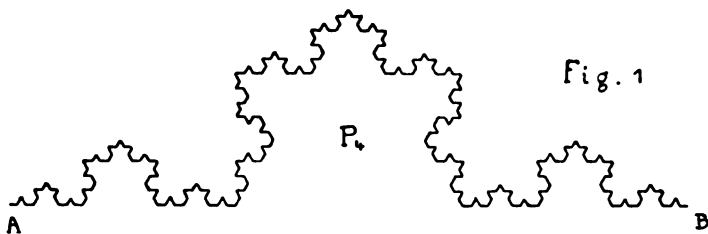
Si noti infine che la condizione $\lim_{r=\infty} \varphi_{i_1\ldots i_r} = 0$ di cui al Teorema V dice che $h_{i_1\ldots i_r}$ deve essere infinitesima almeno di 1° ordine rispetto a $\tau_{i_1\ldots i_r 1}$, $\tau_{i_1\ldots i_r 2}$.

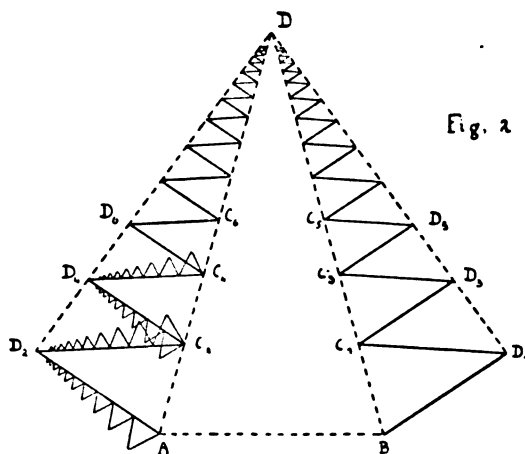
§ 7.

Esempi di curve *P*.

a) *Il segmento rettilineo AB.*

b) *La curva di* von Koch. — È l'equilatera di prima classe definita da $\vartheta = \frac{1}{3}$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$ ed è certamente continua, perchè si ha $\bar{f}(t) < h\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Come tutte le curve del medesimo tipo, essa è infinita fra due punti qualunque (Teo-

rema I), manca di tangente (Teorema V), e racchiude un'area $(P_0 P)$ finita (Corollario del Teorema IV) eguale precisamente a $\frac{\sqrt{3}}{20}$.

Facendola rotare nello spazio intorno all'asse *AB* si ottiene una superficie continua, per cui si possono subito definire l'area e il volume; quella sarà infinita e questo sarà finito, inoltre la superficie non avrà piano tangente in nessun punto perchè la sezione meridiana è priva di tangente.

c) Può sorgere il dubbio che una curva rettificabile debba avere di necessità le tangenti destra e sinistra in ogni punto. Il seguente esempio valga a convincere del contrario. Sul segmento unitario AB preso come base, si costruisca un triangolo isoscele

ADB; scelto un numero positivo $q < 1$ e posto $a_1 = AD + DB$, si prendano sui lati i punti $C_2, C_4, C_6, \ldots, C_1, C_3, C_5, \ldots$ in modo che si abbia

$$\begin{cases} \dfrac{AC_2}{1-q} = \dfrac{BC_1}{1-q} = \dfrac{a_1}{2} \\ \div AC_2 : C_2C_4 : C_4C_6 : \cdots, \qquad \div BC_1 : C_1C_3 : C_3C_5 : \cdots \end{cases}$$

essendo q la ragione delle due progressioni. Sui lati $AC_2, C_2C_4, \ldots, BC_1, C_1C_3, \ldots$ si costruiscano i triangoli isosceli $AD_2C_2, C_2D_4C_4, \ldots, BD_1C_1, C_1D_3C_3, \ldots$ simili fra loro e si consideri la *curva continua* $P = AD_2C_2D_4C_4 \ldots D \ldots C_3D_3C_1D_1B$ limite delle poligonali

$$P_0 = AB$$
$$P_1 = ADB$$
$$P_2 = AD_2C_2DC_1D_1B$$
$$P_3 = AD_2C_2D_4C_4DC_3D_3C_1D_1B$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Essa sarà evidentemente quadrabile, priva di tangente destra e sinistra in D e tuttavia rettificabile, giacchè, posto $\dfrac{AD_2 + D_2C_2}{AC_2} = a_2$, la sua lunghezza è

$$l_2 = a_1 a_2 .$$

Se poi si vuole che la curva manchi di tangente destra e sinistra in infiniti punti, invece di sceglier *nulle* le operazioni Ω eseguite sui lati

$$\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{131}, \tau_{132}, \tau_{1331}, \tau_{1332}, \ldots, \tau_{22}, \tau_{21}, \tau_{202}, \tau_{201}, \tau_{2002}, \tau_{2001}, \ldots,$$

cioè

$$AD_2, D_2C_2, C_2D_4, D_4C_4, \ldots, BD_1, D_1C_1, C_1D_3, D_3C_3, \ldots$$

si scelgano in modo che su ciascuno di tali lati venga costruita una serie di triangoli simili come si era fatto su AD, DB, e si otterrà una curva continua, rettificabile giacchè detto a_3 il rapporto comune fra i lati e la base dei nuovi triangoletti isosceli, si ha per la lunghezza della curva

$$l_3 = a_1 a_2 a_3;$$

essa sarà priva di tangenti destra e sinistra nei punti $D_2, D_4, D_6, \ldots, D, D_1, D_3, \ldots$ i quali costituiscono un insieme *chiuso* [20]) avente per punto limite unico D.

Così continuando si vede che si può costruire una *curva continua, priva di tangenti destra e sinistra nei punti di un gruppo chiuso di prima specie e di ordine* ν^{mo}, *il cui* ν^{mo} *gruppo derivato è il punto D, ed avente una lunghezza finita*

$$l_\nu = a_1 a_2 \ldots a_\nu$$

ed un'area $(P_0 P)$ *pure finita* (Teorema III).

Vi è di più: posto

$$a_i = 1 + b_i \qquad (b_i > 0),$$

per un noto teorema di Weierstrass basta che sia convergente la serie

$$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots$$

perchè sia convergente anche il prodotto infinito

$$l = a_1 a_2 a_3 \ldots$$

sicchè noi potremo ripetere illimitatamente il processo superiore ed ottenere *una curva P continua rettificabile e di lunghezza precisamente* $= l$, *quadrabile e priva di tangenti destra e sinistra in tutti i punti di un gruppo di seconda specie* ($\nu = \infty$).

Quanto alla continuità occorrono a dir vero le seguenti considerazioni:

Detta per un momento h_1 l'altezza del triangolo ABD; h_2 l'altezza del più grande AD_2C_2 dei triangoli che si formano sopra i lati di ABD; h_3 l'altezza del più grande dei triangoli che si formano sui lati di AD_2C_2 e così via, si riconosce facilmente che si ha

$$\bar{f}(t) < h_1 + h_2 + h_3 + \cdots,$$

$$h_1 < AD, \qquad h_2 < \left(a_2 \frac{1-q}{2}\right).AD, \qquad h_3 < \left(a_3 \frac{1-q}{2}\right)\left(a_2 \frac{1-q}{2}\right).AD, \ldots;$$

cosicchè, detta α la più grande delle a_i, basta scegliere

$$q > \frac{\alpha - 2}{\alpha}$$

per avere, posto $\beta = \alpha \frac{1-q}{2}$, $\beta < 1$, indi

$$\bar{f}(t) < \overline{AD}(1 + \beta + \beta^2 + \cdots) = \frac{a_1}{2} \frac{1}{1-\beta}.$$

[20]) Per questa ed altre locuzioni congeneri, vedi: Dini, *Lezioni di Analisi infinitesimale,* vol. I (Pisa, 1907), §§ 9, 11.

d) *La semicirconferenza.* — Si ottiene mediante operazioni Ω dello stesso verso, prendendo $= 0$ tutte le τ fra i cui indici vi siano delle cifre 0, ovvero 3, e le altre soddisfacenti alle relazioni

$$(20)\qquad \begin{cases} \tau_{i_1 i_2 \ldots i_r} = \tau_{j_1 j_2 \ldots j_r}, \qquad \tau_{i_1 \ldots i_{r+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \sqrt{1 - \tau^2_{i_1 \ldots i_r}}} \\ \text{con } \tau_1 = \tau_2 = \sqrt{\dfrac{1}{2}}; \qquad i, j \neq 0, 3; \end{cases}$$

in modo cioè che $\tau_{i_1 \ldots i_r}$, P_r siano rispettivamente il lato ed il semiperimetro del poligono regolare di 2^{r+1} lati iscritto nel cerchio di raggio $\frac{1}{2}$. La curva ha solo punti di 1ª e di 3ª specie e le considerazioni svolte nel § 6, Osservazione II, mostrano che in ogni punto vi è la tangente ordinaria. Supposto infatti che μ sia un punto di prima specie, vertice comune dei lati non nulli $\tau_{i_1 i_2 \ldots i_r 1}$, $\tau_{i_1 i_2 \ldots i_r 2}$, si ha

$$(21)\qquad \varphi_{i_1 i_2 \ldots i_r} = \frac{\pi}{2^{r+1}},$$

quindi l'angolo formato dai due lati è

$$\pi - \varphi_{i_1 \ldots i_r 1} - \varphi_{i_1 \ldots i_r 2} = \pi\left(1 - \frac{1}{2^{r+1}}\right).$$

Inoltre, essendo

$$(22)\qquad \Phi_{i_1 i_2 \ldots i_r 1, 2} = \Phi_{i_1 i_2 \ldots i_r 2, 1} = \frac{\pi}{2^{r+2}},$$

è soddisfatta la (19), giacchè si ha

$$\Phi_{i_1 \ldots i_r 1, 2} + \pi\left(1 - \frac{1}{2^{r+1}}\right) + \Phi_{i_1 \ldots i_r 2, 1} = \pi,$$

quindi in ogni punto di prima specie esiste la tangente ordinaria (non cuspidale) e siccome il secondo membro dell'ultima eguaglianza è indipendente da r, si conclude l'esistenza di tangente ordinaria anche nei punti di 3ª specie.

Le (20), tenuto conto che è

$$\frac{\tau_{i_1 \ldots i_{r-1}}}{2} = \tau_{i_1 \ldots i_r} \cos \varphi_{i_1 \ldots i_r},$$

equivalgono per (1), (21) a

$$(23)\qquad 2 \cos \frac{\pi}{2^{r+1}} = \frac{1}{\tau_{i_1 \ldots i_r}} \qquad (i \neq 0, 3),$$

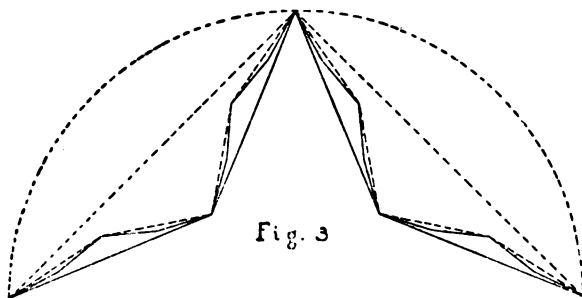
ossia per (2)

$$(24)\qquad 2^r \prod_{i=2}^{r+1} \cos \frac{\pi}{2^i} = \frac{1}{\tau_{i_1 \ldots i_r}} \qquad (i \neq 0, 3);$$

donde

$$\frac{2}{\pi} = \lim_{r=\infty} \frac{1}{P_r} = \prod_2^\infty \cos \frac{\pi}{2^i}.$$

e) Con le Ω medesime dell'esempio precedente, ma alternate di verso, si giunge a una curva continua P di lunghezza eguale a quella della semicirconferenza e priva di

nodi, la quale si può ottenere da quest'ultima mediante infiniti ribaltamenti di archi

sempre più piccoli intorno alle loro corde. Per studiare la tangente si osservi che si ha

$$\varphi_{i_1 \dots i_r} = \left(\frac{-1}{2}\right)^{r+1} \pi \tag{25}$$

e l'angolo formato da $\tau_{i_1 \dots i_r 1}$, $\tau_{i_1 \dots i_r 2}$ è ancora $\pi\left(1 - \frac{1}{2^{r+1}}\right)$.

Esistono certamente le tangenti destra e sinistra in ogni punto, perchè le serie Φ attuali sono ottenute dalle analoghe (22) cambiando alternativamente i termini di segno, ed essendo precisamente

$$\Phi_{i_1 \dots i_r 1, 2} = \Phi_{i_1 \dots i_r 2, 1} = \left(\frac{-1}{2}\right)^{r+1} \cdot \frac{\pi}{6}, \tag{26}$$

esse formano l'angolo

$$\pi - \frac{\pi}{2^{r+1}}\left(1 + \frac{(-1)^r}{3}\right)$$

compreso sempre fra 0 e π per r finito. Tutti i punti di prima specie sono dunque *angolosi* o *salienti* [21]), mentre quelli di terza specie ($r = \infty$) hanno la tangente ordinaria; sì per gli uni che per gli altri si ha

$$\text{arco } A\mu = \frac{\pi}{2}\left(a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \cdots\right), \tag{27}$$

dove a_r prende i valori 0, 1, ma mentre per i primi da un certo r in poi questi numeri son tutti 0, ovvero 1, per i secondi comunque sia grande r, fra le cifre successive all'r^{mo} si trovano sempre 0 ed 1.

L'area $(P_0 P)$ è ancora $\frac{\pi}{8}$ come per la semicirconferenza, ma *l'area veramente racchiusa* fra P_0 e P è data dalla serie assolutamente convergente

$$[P_0 P] = (P_0 P_1) - (P_1 P_2) + (P_2 P_3) - \cdots,$$

la quale, secondo la formola che dà l'area di un triangolo mediante due lati e il seno

[21]) E. CESÀRO, *Elementi di Calcolo infinitesimale* (Napoli, 1905), pag. 239.

del loro angolo, si può scrivere per (21) e seguenti

$$[P_0 P] = \frac{1}{4} \sum_1^\infty \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2^{2n-1}}}{4^{n-1} \prod_{r=3}^{2n} \cos^2 \frac{\pi}{2^r}} - \frac{1}{8} \sum_1^\infty \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2^{2n}}}{4^{n-1} \prod_{r=3}^{2n+1} \cos^2 \frac{\pi}{2^r}},$$

ovvero, ponendo

$$\pi_r = \frac{\pi}{2^r},$$

$$(28) \qquad [P_0 P] = \pi_3 - \sum_1^\infty \frac{\operatorname{sen} \pi_{2n}}{4^n \prod_{r=3}^{2n+1} \cos^2 \pi_r},$$

dove la serie

$$\frac{\operatorname{sen} \pi_2}{4 \cos^2 \pi_3} + \frac{\operatorname{sen} \pi_4}{4^2 \cos^2 \pi_3 \cos^2 \pi_5} + \frac{\operatorname{sen} \pi_6}{4^3 \cos^2 \pi_3 \cos^2 \pi_5 \cos^2 \frac{\pi}{7}} + \cdots$$

rappresenta l'eccesso del semicerchio di raggio $\frac{1}{2}$ sull'*area vera* della curva attuale. Calcolandone molti termini si avrà $[P_0 P]$ approssimativamente sempre per eccesso, mentre se si fossero lasciati i termini della serie $[P_0 P]$ nel loro ordine naturale il calcolo dei successivi termini darebbe l'*area vera* approssimata alternativamente per eccesso e per difetto, giacchè P è sempre compresa fra due spezzate successive e precisamente resta *al di dentro* di tutte le P_{2n+1} e al di fuori di tutte le P_{2n}. Essa si può dunque considerare come la regione limite di una catena di triangoli formati da P_{2n}, P_{2n+1}, il cui numero vada crescendo e la cui area diventi evanescente.

I pochi esempi addotti mostrano quanta varietà di curve si possa ottenere coi metodi esposti; in particolare, scegliendo sempre nulle le τ fra i cui indici siano cifre 0, 3 si può costruire qualunque arco di curva la cui ordinata vada sempre crescendo da 0 a un massimo per poi decrescere sempre fino a 0; può anche esser ottenuto come curva P qualunque arco regolare con un numero finito di singolarità (punti doppi, flessi, cuspidi, ecc.), quindi qualunque arco di curva razionale.

§ 8.

La quota ρ.

Prima di venire ad esprimere analiticamente le coordinate dei punti di P_1, stabilisco la loro rappresentazione aritmetica, la quale determina una nuova corrispondenza fra i punti della curva ed AB.

I segmenti $\tau_{i_1 i_2 \ldots i_r}$ col succedersi delle operazioni Ω impiccioliscono indefinitamente tendendo ai punti μ di P, ognuno dei quali pensato come limite di segmenti $\tau_{i_1 \ldots i_r}$ viene rappresentato da un sistema infinito di indici 0, 1, 2, 3.

Se $i_1 i_2 i_3 \ldots$ definisce μ, l'espressione $\rho = 0, i_1 i_2 i_3 \ldots$ rappresenta nel sistema di numerazione quaternale un numero dell'intervallo $(0, 1)$ che si dirà *quota* di μ; per $\rho = 0{,}000 \cdots = 0$ e $\rho = 0{,}333 \cdots = 1$ si hanno gli estremi A, B di P. ***Tutti gli altri punti di prima specie hanno un doppio sistema di indici, ma un'unica quota;*** infatti il vertice comune a due lati $\tau_{i_1 i_2 \ldots i_{r-2} i_{r-1} i_r}$, $\tau_{i_1 i_2 \ldots i_{r-2} j_{r-1} j_r}$ consecutivi è limite sia dei segmenti $\tau_{i_1 \ldots i_r 333 \ldots}$, sia dei segmenti $\tau_{i_1 \ldots j_r 000 \ldots}$ e si vede subito che le quote $0, i_1 i_2 \ldots i_{r-2} i_{r-1} i_r 333 \ldots$ $0, i_1 i_2 \ldots i_{r-2} j_{r-1} j_r 000 \ldots$ hanno lo stesso valore [22]). Le quote dei $4^n + 1$ vertici di P_n sono

$$0{,}00 \ldots 0, \quad 0{,}00 \ldots 01, \quad 0{,}00 \ldots 02, \quad \ldots, \quad 0{,}33, \ldots,$$

cioè

$$\frac{0}{4^n} = 0, \quad \frac{1}{4^n}, \quad \frac{2}{4^n}, \ldots, \frac{4^n}{4^n} = 1.$$

Le quote di tutti i punti di P che si trovano su $\tau_{i_1 \ldots i_r}$ sono comprese fra $\rho_0 = 0, i_1 i_2 \ldots i_r$ e $\rho_1 = \rho_0 + \frac{1}{4^r}$, cosicchè al crescere di r *tendono verso un limite unico* che è la quota del punto di P a cui si riduce $\tau_{i_1 \ldots i_r}$.

Ad ogni numero dell'intervallo $(0, 1)$ *corrisponde un punto* μ *di* P, giacchè, scritto il numero nel sistema quaternale, basta interpretarne le cifre secondo quanto si è detto per avere μ; l'inversa è evidente. Così ad ogni arbitraria successione di numeri interi, la successione dei resti (mod. 4) fa corrispondere un punto μ di P.

Se i due estremi di un segmento $\tau_{i_1 \ldots i_r}$ coincidono in μ, questo punto può venire rappresentato scrivendo, dopo la virgola, prima le cifre $i_1 \ldots i_r$ e poi un'arbitraria successione di cifre 0, 1, 2, 3; cioè, posto $\rho_0 = 0, i_1 \ldots i_r$ e $\rho_1 = \rho_0 + \frac{1}{4^r}$, da un ρ qualunque dell'intervallo $(\rho_0 \rho_1)$. Fuori di questo caso, ad ogni punto μ corrisponde un ben determinato ρ, giacchè se si avessero per μ due quote differenti, supposto che le prime cifre non coincidenti fossero i_{r+1}, j_{r+1}, il punto M_{r+1} dovrebbe trovarsi contemporaneamente in $\tau_{i_1 \ldots i_r i_{r+1}}$, $\tau_{i_1 \ldots i_r j_{r+1}}$ e ciò non può avvenire coll'esclusione fatta, a meno che μ non sia l'estremo comune a questi lati; ma anche in tal caso si è visto che si ha un'unica quota, dunque:

TEOREMA VII. — *Condizione necessaria e sufficiente affinchè* μ *sia un punto doppio è che esso abbia più di una quota, a meno che non ne abbia infinite formanti un intervallo parziale in* $(0, 1)$.

Le quote dei punti di prima specie hanno solamente cifre 0, ovvero solamente cifre 3 da una ennesima in poi; *le quote dei punti di seconda specie* hanno solamente cifre 0, 3 ma nè tutte 0, nè tutte 3 da una ennesima in poi; *le quote dei punti di terza specie*

---

[22]) Nel sistema quaternale il numero $i_1 \ldots j_r$ è il consecutivo di $i_1 \ldots i_r$, perciò

$$0, i_1 \ldots j_r = 0, \ i_1 \ldots i_r + \frac{1}{4^r} = 0, \ i_1 \ldots i_r + \frac{3}{4^{r+1}}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots\right).$$

hanno pur sempre fra le cifre successive all'ennesima qualche cifra 1 ovvero 2 comunque grande si scelga n.

Dato un punto $\mu(\rho)$ di seconda o terza specie, un punto $\mu'(\rho')$ che sia a destra del primo si ottiene cambiando certe cifre (0, 1, 2) situate nei posti $u_1 u_2 \ldots u_s$ in cifre maggiori (1, 2, 3) e facendo poi crescere indefinitamente le u, il punto mobile μ' tende a μ dalla destra, invece, cambiando certe cifre (1, 2, 3) situate nei posti $v_1 v_2 \ldots v_r$ in cifre minori (0, 1, 2) e poi facendo crescere indefinitamente le v si ha un punto mobile μ' che si avvicina a μ dalla sinistra. Per i punti di prima specie valgono le stesse considerazioni ove si scriva ρ sotto la forma $0, i_1 \ldots i_r 000 \ldots$ nel primo caso e sotto l'altra $0, i_1 \ldots j_r 333 \ldots$ nel secondo. Ciò posto, dico che *la corrispondenza stabilita dalla quota fra i punti di P e di AB è continua.* Infatti, se si dà a ρ un piccolo incremento $\delta\rho \gtreqless 0$ restano invariate le prime n cifre $i_1 i_2 \ldots i_n$, cosicchè i due punti $\mu(\rho)$ e $\mu'(\rho + \delta\rho)$ si trovano nell'arco di P compreso fra gli estremi L, N di $\tau_{i_1 i_2 \ldots i_n}$, i quali per la continuità di P tendono come μ' a μ quando tendendo $\delta\rho$ a zero, n cresce oltre limite. Dunque: *t è funzione uniforme e continua di ρ*; e analogamente: *ρ è funzione continua di t ed in generale* [23]) *uniforme.*

§ 9.

Espressioni di x, y, t.

Scelta come asse delle x la retta AB e come asse delle y la sua perpendicolare in A positiva nella regione positiva del piano, osservo col von Koch che, proiettando la spezzata $AMM_1M_2 \ldots M_n \ldots \mu$ sui due assi, si ottengono le coordinate della curva P le quali in virtù della supposta convergenza della serie (3) *sono dunque funzioni uniformi e continue di t e* (per quanto ho dimostrato sopra) *anche di ρ*. Esprimerò le x, y, t di un punto μ mediante le cifre della sua quota lasciandomi guidare da criterii analoghi a quelli seguiti dal Broglio nel suo studio sulla curva del von Koch.

Indicando per un momento con $a_{n,n}$ un segmento di $\tau_{i_1 i_2 \ldots i_n}$, con $a_{m,n}$ $(m < n)$ il suo corrispondente in P_m secondo il § 2 e chiamando $\varphi_{a\ldots b0}$ $\varphi_{a\ldots b3}$ gli angoli nulli formati da $\tau_{a\ldots b}$ rispettivamente con $\tau_{a\ldots b0}$, $\tau_{a\ldots b3}$, si ha

$$a_{m,n} = a_{n,n} \prod_{r=1}^{n-m} \cos\varphi_{i_1 \ldots i_m i_{m+1} \ldots i_{m+r}}, \qquad a_{0,n} = a_{n,n} \prod_{r=1}^{n} \cos\varphi_{i_1 i_2 \ldots i_r}.$$

Ciò posto, se $LNPQM$ è la spezzatina costruita su $LM = \tau_{i_1 \ldots i_{n-1}}$ ed X è la proiezione su di esso del primo estremo di $\tau_{i_1 \ldots i_{n-1} i_n}$, la distanza LX è espressa da

$$(29) \qquad d(n-1, n) = \sum_{r=0}^{i_{n-1}} \tau_{i_1 \ldots i_{n-1} r} \cos\varphi_{i_1 \ldots i_{n-1} r}$$

---

[23]) Si ha eccezione nei punti doppi e in quelli ad infinite quote (Teorema VII).

e la sua proiezione su P_m è

$$d(m, n) = d(n-1, n) \prod_{s=1}^{n-m-1} \cos \varphi_{i_1 \ldots i_m i_{m+1} \ldots i_{m+s}} \qquad (m < n),$$

da cui

$$(30) \qquad d(0, n) = \sum_{r=0}^{i_n - 1} \tau_{i_1 \ldots i_{n-1} r} \cdot \cos \varphi_{i_1 \ldots i_{n-1} r} \cdot \prod_{s=1}^{n-1} \cos \varphi_{i_1 \ldots i_s},$$

donde, essendo evidentemente

$$t = d(0, 1) + d(0, 2) + d(0, 3) + \cdots,$$

$$(31) \qquad t = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{r=0}^{r=i_n - 1} \tau_{i_1 \ldots i_{n-1} r} \cdot \cos \varphi_{i_1 \ldots i_{n-1} r} \cdot \prod_{s=1}^{n-1} \cos \varphi_{i_1 \ldots i_s} \right).$$

Questa espressione dà t per mezzo delle τ e delle φ, quindi per mezzo delle ϑ che son le costanti della curva e dipende dagli indici i che sono le cifre della quota; la sua continuità rispetto a ρ risulta dal fatto che un piccolo incremento dato a ρ altera solo le ultime cifre epperò gli ultimi termini della serie convergente (31).

Noto che, *se μ è un punto di prima o di seconda specie,* il prodotto $\prod_{s=1}^{n-1}$ da un certo punto in poi non acquista mai fattori, perchè $\cos \varphi_{a \ldots b0} = \cos \varphi_{a \ldots b3} = 1$; *se poi μ è un punto di prima specie* diverso dagli estremi, si hanno per t due espressioni diverse nella forma ma eguali in valore (l'una è un polinomio, l'altra una serie) corrispondentemente ai due diversi modi di scrivere ρ; *se infine μ è un punto di terza specie,* non si arresta nè la serie, nè Π.

Più generalmente, se L è il primo estremo del lato di P_{m-1} su cui cade M_{m-1} corrispondente a μ ed $LNPQM$ è la spezzata costruita su di esso, posto $LM_{m-1} = t_{m-1}$, si ha

$$t_{m-1} = LM_{m-1} = d(m-1, m) + d(m-1, m+1) + \cdots,$$

onde

$$(32) \qquad t_m = \sum_{n=m+1}^{\infty} \left(\sum_{r=0}^{i_n - 1} \tau_{i_1 \ldots i_{n-1} r} \cdot \cos \varphi_{i_1 \ldots i_{n-1} r} \cdot \prod_{s=1}^{n-m-1} \cos \varphi_{i_1 \ldots i_m \ldots i_{m+s}} \right)$$

che per $m = 0$ si riduce alla (31). *Indicando con $f_m(t)$ il segmento $\overline{f_m}(t) = M_{m-1} M_m$ preso col segno positivo o negativo secondo il verso di $\Omega_{i_1 \ldots i_{m-1}}$, si ha*

$$f_m(t) = 0, \quad = NM_m \operatorname{sen} \varphi_{i_1 \ldots i_{m-1} 1}, \quad = (PQ - PM_m) \operatorname{sen} \varphi_{i_1 \ldots i_{m-1} 2}, \quad = 0,$$

secondo che M_m cade rispettivamente nei tratti LN, NP, PQ, QM: in ogni caso

$$(33) \qquad f_m(t) = (-1)^{i_m - 1} [t_m - (i_m - 1) \tau_{i_1 \ldots i_m}] \cdot \operatorname{sen} \varphi_{i_1 \ldots i_m}.$$

Se si chiama per un momento α l'angolo formato dalla direzione positiva dell'asse x con la direzione positiva di $LN = \tau_{i_1 \ldots i_{m-1}}$, l'angolo formato dalla prima con la direzione positiva di $\tau_{i_1 i_2 \ldots i_{m-1} i_m}$ è manifestamente $\alpha + (-1)^{i_m - 1} \varphi_{i_1 \ldots i_{m-1} i_m}$, quindi ragionando per ricorrenza si ha

$$(34) \qquad \operatorname{ang}(x, \tau_{i_1 \ldots i_m}) = -\sum_{r=1}^{r=m} (-1)^{i_r} \varphi_{i_1 \ldots i_r},$$

e le proiezioni di $f_m(t)$ sugli assi x, y sono rispettivamente

$$f_m(t)\,.\,\mathrm{sen}\sum_{r=1}^{r=m-1}(-1)^{i_r}\varphi_{i_1\ldots i_r}, \qquad f_m(t)\,.\,\cos\sum_{r=1}^{r=m-1}(-1)^{i_r}\varphi_{i_1\ldots i_r}.$$

Abbiamo quindi

$$(35)\quad \overline{f}(t)=-\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{i_m}\Big[\sum_{n=m+1}^{\infty}\Big(\sum_{r=0}^{i_n-1}\tau_{i_1\ldots i_{n-1}r}.\cos\varphi_{i_1\ldots i_{n-1}r}.\prod_{s=1}^{n-m-1}\cos\varphi_{i_1\ldots i_m\ldots i_{m+s}}\Big) -(i_m-1)\tau_{i_1\ldots i_m}\Big].\mathrm{sen}\overline{\varphi}_{i_1\ldots i_m}$$

$$(36)\quad y=-\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{i_m}\Big[\sum_{n=m+1}^{\infty}\Big(\sum_{r=0}^{i_n-1}\tau_{i_1\ldots i_{n-1}r}.\cos\varphi_{i_1\ldots i_{n-1}r}.\prod_{s=1}^{n-m-1}\cos\varphi_{i_1\ldots i_m\ldots i_{m+s}}\Big) -(i_m-1)\tau_{i_1\ldots i_m}\Big].\mathrm{sen}\varphi_{i_1\ldots i_m}.\cos\Big[\sum_{s=1}^{m-1}(-1)^{i_s}\varphi_{i_1\ldots i_s}\Big]$$

$$(37)\quad \left\{\begin{aligned} x=&\sum_{m=1}^{\infty}\Big(\sum_{r=0}^{i_m-1}\tau_{i_1\ldots i_{m-1}r}.\cos\varphi_{i_1\ldots i_{m-1}r}.\prod_{s=1}^{m-1}\cos\varphi_{i_1\ldots i_s}\Big)\\ &-\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{i_m}\Big[\sum_{n=m+1}^{\infty}\Big(\sum_{r=0}^{i_n-1}\tau_{i_1\ldots i_{n-1}r}.\cos\varphi_{i_1\ldots i_{n-1}r}.\prod_{s=1}^{n-m-1}\cos\varphi_{i_1\ldots i_m\ldots i_{m+s}}\Big)\\ &-(i_m-1)\tau_{i_1\ldots i_m}\Big].\mathrm{sen}\varphi_{i_1\ldots i_m}.\mathrm{sen}\Big[\sum_{s=1}^{m-1}(-1)^{i_s}\varphi_{i_1\ldots i_s}\Big],\end{aligned}\right.$$

sulle quali formule possono farsi osservazioni analoghe a quelle fatte sulla (31).

D'ora in poi mi occuperò esclusivamente di *curve di prima classe*, fermandomi in particolare sulle *equilatere di prima classe.*

In generale per la (2), la (31) si può scrivere

$$t=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{r=0}^{i_n-1}\mathfrak{z}_{i_1i_2\ldots i_{n-1}r}\,.\cos\varphi_{i_1i_2\ldots i_{n-1}r}\Big)\prod_{s=1}^{n-1}\mathfrak{z}_{i_1\ldots i_s}\,.\cos\varphi_{i_1\ldots i_s},$$

e per *le curve di prima classe*

$$(38)\qquad t=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{r=0}^{i_n-1}\mathfrak{z}_r\,.\cos\varphi_r\Big)\prod_{r=1}^{n-1}\mathfrak{z}_{i_s}\cos\varphi_{i_s}$$

$$(39)\qquad t_m=(\mathfrak{z}_{i_1}\,\mathfrak{z}_{i_2}\,\ldots\,\mathfrak{z}_{i_m})\sum_{n=m+1}^{\infty}\Big(\sum_{r=0}^{i_n-1}\mathfrak{z}_r\cos\varphi_r\Big)\prod_{s=1}^{n-m-1}\cos\varphi_{i_{m+s}}$$

$$(40)\quad f_m(t)=(-1)^{i_m-1}(\mathfrak{z}_{i_1}\mathfrak{z}_{i_2}\ldots\mathfrak{z}_{i_m})\Big[\sum_{n=m+1}^{\infty}\Big(\sum_{r=0}^{i_n-1}\mathfrak{z}_r\cos\varphi_r\Big)\prod_{s=1}^{n-m-1}\mathfrak{z}_{i_{m+s}}.\cos\varphi_{i_{m+s}}-(i_m-1)\Big]\mathrm{sen}\varphi_{i_m},$$

dopo di che si scrivono subito le formole analoghe alle (35), (36), (37).

Se più specialmente si tratta di *equilatere di prima classe,* posto al solito $\mathfrak{z}=\mathfrak{z}_i$, $\varphi=\varphi_1=\varphi_2$ e *indicando con* $\overline{n-m}$ *il numero delle cifre* 1, 2 *che si trovano fra* i_{m+1},

$i_{m+2}, \ldots, i_{n-1}$ *in* ρ, si ha

$$t = \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{z}^n . \cos^{\overline{n-0}} \varphi . \left(\sum_{r=0}^{i_n-1} \cos \varphi_r \right) \tag{41}$$

$$t_m = \sum_{n=m+1}^{\infty} \mathfrak{z}^n . \cos^{\overline{n-m}} \varphi . \left(\sum_{r=0}^{i_n-1} \cos \varphi_r \right)$$

$$f_m(t) = (-1)^{i_m-1} \mathfrak{z}^m \left[\sum_{n=m+1}^{\infty} \mathfrak{z}^{n-m} . \cos^{\overline{n-m}} \varphi . \left(\sum_{r=0}^{i_n-1} \cos \varphi_r \right) - (i_m - 1) \right] \operatorname{sen} \varphi_{i_m}$$

$$\overline{f}(t) = - \operatorname{sen} \overline{\varphi}_m \sum_{m=1}^{\infty}{}' (-1)^{i_m} \mathfrak{z}^m \left[\sum_{n=m+1}^{\infty} \mathfrak{z}^{\overline{n-m}} . \cos^{\overline{n-m}} \varphi . \left(\sum_{r=0}^{i_n-1} \cos \varphi_r \right) - (i_m - 1) \right] \tag{42}$$

$$y = - \operatorname{sen} \varphi \sum_{m=1}^{\infty}{}' (-1)^{i_m} \mathfrak{z}^m \left[\sum_{n=m+1}^{\infty} \mathfrak{z}^{n-m} . \cos^{\overline{n-m}} \varphi . \left(\sum_{r=0}^{i_n-1} \cos \varphi_r \right) - (i_m - 1) \right] . \cos \left[\varphi \sum_{s=1}^{m-1}{}' (-1)^{i_s} \right] \tag{43}$$

$$\left\{ \begin{aligned} & x = \sum_{m=1}^{\infty} \mathfrak{z}^m . \cos^{\overline{m-0}} \varphi . \left(\sum_{r=0}^{i_n-1} \cos \varphi_r \right) \\ & - \operatorname{sen} \varphi \sum_{m=1}^{\infty}{}' (-1)^{i_m} \mathfrak{z}^m \left[\sum_{n=m+1}^{\infty} \mathfrak{z}^{n-m} . \cos^{\overline{n-m}} \varphi . \left(\sum_{r=0}^{i_n-1} \cos \varphi_r \right) - (i_m - 1) \right] . \operatorname{sen} \left[\varphi \sum_{s=1}^{m-1}{}' (-1)^{i_s} \right], \end{aligned} \right. \tag{44}$$

dove nelle $\sum'$ si intendono esclusi i termini che sono accompagnati da $(-1)^0$, $(-1)^3$.

La (42) è convergente [e con essa la (43) e la (44)], giacchè è $\mathfrak{z} < \frac{1}{2}$; ora si presenta naturale la domanda: a quale condizione debbono soddisfare le operazioni Ω, cioè le $\mathfrak{z}_{a \ldots b}$, affinchè definiscano una *curva P continua,* ossia affinchè la serie (3) risulti convergente? Non potendo dir nulla nel caso generale, dimostro il

TEOREMA VIII. — *Per ottenere una curva P con le* Ω *eguali (a meno del verso) e con* $\mathfrak{z}_0 \neq 0 \neq \mathfrak{z}_3$ *occorre e basta che* $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{z}_2$ *si prendano minori di* 1.

La sufficienza risulta da ciò, che, denotando con $\mathfrak{z}$ il più grande dei quattro numeri $\mathfrak{z}_0 \mathfrak{z}_1 \mathfrak{z}_2 \mathfrak{z}_3$ minori di 1, si ha

$$\overline{f}_1 \leqq h, \qquad \overline{f}_2 \leqq \mathfrak{z} h, \qquad \overline{f}_3 \leqq \mathfrak{z}^2 h, \ \ldots, \ \overline{f}(t) < h \frac{1}{1 - \mathfrak{z}}$$

e quanto alla necessità si osservi che, supposto per es. $\mathfrak{z}_1 \geqq \mathfrak{z}_2$, per il punto $\rho = 0$, 111 ..., si ha dalla (40)

$$\overline{f}_m(t) = \mathfrak{z}_1^m \operatorname{sen} \overline{\varphi}_1 \left[\sum_{r=m+1}^{\infty} \mathfrak{z}_0 (\mathfrak{z}_1 \cos \varphi_1)^{r-m-1} \right] = \frac{\mathfrak{z}_0 \operatorname{sen} \overline{\varphi}_1}{1 - \mathfrak{z}_1 \cos \varphi_1} \mathfrak{z}_1^m ;$$

quindi per tale punto, a parte un fattore costante, la serie $\overline{f}(t)$ si riduce alla geometrica $1 + \mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_1^2 + \cdots$; analogamente se fosse $\mathfrak{z}_1 < \mathfrak{z}_2$.

Se poi delle $\mathfrak{z}_0$, $\mathfrak{z}$ una o tutte e due fossero nulle, considerando il punto $\rho = 0$, 1212 ... si dimostrerebbe analogamente che *il prodotto* $\mathfrak{z}_1 \mathfrak{z}_2$ *deve essere minore di* 1, restando sempre sufficienti le condizioni $\mathfrak{z}_1 < 1$, $\mathfrak{z}_2 < 1$.

Dai teoremi IV (§ 5) ed VIII si deduce l'esistenza di *curve continue non quadrabili,* cosicchè possiamo affermare:

A) Esistono curve continue

dotate di tangente,	*quadrabili,*	*rettificabili*	
prive di tangente [24]),	»	»	(§ 7, *c*)
» » »	»	*non rettificabili*	(curve di 1ª classe)
» » »	*non quadrabili,*	» »	(dall'ultima osserv.)

B) Non esistono curve continue

dotate di tangente,	*quadrabili,*	*non rettificabili*	
» » »	*non quadrabili,*	» »	
» » »	» »	*rettificabili*	
prive di tangente,	» »	»	(Teorema III, § 5)

§ 10.

Nota sulle equilatere di prima classe.

Come applicazione delle formole trovate cerchiamo le coordinate dei punti di una equilatera di 1ª classe che stanno su AB. Le loro quote sono della forma $\rho = 0,$ $0 \ldots 03 \ldots 30 \ldots 03 \ldots$, cioè $\rho = \frac{3}{4^{m_1}} + \frac{3}{4^{m_2}} + \cdots$ $(m_1 < m_2 < m_3 < \cdots)$, le $\sum'$ che entrano in (42), (43), (44) son tutte nulle e si ha

$$y = 0, \qquad \overline{f}(t) = 0, \qquad x = t, \qquad \overline{n - 0} = 0,$$

quindi da (41)

$$x = t = (1 + 2\cos\varphi)(\mathfrak{z}^{m_1} + \mathfrak{z}^{m_2} + \mathfrak{z}^{m_3} + \cdots), \qquad y = 0,$$

che nel caso della curva di von Koch (§ 7, b; $\mathfrak{z} = \frac{1}{3}$, $\cos = \frac{1}{2}$) divengono

$$x = t = 2\left(\frac{1}{3^{m_1}} + \frac{1}{3^{m_2}} + \cdots\right), \qquad y = 0$$

concordemente a quanto hanno trovato il Cesàro e il Broglio e come del resto si può veder subito direttamente.

A complemento di quanto si è detto nel § 6 sui punti di prima specie nelle P con le Ω eguali a meno del verso, si osservi che se μ è il primo estremo di $\tau_{i_1 \ldots i_r}$, i lati

$$\tau_{i_1 \ldots i_r j_1 \ldots j_s}, \qquad \tau_{i_1 \ldots i_r 0 j_1 \ldots j_s}, \qquad \tau_{i_1 \ldots i_r 00 j_1 \ldots j_s}, \; \ldots, \; \tau_{i_1 \ldots i_r 00 \ldots 0 j_1 \ldots j_s}, \; \ldots$$

appartenenti rispettivamente alle poligonali P_{r+s}, P_{r+s+1}, P_{r+s+2}, ... sono paralleli e dello stesso senso, quando si suppone in più che i versi delle Ω siano eguali e sia $\mathfrak{z}_0 \neq 0$; essi decrescono secondo una progressione geometrica di ragione $\mathfrak{z}_0$ e i loro

[24]) In questo caso sottintendi: *destra e sinistra nei punti di un gruppo di 2ª specie.*

primi estremi da una parte e i secondi dall'altra sono allineati con μ; similmente se è $\mathfrak{z}_3 \neq 0$ si ragiona sopra i lati $\tau_{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_s}$, $\tau_{i_1 \dots i_r 3 j_1 \dots j_s}$, ... ed il secondo estremo di $\tau_{i_1 \dots i_r}$, donde segue il

TEOREMA IX. — *In una curva di prima classe, se μ, μ' sono vertici di P_r, P_{r+s}, sul segmento $\mu\mu'$, esistono infiniti punti di prima specie uno per ognuna delle poligonali successive a P_{r+s}, i quali si succedono secondo gl'indici delle medesime e si avvicinano al loro punto limite μ secondo una progressione geometrica di ragione $\mathfrak{z}_0$ ovvero $\mathfrak{z}_3$ supposti non nulli.*

Così ad es. i punti $\rho = 0{,}2$, $\rho = 0{,}02$, $\rho = 0{,}002$, ecc. sono tutti allineati con A e i punti $\rho = 0{,}2$, $\rho = 0{,}32$, $\rho = 0{,}332$, ecc. sono allineati con B.

Il BROGLIO ha trovato mediante formule da lui stabilite per la curva di VON KOCH, 4 limiti particolari del rapporto incrementale $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ in un punto μ di prima specie, ottenuti facendo percorrere a μ' determinate successioni di punti; ora noi mediante il Teorema IX sappiamo che per qualunque curva di 1ª classe con $\mathfrak{z}_0 \neq 0 \neq \mathfrak{z}_3$ il coefficiente angolare $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ della secante $\mu\mu'$ ha infiniti valori limiti particolari. Egli ha riconosciuto inoltre che se μ è di seconda specie, la secante $\mu\mu'$ ha una posizione limite particolare corrispondente alla direzione del lato $\tau_{i_1 \dots i_r}$ su cui si trova μ e ciò è evidente dal punto di vista geometrico; ora io fermandomi alle *equilatere di prima classe* mostrerò altri *valori limiti particolari di $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ in certi punti μ di seconda specie.*

Sia $\rho = 0, i_1 i_2 \dots i_n \dots$ la quota di μ che suppongo su AB; vale a dire che le cifre i_n son tutte scelte fra 0, 3 e per quanto si prenda grande n, ve ne saranno sempre 0 e 3. Fissato n, si consideri il punto μ' di quota $\rho' = 0, s_1 i_2 \dots i_n 200 \dots$ e si ponga

$$d_{i_n} = \sum_{r=0}^{i_n - 1} l \cos \varphi_r .$$

Si ha

$$y = 0, \qquad x = t, \qquad y' = f_1(t') = \tau_{i_1 \dots i_n 2} . \operatorname{sen} \varphi, \qquad x' = t'$$

e da (41), siccome è $\overline{n - 0} = 0$, posto $\Delta y = y' - y$, $\Delta x = x' - x$,

$$t = \sum_{m=1}^{n} \mathfrak{z}^m d_{i_m} + \mathfrak{z}^{n+1} d_{i_{n+1}} + \sum_{m=n+2}^{\infty} \mathfrak{z}^m d_{i_m}$$

$$t' = \sum_{m=1}^{n} \mathfrak{z}^m d_{i_m} + \mathfrak{z}^{n+1} d_2 ,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\operatorname{sen} \varphi}{(d_2 - d_{i_{n+1}}) - \sum_{m=n+2}^{\infty} \mathfrak{z}^{m-n-1} d_{i_m}} . \tag{45}$$

Questa formola vale tanto per i punti di prima che di seconda specie i quali si trovano su AB; facendo variare u si ha una successione di $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ che nel primo caso

raggiunge un *limite particolare* [25]), e nel secondo non tende a nessun *limite particolare* perchè accade infinite volte di trovare $i_{n+1} = 0$, $i_{n+2} = 3$, e ciò si vede facilmente sia per via geometrica che analitica [26]).

Stacchiamo ora dalla successione (45) quella che se ne ottiene prendendo μ' sempre *a destra* di μ per il che basta considerare solo quei termini che si riferiscono agli indici $i_{n+1} = 0$. Supposto dunque che sia

$$i_{n+1} = 0, \qquad i_{n+2} = i_{n+3} = \cdots = i_{n+l} = 3, \qquad i_{n+l+1} = 0 \qquad\qquad (l \geqq 1),$$

saranno termini consecutivi dell'attuale successione i seguenti

$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{n+1} = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{d_2 - \mathfrak{z}(d_{i_{n+2}} + \mathfrak{z} d_{i_{n+3}} + \mathfrak{z}^2 d_{i_{n+4}} + \cdots)}$$

$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{n+l+1} = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{d_2 - \mathfrak{z}(d_{i_{n+l+2}} + \mathfrak{z} d_{i_{n+l+3}} + \mathfrak{z}^2 d_{i_{n+l+4}} + \cdots)}\,.$$

Per ogni valore di n si ha un valore di l; orbene, *se da un certo n in poi l è costante,* si finirà coll'avere

$$\sum_{m=n+2}^{\infty} d_{i_m} \mathfrak{z}^{m-n-2} = \sum_{m=n+l+2}^{\infty} d_{i_m} \mathfrak{z}^{m-n-l-2} = d_3 \frac{\mathfrak{z}^{l-1} - 1}{\mathfrak{z} - 1} \frac{1}{1 - \mathfrak{z}^l}\,,$$

onde

$$\lim_{n=\infty} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{n+1} = \frac{(1 - \mathfrak{z})^l \operatorname{sen}\varphi}{\mathfrak{z}^{l-1}(1 - \mathfrak{z}) + \cos\varphi(1 - \mathfrak{z}^l)}\,. \tag{46}$$

Per $l = 1$ si ritorna ai punti di prima specie.

Nel caso della curva di VON KOCH il secondo membro di (46) diviene $\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{3^l - 1}{3^{l-1} + 1}$ e si può per es. verificare che il punto di seconda specie che ha per quota $\rho = 0{,}0303\ldots$ e per coordinate $x = \frac{1}{4}$, $y = 0$ è allineato coi punti

$$\rho = 0{,}2, \quad \rho = 0{,}032, \quad \rho = 0{,}03032, \ \ldots$$

culmini dei lati

$$\tau, \quad \tau_{03}, \quad \tau_{0303}, \ \ldots$$

ed il coefficiente angolare di tale retta è $\frac{2}{3}\sqrt{3} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{3^l - 1}{3^{l-1} + 1}\right)_{l=2}$.

Stante la simmetria di P rispetto alla retta $y = \frac{1}{2}$, possiamo dire che la successione che si stacca dalla (45) considerando solo i termini che si riferiscono agli indici $i_{n+1} = 3$, quando da un certo punto in poi è costante il numero $l' - 1$ delle cifre 0 intercalate fra due cifre 3 in ρ, raggiunge un limite che si ottiene da (46) cambiandola di segno e mutando l in l'.

Più generalmente, vediamo che cosa accada quando ρ presenti *la periodicità* (λ, λ'),

---

[25]) $\pm \frac{\operatorname{sen}\varphi}{1 + \cos\varphi}$ secondo che ρ è scritto mediante infiniti 0, ovvero mediante infiniti 3.

[26]) Da tener presente: $d_0 = 0$, $d_1 = 1$, $d_2 = 1 + \cos\varphi$, $d_3 = 1 + 2\cos\varphi$; $1 - \mathfrak{z} = \mathfrak{z} d_3$.

con che intendo che da un punto in poi la successione delle cifre 0,3 sia

$$\underset{n}{3}\ \underset{n+1}{0}\ \ldots\ \underset{n+\lambda'-1}{0}\quad \underset{n+\lambda'}{3}\ \underset{n+\lambda'+1}{3}\ \ldots\ \underset{n+\lambda'+\lambda-1}{3}\quad \underset{n+\lambda'+\lambda}{0}\ \ldots\ \underset{n+\lambda+2\lambda'-1}{0}\quad \underset{n+\lambda+2\lambda'}{3}\ \ldots$$

con λ, λ' costanti [27]). Stacchiamo dalla (45) una nuova successione considerando solamente i termini $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_n$ per cui è $i_n = 0$. *Da un certo punto in poi* a calcoli fatti si ha

$$(47)\qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{m=n+1}^{\infty} \vartheta^{m-n-1} d_{i_m} = \vartheta^{\lambda'-2} \frac{1-\vartheta^{\lambda}}{1-\vartheta^{\lambda+\lambda'}}, \\ \displaystyle\sum_{n+2}^{\infty} = \frac{1}{\vartheta} \sum_{n+1}^{\infty}, \quad \sum_{n+3}^{\infty} = \frac{1}{\vartheta^2} \sum_{n+1}^{\infty}, \ldots, \sum_{n+\lambda'}^{\infty} = \frac{1}{\vartheta^{\lambda'-1}} \sum_{n+1}^{\infty}. \end{cases}$$

Queste serie competono rispettivamente ai termini

$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_n, \quad \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{n+1}, \ldots, \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{n+\lambda'-1}$$

della nostra successione, e competono altresì ai termini

$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{n+(\lambda+\lambda')}, \quad \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{n+(\lambda+\lambda')+1}, \ldots, \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{n+(\lambda+\lambda')+\lambda'-1}$$

immediatamente susseguenti, giacchè le serie considerate comportano λ' valori distinti che si ripetono periodicamente mentre invece son sempre nulle le corrispondenti d_{i_r}. Si vede dunque che l'attuale successione non tende a nessun limite, ma da un certo punto in poi essa diventa periodica e i suoi termini, come risulta da (45), (47), riprendono successivamente i valori

$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^{(1)} = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{(1+\cos\varphi) - \vartheta^{\lambda'-1}\dfrac{1-\vartheta^{\lambda}}{1-\vartheta^{\lambda+\lambda'}}}$$

$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^{(2)} = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{(1+\cos\varphi) - \vartheta^{\lambda'-2}\dfrac{1-\vartheta^{\lambda}}{1-\vartheta^{\lambda+\lambda'}}}$$

. . . .

$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^{(\lambda')} = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{(1+\cos\varphi) - \dfrac{1-\vartheta^{\lambda}}{1-\vartheta^{\lambda+\lambda'}}},$$

il primo dei quali per $\lambda' = 1$, $\lambda = l - 1$ coincide con (46).

Si può prendere invece μ' sempre *a sinistra* di μ e ripetere i calcoli; si osservi

---

[27]) Per $\lambda' = 1$, $\lambda = l - 1$ si ricade nella ricerca precedente; se per di più si fa $\lambda = 0$ si hanno i primi estremi dei lati τ che stanno su AB, mentre si hanno i secondi estremi facendo $\lambda = 1$, $\lambda' = 0$.

poi che quanto si è detto fin qui, vale anche (a cagione della similitudine fra P e le sue parti) nel caso in cui il punto μ di seconda specie stia su un lato $\tau_{i_1 \ldots i_r}$ qualunque anzicchè su AB, sol che ai valori trovati sopra per $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ si aggiunga il coefficiente angolare della direzione $\tau_{i_1 \ldots i_r}$; onde il

TEOREMA X. — *I culmini μ' dei lati che hanno per limite un punto μ di seconda specie dotato della periodicità (λ, λ') si ripartiscono da un certo punto in poi in $\lambda + \lambda'$ serie (di cui λ spettano ai μ' precedenti μ e λ' ai seguenti), tali che tutti quelli di una medesima serie sono allineati con μ.*

§ 11.

Formule di Cesàro generalizzate.

Le espressioni date per $\overline{f}(t)$, x, y, t si semplificano notevolmente quando le $\mathfrak{z}$ fra i cui indici vi è qualche cifra o ovvero 3 siano tutte nulle, perchè allora invece di quattro indici diversi 0, 1, 2, 3 se ne possono adoperar due 0, 1 e le quote si scrivono nel sistema di numerazione a base 2. Intendo in questo § di restare in tale ipotesi e mantengo, salvo gl'indici, la stessa nomenclatura e le stesse notazioni occupandomi solo delle *curve equilatere con le Ω eguali a meno del verso.* Si trova facilmente

$$(2') \qquad \tau_{i_1 i_2 \ldots i_r} = \tau_{j_1 j_2 \ldots j_r} = \mathfrak{z}^r$$

$$\mathfrak{z} \cos \varphi = \frac{1}{2}$$

$$(29') \qquad d(n-1, n) = i_n \mathfrak{z}^n \cos \varphi$$

$$d(m, n) = i_n \mathfrak{z}^n \cos^{n-m} \varphi = \frac{\mathfrak{z}^m i_n}{2^{n-m}} \qquad (m < n)$$

$$(30') \qquad d(0, n) = i_n \mathfrak{z}^n \cos^n \varphi = \frac{i_n}{2^n}$$

$$(31') \qquad t = d(0, 1) + d(0, 2) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i_n}{2^n}.$$

Dalla (31') segue la conseguenza notevole

$$t = \rho,$$

inoltre

$$(32') \qquad t_m = d(m, m+1) + d(m, m+2) + \cdots = \mathfrak{z}^m \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{i_n}{2^{n-m}}$$

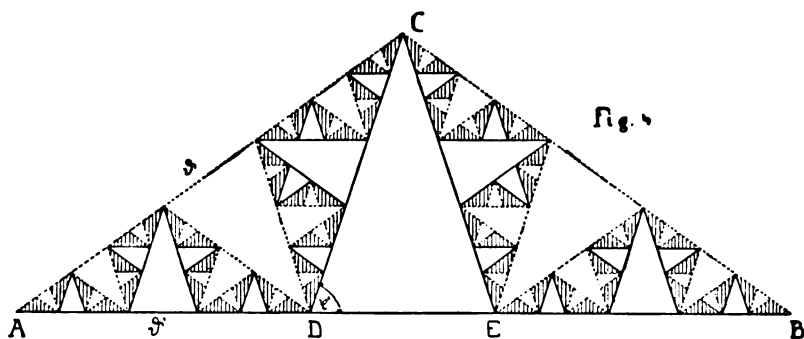
$$(33') \quad f_m(t) = (-1)^{i_m}(t_m - i_m \tau_m) \operatorname{sen} \varphi_{i_1 \ldots i_m} = (-1)^{i_m} \mathfrak{z}^m \left(\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{i_n}{2^{n-m}} - i_m \right) \operatorname{sen} \varphi_{i_1 \ldots i_m}$$

$$(34') \qquad \operatorname{ang}(x, \tau_{i_1 \ldots i_m}) = \sum_{r=1}^{m} (-1)^{i_r} \varphi_{i_1 \ldots i_r}$$

$$(35') \qquad \overline{f}(t) = \operatorname{sen} \overline{\varphi} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{i_m} \mathfrak{z}^m \left(\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{i_n}{2^{n-m}} - i_m \right)$$

$$(36') \qquad y=\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{i_m}\vartheta^m\left(\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{i_n}{2^{n-m}}-i_m\right)\cos\left(\sum_{r=1}^{m-1}(-1)^{i_r}\varphi_{i_1\ldots i_r}\right)\operatorname{sen}\varphi_{i_1\ldots i_m}$$

$$(37') \qquad x=\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{i_m}{2^m}-i^m\vartheta^m\left(\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{i_n}{2^{n-m}}-i_m\right)\operatorname{sen}\left(\sum_{r=1}^{m-1}(-1)^{i_r}\varphi_{i_1\ldots i_r}\right)\operatorname{sen}\varphi_{i_1\ldots i_m}\right].$$

Per $\varphi_{i_1\ldots i_m}=(-1)^{m-1}\varphi$ si ottengono le curve che furon dette nei §§ precedenti *equilatere di prima classe* (e che ora non potrebbero chiamarsi così perchè le Ω *sono a versi alternati*). Sia P infatti una di quelle curve già dette equilatere di prima classe, definite dall'operazione costante Ω' per cui da AB si passa alla poligonale $P'_1=ADCEB$.

Si chiami $+\Omega$ l'operazione di verso positivo con cui si passa da AB ad $ACB=P_1$; con $-\Omega$ la stessa cambiata di verso; e si osservi che per l'eguaglianza degli angoli CAP, ACD, eseguendo su P l'operazione $-\Omega$ si passa a $P_2=P'_1$, cosicchè simbolicamente da

$$+\Omega,\quad +\Omega.-\Omega\equiv\Omega',\quad +\Omega.-\Omega.+\Omega,\quad +\Omega.-\Omega.+\Omega.-\Omega\equiv\Omega'.\Omega',\ \ldots$$

provengono

$$P_1,\quad P_2=P'_1,\quad P_3,\quad P_4=P'_2,\ \ldots$$

Ora, posto per un momento $(P_0P_1)=a$, $\dfrac{DE}{AB}=DE=b$, si ha

$$(P_1P_2)=(P_1P'_1)=a(1-b),\ (P_2P_3)=(P'_1P_3)=a(1-b)^2,\ (P_3P_4)=(P_3P'_2)=a(1-b)^3,\ldots;$$

epperò, essendo $\lim_{r=\infty}(1-b)^r=0$, le poligonali P'_i, P_j hanno per i, $j=\infty$ la stessa curva limite P (o non tendono a nessun limite). Ciò mostra, se non lo avessimo pensato già prima, che *per l'eguaglianza di due curve P è condizione sufficiente ma non necessaria l'eguaglianza delle operazioni* Ω *corrispondenti, anche a prescindere da quelle nulle;* di più, siccome con certe operazioni (qui Ω') una curva P è di prima classe, mentre con certe altre (qui Ω) è di seconda, si deve intendere che una P è di prima classe quando è *possibile* trovare un'operazione che ripetuta indefinitamente dia la curva. Le relazioni fra le due operazioni sono date da

$$\varphi'=2\varphi,\qquad \frac{\vartheta}{\vartheta'}=\frac{\operatorname{sen}\varphi'}{\operatorname{sen}\varphi},$$

che per la curva di VON KOCH $\left(\varphi' = 60^\circ,\ \mathfrak{z}' = \frac{1}{3}\right)$ dànno $\varphi = 30$, $\mathfrak{z} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $ACB = 90^\circ$.

Si osservi che con la nuova costruzione (che è una generalizzazione di quella data dal CESÀRO per la curva di VON KOCH) P è sempre nell'interno dell'area (P_i, P_{i+1}) come nell'es. *e*), § 7, e siccome (P_{i+1}, P_{i+2}) si ottiene dall'area precedente sottraendovene certe parti, si può restringere quanto si vuole mediante soppressioni successive la regione del piano in cui si trova P in modo da averne una rappresentazione grafica sempre più soddisfacente, ecc.

Le formole date fin ora per x, y si sono ottenute proiettando la spezzata $AMM_1M_2 \ldots \mu$ e usando per $f_i(t)$ un'espressione in cui entra t_i calcolata mediante una serie [28]), ma si possono immaginare infinite altre spezzate che conducano da A in μ, il cui impiego può riescire più vantaggioso nei singoli casi. In quello attuale siano $n_1, n_2, n_3, \ldots$ i posti delle cifre 1 in ρ; chiamando $N_1, N_2, N_3, \ldots$ i secondi estremi dei lati

$$\tau_{\underset{n_1}{00\ldots00}},\qquad \tau_{\underset{n_1\quad n_2}{00\ldots0100\ldots00}},\qquad \tau_{\underset{n_1\quad n_2\quad n_3}{00\ldots0100\ldots0100\ldots00}},\ \ldots$$

cioè i primi estremi dei lati

$$\tau_{\underset{n_1}{00\ldots01}},\qquad \tau_{\underset{n_1\quad n_2}{00\ldots0100\ldots01}},\qquad \tau_{\underset{n_1\quad n_2\quad n_3}{00\ldots0100\ldots0100\ldots01}},\ \ldots$$

è chiaro che si può pervenire a μ seguendo la spezzata $AN_1N_2N_3 \ldots$ che proiettata sugli assi darà le coordinate del punto della curva. Si ha

$$AN_1 = \tau_{\underset{n_1}{00\ldots00}} = \mathfrak{z}^{n_1},\quad N_1N_2 = \tau_{\underset{n_1\quad n_2}{00\ldots0100\ldots00}} = \mathfrak{z}^{n_2},\quad N_2N_3 = \tau_{\underset{n_1\quad n_2\quad n_3}{00\ldots0100\ldots0100\ldots00}} = \mathfrak{z}^{n_3},\ \ldots$$

e quanto agli angoli, la (34') con $\varphi_{i_1\ldots i_m} = (-1)^{m-1}\varphi$, diviene

$$\text{ang}\,(x,\ \tau_{i_1 i_2\ldots i_m}) = \varphi \sum_{r=1}^{m} (-1)^{i_r + r - 1}$$

e a calcoli fatti si trova

$$\text{ang}\,(x, AN_1) = 2\varphi.\frac{1-(-1)^{n_1}}{4},\qquad \text{ang}\,(x, N_1N_2) = 2\varphi\left[(-1)^{n_1} + \frac{1-(-1)^{n_2}}{4}\right].$$

Si riconosce con l'induzione che si ha, posto

$$(48)\qquad \mu_r = (-1)^{n_1} + (-1)^{n_2} + \cdots + (-1)^{n_{r-1}} + \frac{1-(-1)^{n_r}}{4},$$

$$\text{ang}\,(x,\ N_{r-1}N_r) = 2\mu_r.\varphi,$$

dopo di che si scrivono subito le espressioni

$$(49)\qquad x = \sum_{r=1}^{\infty} \mathfrak{z}^{n_r} \cos 2\mu_r.\varphi,\qquad y = \sum_{r=1}^{\infty} \mathfrak{z}^{n_r} \operatorname{sen} 2\mu_r\varphi,$$

che si possono chiamare *formule di* CESÀRO *generalizzate,* giacchè per $\mathfrak{z} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\varphi = 30^\circ$,

---

[28]) Si potrebbero invece esprimere f_1 e t_1 per t, indi analogamente f_2 e t_2 per t_1, cioè per, t e così via.

si hanno le formule (della curva di von Koch)

$$x = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{\mu_r \pi}{3}}{(\sqrt{3})^{n_r}}, \qquad y = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{\mu_r \pi}{3}}{(\sqrt{3})^{n_r}},$$

stabilite con metodo differente da quell'insigne matematico.

Sulle curve considerate si possono fare eleganti osservazioni; per es. (come riconobbe il Cesàro per la curva da lui studiata) ai *poli* $t=0{,}010101\ldots$, $t'=1-t=0{,}101010\ldots$ del triangolo ABC, che sono *associati* cioè simmetrici rispetto alla mediana di esso si può giungere percorrendo rispettivamente le spezzate $\tau_0 \tau_{01} \tau_{010} \ldots$, $\tau_1 \tau_{10} \tau_{101} \ldots$, quindi [29]) ognuno dei punti considerati è il polo di una spirale logaritmica in cui è iscritta la relativa spezzata. Evidentemente analoghe proprietà sussistono per un triangolo qualunque della regione $(P_r P_{r+1})$.

§ 12.

Le superficie P.

Con metodi analoghi a quelli fin qui svolti, si possono costruire e studiare infiniti tipi di superficie continue, delle quali accenno solo alla più semplice, analoga alla curva di von Koch.

Preso un triangolo equilatero $P_0 = ABC$ se ne costruisca un altro (simile) che abbia per vertici i punti medii $B_1 C_1 A_1$ dei lati del primo e su di esso dalla parte positiva dello spazio, la piramide regolare $A_1 B_1 C_1 D_1$. Detta Ω l'operazione mediante la quale a P_0 si sostituisce la poliedrale P_1 costituita dai 6 triangoli equilateri eguali

$$AB_1C_1, \quad BC_1A_1, \quad CA_1B_1, \quad A_1B_1D_1, \quad B_1C_1D_1, \quad C_1A_1D_1$$

si ripeta su di essi l'operazione Ω dopo d'aver fissate le facce positive dei rispettivi piani analogamente a quanto si fece per le curve e così via.

Si ottiene una superficie P continua i cui punti mediante successive perpendicolari si possono mettere in corrispondenza biunivoca con i punti del triangolo $ABC = P_0$. La sua *area* e infinita, giacchè è

$$P_0 = 1, \quad P_1 = 2, \quad P_2 = 4, \ldots,$$

mentre il *volume* $(P_0 P) = (P_0 P_1) + (P_1 P_2) + \cdots$ è finito, avendosi

$$(P_0 P_1) = \frac{\sqrt{2}}{42} \left(\frac{AB}{2}\right)^3 = \frac{1}{42} \sqrt[4]{\frac{4}{27}} = s < 1, \quad (P_1 P_2) = s^2, \ldots, (P_0 P) = \frac{s}{1-s}.$$

Quanto al piano tangente esso manca manifestamente nei vertici, giacchè per es. in ogni intorno di A la secante mobile $A\mu'$ giacerà infinite volte nel piano ABC ed

[29]) I lati di ciascuna delle spezzate diminuiscono secondo una progressione geometrica di ragione ς e due consecutivi formano costantemente l'angolo φ.

infinite altre farà con esso lo stesso angolo che fa AD_1; analogamente si vede che manca il piano tangente in ogni punto μ *di seconda specie* (punto limite situato su qualche P_r). Sia μ infine *un punto di terza specie* (punto limite non situato su alcuna poliedrale d'indice finito), definito mediante la spezzata $M M_1 M_2 M_3 \ldots$ incontrante ortogonalmente le facce triangolari

$$ABC,\quad D_1E_1F_1,\quad D_2E_2F_2,\quad D_3E_3F_3, \ldots$$

rispettivamente in M, M_1, M_2, M_3, ... sicchè i punti A, B, C; D_1, E_1, F_1; D_2, E_2, F_2; ... stanno in un intorno di μ che si restringe sempre più. Se supponiamo che si abbia in μ il piano tangente T e proiettiamo su di esso i punti ABC parallelamente ad $M\mu$, i punti $D_1E_1F_1$ parallelamente ad $M_1\mu$, ecc., rispettivamente in A', B', C'; D'_1, E'_1, F'_1; ..., segnata in T una opportuna retta t passante per μ, accadrà infinite volte che delle terne dei punti considerati su T uno stia da una parte e un altro dall'altra di t. Supponendo che siano D'_{r_1}, D'_{r_2}, D'_{r_3}, ... quelli che stanno alla sinistra ed E'_{r_1}, E'_{r_2}, E'_{r_3}, ... quelli che stanno alla destra, il semipiano proiettante D_{r_i} da t deve tendere per $i = \infty$ a coincidere col semipiano per es. positivo di T, mentre il semipiano proiettante E_{r_i} da t deve tendere al semipiano negativo. Le rette D_{r_i}, E_{r_i} debbono tendere quindi a rimanere in uno stesso piano e siccome ciò è impossibile per un punto μ di terza specie resta dimostrato che ***la superficie P considerata non ammette in nessun punto il piano tangente.***

Palermo, agosto 1908.

ANTONIO SELLERIO.

THE EQUATIONS OF BITANGENTIAL CURVES OF THE GENERAL PLANE QUINTIC AND SEXTIC CURVES.

By **Ulysses S. Hanna** (Bloomington, Ind.).

Adunanza del 14 febbrajo 1909.

Introduction.

The problems of determining the number of bitangents to a curve of the n-th order and finding the equation of a bitangential curve of the general plane n-ic curve were studied by Plücker [1]), Jacobi [2]) and Clebsch [3]). They found the number of bitangents to be $\frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)$ and the degree of the equation of the bitangential of the general plane n-ic curve to be $(n-2)(n^2-9)$. Hesse [4]) was the first to publish the equation of a bitangential of the general plane quartic curve. Dersch [5]) and Freyberg [6]) have also published equations of bitangentials of the quartic. Maisano [7]) has given us the equation of a bitangential of the general plane quintic curve. All these writers have followed, in general, the method indicated by Jacobi and Clebsch and have used the so called symbolic notation.

---

1) *Solution d'une question fondamentale concernant la théorie générale des courbes* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, Vol. XII (1834), pp. 105-108]. — *Theorie der algebraischen Curven* (Bonn 1839).

2) *Beweis des Satzes dass eine Curve n^{ten} Grades im Allgemeinen $\frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)$ Doppeltangenten hat* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, Vol. XL (1850), pp. 237-260].

3) *Bemerkung zu* Jacobi's *Beweis für die Anzahl der Doppeltangenten* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, Vol. LXIII (1864), pp. 186-188].

4) *Über Curven dritter Ordnung und die Kegelschnitte, welche diese Curven in drei verschiedenen Puncten berühren* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, Vol. XXXVI (1848), pp. 143-176], p. 156. — *Brief an* Jacobi [Ibid., Vol. XL (1850), p. 260]. — *Über die ganzen homogenen Functionen von der dritten und vierten Ordnung zwischen drei Variabeln* [Ibid., Vol. XLI (1851), pp. 285-292], p. 292.

5) *Doppeltangenten einer Curve n^{ter} Ordnung* [Mathematische Annalen, Vol. VII (1874), pp. 497-511].

6) *Die Gleichung für die Berührungspunkte der Doppeltangenten der Curve 4. Ordnung* [Mathematische Annalen, Vol. XVII (1880), pp. 329-331].

7) *Gleichung der Curve, welche die Berührungspunkte der doppelten Tangenten der allgemeinen Curve des fünften Grades ausschneidet* [Mathematische Annalen, Vol. XXIX (1887), pp. 431-446].

SALMON [8]) and CAYLEY [9]) also have developed methods for finding equations of bitangential curves. They succeeded, however, in applying their theory only in the case of the quartic curve. The results of their endeavors to find equations of bitangential curves of the quintic curve are given by SALMON in « *Higher Plane Curves* ». HEAL [10]) succeeded in completing the work for the equation of a bitangential of the quintic after one of the methods indicated by SALMON, except that the coefficients of his quintic are restricted by one condition that must be imposed. In his work he encounters the square of the hessian of the quintic as an extraneous factor and in the removal of this factor he used a formula which he did not prove. The proof will be given in connection with the case of the quintic in this paper.

We shall work with the equation of the general plane n-ic curve in the symbolic form

$$(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^n = a_x^n = b_x^n = c_x^n = \cdots = 0,$$

and apply the results obtained to the cases $n = 4$ to $n = 8$ inclusive. The method followed will differ very materially from the methods used in the papers cited above and will give us an extraneous factor in each bitangential except that of the quartic. This factor is the $(n-3)(n-4)^{\text{th}}$ power of the hessian of the n-ic. It is easily removed in the cases of the quintic and the sextic and in the case of the septimic I believe it can be removed without much difficulty. In the case of the octic it can be removed but the labor necessary to do it would be very tedious to perform.

§ 1.

General method.

The equation of the general plane n-ic curve written in the form

$$a_x^n = f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 = f_x = 0$$

will permit us to use the abbreviations

$$f_1 = a_x^{n-1} a_1, \quad f_2 = a_x^{n-1} a_2, \quad f_3 = a_x^{n-1} a_3,$$

where f_1, f_2 and f_3 differ from the first derivatives of f_x with respect to x_1, x_2 and x_3 by the factor n. The first polar of $f_x = 0$ with respect to the point y has for its equation

$$a_x^{n-1} a_y = f_1 y_1 + f_2 y_2 + f_3 y_3 = f_y = 0.$$

---

[8]) *On the Double Tangents to Plane Curves* [Philosophical Magazine, 4 Series, Vol. XVI (1858), pp. 318-319].

[9]) *On the Double Tangents of a Plane Curve* [Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Vol. CXLIX (1859), pp. 193-212].

[10]) *The Bitangential of the Quintic* [Annals of Mathematics, Vol. V (1889-1890), pp. 33-41; Vol. VI (1891-1892), pp. 64-68].

We shall also use the notation

$$f_{11} = a_x^{n-2} a_1^2, \quad f_{12} = a_x^{n-2} a_1 a_2, \quad f_{23} = a_x^{n-2} a_2 a_3, \text{ etc.,}$$

for the purpose of finding symbolic expressions for certain covariants that will appear. It will happen in some cases that the numerical coefficients n and $n(n-1)$, encountered in finding the first and second derivatives of f_x, will be retained. This will be indicated in each case so that no confusion will arise.

The point $\lambda x + \mu y$ is any point on the straight line connecting the points x and y. The condition that the point $\lambda x + \mu y$ shall lie upon the n-ic curve, represented by the equation

$$a_x^n = 0$$

is the equation

$$(a_{\lambda x + \mu y})^n = (\lambda a_x + \mu a_y)^n = 0. \tag{1}$$

The conditions that the point x shall be a point on the n-ic curve and that the point y shall be a point on the tangent to the n-ic curve at the point x are the equations

$$f_x = 0, \quad f_y = 0.$$

Assuming these two conditions and at the same time the condition expressed by equation (1), we have the equation

$$\left\{ \begin{aligned} &A_0 \lambda^{n-2} + (n-2) A_1 \lambda^{n-3} \mu + \frac{(n-2)(n-3)}{2!} A_2 \lambda^{n-4} \mu^2 + \cdots \\ &\qquad \cdots + (n-2) A_{n-3} \lambda \mu^{n-3} + A_{n-2} \mu^{n-2} = 0, \end{aligned} \right. \tag{2}$$

where, for brevity, we have put

$$A_0 = \frac{n(n-1)}{1.2} a_x^{n-2} a_y^2, \quad A_1 = \frac{n(n-1)}{2.3} a_x^{n-3} a_y^3, \ldots, A_r = \frac{n(n-1)}{(r+1)(r+2)} a_x^{n-r-2} a_y^{r+2}. \tag{3}$$

The equation (2), as an equation in λ and μ, determines the positions of the point $\lambda x + \mu y$ where the tangent to the n-ic curve at the point x again cuts the n-ic curve. The discriminant of equation (2), placed equal to zero, is the equation of a bitangential curve of the general plane n-ic curve, containing, however, the coordinates of the arbitrary point y as well as the coordinates of the point of bitangency x. If it is possible to remove from the equation the coordinates of this arbitrary point y on the bitangent, or to express them in terms of the coordinates of the point of bitangency x, we shall be able to find the equation sought.

To do this, the point y is assumed to be the intersection of the tangent and an arbitrary line represented by the equations

$$f_y = 0, \quad u_y = 0.$$

We thus have

$$y_i = (f u)_i,$$

where we have put

$$(f u)_1 = f_2 u_3 - f_3 u_2, \text{ etc.}$$

From this result we get

$$a_y = a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 = a_1 (f u)_1 + a_2 (f u)_2 + a_3 (f u)_3 = (a f u) = b_x^{n-1} (a b u). \tag{4}$$

Substituting this determinant for the a_y in the discriminant of the equation (2), our problem becomes that of the removal of the u instead of the y. It has been shown by JACOBI and CLEBSCH that the removal of the u is not impossible in any case.

§ 2.

A departure from the methods of earlier papers.

Instead of forming the discriminant of equation (2) and then attempting to remove the u therefrom, which is the method used in the papers on the quartic and quintic referred to above, we shall first operate on the equation (2) the substitution

$$(S_1)\qquad \begin{cases} \lambda = \lambda_1 - A_1\mu_1 \\ \mu = \qquad A_0\mu_1, \end{cases}$$

the determinant of which is

$$\begin{vmatrix} 1 & -A_1 \\ 0 & A_0 \end{vmatrix} = A_0,$$

and then form the discriminant of the equation thus found, after first having removed the u from each of the coefficients of the new equation separately.

Let us suppose that the equation gotten by this substitution is

$$(5)\qquad \begin{cases} B_0\lambda_1^{n-2} + (n-2)B_1\lambda_1^{n-3}\mu_1 + \dfrac{(n-2)(n-3)}{2!}B_2\lambda_1^{n-4}\mu_1^2 + \cdots \\ \qquad \cdots + (n-2)B_{n-3}\lambda_1\mu_1^{n-3} + B_{n-2}\mu_1^{n-2} = 0. \end{cases}$$

It is evident from the nature of the substitution S_1 that each of the coefficients B in equation (5) contains at least the first power of A_0. For the sake of simplicity we shall assume that this first power of A_0 has been excluded from (5).

We can easily verify the truth of the formula

$$B_r = (-1)^{r-1}\left[(r-1)A_1^r - \frac{r(r-1)}{2!}A_0A_1^{r-1}A_2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}A_0^2A_1^{r-2}A_3 - \cdots\right]$$

for determining any particular coefficient B. This formula, when read in reverse order, is

$$(6)\qquad \begin{cases} \qquad\qquad B_r = A_0^{r-1}A_r - rA_0^{r-2}A_1A_{r-1} \\ + \dfrac{r(r-1)}{2!}A_0^{r-3}A_1^2A_{r-2} - \dfrac{r(r-1)(r-2)}{3!}A_0^{r-4}A_1^3A_{r-3} + \cdots. \end{cases}$$

Now introducing the notation

$$C_r = A_0A_r - A_1A_{r-1}$$

for all positive integral values of $r > 1$, the formula (6) can be written as

$$B_r = A_0^{r-2}C_r - (r-1)A_0^{r-3}A_1C_{r-1} + \frac{(r-1)(r-2)}{2!}A_0^{r-4}A_1^2C_{r-2} - \cdots.$$

This can easily be changed to

$$(7)\quad B_r = A_0^{r-2}C_r - (r-1)A_1B_{r-1} - \frac{(r-1)(r-2)}{2!}A_1^2B_{r-2} - \frac{(r-1)(r-2)(r-3)}{3!}A_1^3B_{r-3} - \cdots,$$

a formula that will greatly facilitate the removal of the u from the coefficients B.

From equations (6) and (7) we see that

$$B_0 = 1, \quad B_1 = 0, \quad B_2 = C_2 = A_0A_2 - A_1^2, \quad B_3 = A_0C_3 - 2A_1B_2, \ldots,$$

from everyone of which it is possible to factor u_x to such a power that the u will no longer be found in the quotients. This will be proved below.

After having removed the u from the required number of coefficients B for any particular n-ic and having substituted the results in the discriminant of the equation (5) for that particular value of n, we shall have, by putting the discriminant equal to zero, the equation of a bitangential curve of any n-ic whatever.

§ 3.

Proof that the u can be removed from any coefficient B.

The removal of the u from the coefficients B is accomplished by the use of the identity

$$v_x(afu) = a_x(vfu) + f_x(avu) + u_x(afv)$$

and a number of modifications of it, which will be collected for reference in number (8).

If, in the equation

$$[\lambda a_x + \mu(afu)]^n = 0,$$

from which equation (2) was obtained, we put

$$\mu = \rho v_x,$$

we shall get the equation

$$[\lambda a_x + \rho v_x(afu)]^n = 0.$$

In this equation we can replace $v_x(afu)$ by the value given for it in the identity above, omitting the second term, since it contains $f_x = 0$. Making this substitution, we get the equation

$$\{[\lambda + \rho(vfu)]a_x + \rho u_x(afv)\}^n = 0,$$

which can be changed to the equation

$$[\lambda' a_x + \mu'(afv)]^n = 0,$$

by use of the substitution

$$(S')\quad \begin{cases} \lambda' = \lambda + \rho(vfu) = \lambda + \dfrac{(vfu)}{v_x}\mu \\ \mu' = \quad \rho u_x \quad = \quad \dfrac{u_x}{v_x}\mu, \end{cases}$$

the determinant of which is

$$\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{(vfu)}{v_x} \\ 0 & \dfrac{u_x}{v_x} \end{vmatrix} = \frac{u_x}{v_x}.$$

This new equation differs from the original in having v in the place of u. The operation of the substitution (S') is equivalent to having the point y take a new position on the tangent $f_y = 0$, determined by the intersection of the tangent and the new line $v_y = 0$. Since the line $u_y = 0$ was arbitrarily chosen in the first place, there can be no objection to this transformation.

We can now put upon the above equation in λ' and μ' the same conditions that were imposed upon the original equation in λ and μ to get equation (2). With these conditions assumed we get the equation

$$(2') \quad \begin{cases} A'_0 \lambda'^{n-2} + (n-2) A'_1 \lambda'^{n-3} \mu' + \dfrac{(n-2)(n-3)}{2!} A'_2 \lambda'^{n-4} \mu'^2 + \cdots \\ \qquad \cdots + (n-2) A'_{n-3} \lambda' \mu'^{n-3} + A'_{n-2} \mu'^{n-2} = 0, \end{cases}$$

where the coefficients A' differ from the coefficients A by having v in the place of u. Now operating on this equation the substitution

$$(S'_1) \qquad \begin{cases} \lambda' = \lambda'_1 - A'_1 \mu'_1 \\ \mu' = \qquad A'_0 \mu'_1, \end{cases}$$

the determinant of which is

$$\begin{vmatrix} 1 & -A'_1 \\ 0 & A'_0 \end{vmatrix} = A'_0,$$

we get the equation

$$(5') \quad \begin{cases} B'_0 \lambda_1'^{n-2} + (n-2) B'_1 \lambda_1'^{n-3} \mu'_1 + \dfrac{(n-2)(n-3)}{2!} B'_2 \lambda_1'^{n-4} \mu_1'^2 + \cdots \\ \qquad \cdots + (n-2) B'_{n-3} \lambda'_1 \mu_1'^{n-3} + B'_{n-2} \mu_1'^{n-2} = 0. \end{cases}$$

Here, the same as in equation (5), if we exclude from each of the coefficients B' the first power of A'_0, we shall have

$$B'_0 = 1, \qquad B'_1 = 0, \qquad B'_2 = A'_0 A'_2 - A_1'^2, \ \ldots$$

the coefficients B' differing from the coefficients B by containing v in the place of u.

It is now possible to transform equation (5') into equation (5) by means of the composite substitution

$$(S_1'^{-1} S' S_1) \qquad \begin{cases} \lambda'_1 = \lambda_1 + \dfrac{A_0 A'_0 (vfu) + A_0 A'_1 u_x - A'_0 A_1 v_x}{A'_0 v_x} \mu_1 \\ \mu'_1 = \qquad \dfrac{A_0 u_x}{A'_0 v_x} \mu_1, \end{cases}$$

the determinant of which is

$$\begin{vmatrix} 1 & A_0 \left[\dfrac{(vfu)}{v_x} + \dfrac{A'_1 u_x}{A'_0 v_x} \right] - A_1 \\ 0 & \dfrac{A_0 u_x}{A'_0 v_x} \end{vmatrix} = \frac{A_0 u_x}{A'_0 v_x}.$$

It will be shown in equation (17) below that A_0 is equal to a constant times the hessian of the n-ic times u_x^2. In the same way it can be shown that the coefficient A'_0 is equal to the same constant times the hessian of the n-ic times v_x^2. Therefore the determinant of the composite substitution which transforms equation (5') into equation (5) is equal to

$$\frac{u_x^3}{v_x^3}.$$

Now, since the coefficients B and B' are seminvariants, posessing the property of invariants for substitutions such as the composite substitution above, we have the equation

$$B_r = \frac{u_x^{3r}}{v_x^{3r}} B'_r.$$

In this equation the subscript r is also the exponent of the power of the determinant involved in each pair of corresponding coefficients, as may be seen by referring to equation (7) and as will appear more clearly in the work below. We thus have the equation

$$\frac{B_r}{u_x^{3r}} = \frac{B'_r}{v_x^{3r}},$$

which proves that the u can be removed from the coefficients B separately.

§ 4.

An extraneous factor.

We thus have a method of developing the equation of a bitangential curve of the general plane n-ic curve which avoids the difficulty of having to remove the u from the discriminant of equation (2) as a whole. While in this particular we gain by the operation of the substitution S_1 on the equation (2), we thereby introduce an extraneous factor into the equation of the bitangential curve. The difficulty of its removal is small, however, when compared to the difficulty of the removal of the u from the discriminant of equation (2) without making use of the substitution S_1, as can be seen by comparing the work below for the quintic whith the work as given by Maisano.

By the operation of the substitution S_1 on equation (2) in getting equation (5), the discriminant of equation (2) is made to differ from the discriminant of equation (5) by the $(n-2)(n-3)^{\text{th}}$ power of the determinant of the S_1, or A_0. But it will be remembered that we excluded an A_0 from each one of the coefficients B and therefore the discriminant of equation (5) will contain only the $(n-3)(n-4)^{\text{th}}$ power of the determinant A_0. It is thus seen that there is no extraneous factor in the equation of the bitangential curve of the general plane quartic curve gotten in this way. From the equation of the bitangential of the quintic thus gotten the square of the hessian of the quintic will have to be removed, from that of the sextic the sixth power of the

hessian will have to be removed, from that of the septimic the twelfth power and from that of the octic the twentieth power.

§ 5.

Formulae and covariants to be used.

We shall now develop some formulae for use in the removal of the u from the several coefficients B and for the removal of these extraneous factors. We shall encounter a large number of forms, the number increasing with the increasing value of n, and it is necessary that we adopt as short a notation for them as possible and collect them for reference.

The identity used in § 3 is the basis of all operations used in the various steps in removing the u and in removing the extraneous factors. It and a number of modifications of itself are here collected for reference. They are

$$(8)\quad \begin{cases} \alpha_x(abc) = a_x(\alpha bc) + b_x(\alpha ca) + c_x(\alpha ab) \quad . \quad . \quad . \quad A \\ (\alpha ab)(\alpha bc)a_x = \frac{1}{2}(\alpha ab)[a_x(\alpha bc) + b_x(\alpha ca)] \\ \qquad = \frac{1}{2}(\alpha ab)[\alpha_x(abc) - c_x(\alpha ab)] \quad . \quad . \quad . \quad B \\ (abc)(\alpha bc)a_x = \frac{1}{3}(abc)[a_x(\alpha bc) + b_x(\alpha ca) + c_x(\alpha ab)] \\ \qquad = \frac{1}{3}(abc)^2\alpha_x \quad . \quad . \quad . \quad C \\ (\alpha bc)(\alpha ad) + (\alpha ca)(\alpha bd) + (\alpha ab)(\alpha cd) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad D \\ (\beta\gamma a)(\alpha bc) + (\beta\gamma b)(\alpha ca) + (\beta\gamma c)(\alpha ab) = (\alpha\beta\gamma)(abc) \quad . \quad . \quad E. \end{cases}$$

For the purpose of abbreviation we shall put

$$a_x^{n-2} b_x^{n-2}(abu)^2 = u_\sigma^2$$
$$b_x^{n-2} c_x^{n-2}(abc)(bcu) = a_\sigma u_\sigma,$$

from which we get the formulae

$$(9)\quad \begin{cases} (a_\sigma u_\sigma)^2 = a_\sigma^2 u_\sigma^2 - \frac{2}{3}\Delta\, b_x^{n-2}(abu)^2 \\ (a_\sigma u_\sigma)(b_\sigma u_\sigma) = (a_\sigma b_\sigma)u_\sigma^2 - \frac{2}{3}\Delta\, c_x^{n-2}(acu)(bcu), \end{cases}$$

where we put

$$\Delta = (abc)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2} c_x^{n-2},$$

the Δ being the hessian of the n-ic, except for a constant factor, as will be shown in equation (11) below. We shall also put

$$\alpha_x^{3n-8}\beta_x^{3n-8}(\alpha\beta u)^2 = u_\omega^2$$
$$\alpha_x^{3n-8}\beta_x^{3n-8}(\alpha\beta f)(\alpha\beta u) = (f_\omega u_\omega).$$

By reference to equation (4) we have

$$a_y b_y = (afu)(bfu) = c_x^{n-2} d_x^{n-2}[c_x d_x(acu)(bdu)].$$

Interchanging c and d and adding the result to the above expression for $a_y b_y$ and dividing by 2, we have

$$a_y b_y = -\tfrac{1}{2} c_x^{n-2} d_x^{n-2} [-c_x d_x (acu)(bdu) - c_x d_x (adu)(bcu)].$$

Adding two terms to this second member, each of which contains $f_x = 0$, we have

$$\begin{aligned} a_y b_y &= -\tfrac{1}{2} c_x^{n-2} d_x^{n-2} [c_x^2 (adu)(bdu) - c_x d_x (acu)(bdu) - c_x d_x (adu)(bcu) + d_x^2 (acu)(bcu)] \\ &= -\tfrac{1}{2} c_x^{n-2} d_x^{n-2} [c_x (adu) - d_x (acu)] [c_x (bdu) - d_x (bcu)] \\ &= -\tfrac{1}{2} c_x^{n-2} d_x^{n-2} [a_x (cdu) - (acd) u_x] [b_x (cdu) - (bcd) u_x] \\ &= -\tfrac{1}{2} [a_x b_x u_\sigma^2 - a_x (b_\sigma u_\sigma) u_x - b_x (a_\sigma u_\sigma) u_x + (a_\sigma b_\sigma) u_x^2], \end{aligned}$$

first by factoring, then making use of $(8B)$ on each factor and finally multiplying the factors and using the abbreviations adopted above. If we replace b by a throughout this formula, we get another formula that will be frequently used. The two are written for reference as

$$(10) \qquad \begin{cases} a_y^2 = -\tfrac{1}{2} [a_x^2 u_\sigma^2 - 2 a_x (a_\sigma u_\sigma) u_x + a_\sigma^2 u_x^2] \\ a_y b_y = -\tfrac{1}{2} [a_x b_x u_\sigma^2 - a_x (b_\sigma u_\sigma) u_x - b_x (a_\sigma u_\sigma) u_x + (a_\sigma b_\sigma) u_x^2]. \end{cases}$$

The formulae given in numbers (8), (9) and (10) will be used where the letters are quite different from those involved as they are written above, as in the case

$$(\Delta a f)(\Delta b f) = -\tfrac{1}{2} [a_x b_x \Delta_\sigma^2 - \Delta a_x (\Delta_\sigma b_\sigma) - \Delta b_x (\Delta_\sigma a_\sigma) + \Delta^2 (a_\sigma b_\sigma)].$$

For the hessian of the n-ic curve we have

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^3(n-1)^3} \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} &= a_x^{n-2} b_x^{n-2} c_x^{n-2} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} a_1 b_2 c_3 = a_x^{n-2} b_x^{n-2} c_x^{n-2} (abc) a_1 b_2 c_3 \\ &= \tfrac{1}{2} a_x^{n-2} b_x^{n-2} c_x^{n-2} (abc)(b_2 c_3 - b_3 c_2) a_1 \\ &= \tfrac{1}{6} a_x^{n-2} b_x^{n-2} c_x^{n-2} (abc) [a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) + b_1 (c_2 a_3 - c_3 a_2) + c_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2)] \\ &= \tfrac{1}{6} a_x^{n-2} b_x^{n-2} c_x^{n-2} (abc)^2 = \tfrac{1}{6} a_x^{n-2} a_\sigma^2 = \tfrac{1}{6} \Delta. \end{aligned}$$

For reference we shall put

$$(11) \qquad a_x^{n-2} b_x^{n-2} c_x^{n-2} (abc)^2 = a_x^{n-2} a_\sigma^2 = \alpha_x^{3n-6} = \beta_x^{3n-6} = \gamma_x^{3n-6} = \cdots = \Delta,$$

with the understanding that Δ and the letters α, β, γ, δ will be reserved for the representation of the hessian of the n-ic, the letter Δ to be used in the same relation to the others that f is used in relation to the letters a, b, c, d, etc., for the n-ic.

In the development of a symbolic representation for the covariant

$$\Theta = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & \Delta_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & \Delta_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & \Delta_3 \\ \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \\ \Delta \end{bmatrix},$$

it will be necessary to supply the numerical coefficient $n(n-1)$ which belongs with

each f_{ij} and the coefficient $\frac{1}{2}n^3(n-1)^3(n-2)$ which belongs with each Δ_i. We thus have

$$\frac{-4}{n^8(n-1)^8(n-2)^2}\Theta = a_x^{n-2}b_x^{n-2}(\Delta ab)(\Delta_1 a_2 b_3 - \Delta_2 a_1 b_3 + \Delta_3 a_1 b_2)$$
$$= \frac{1}{2}a_x^{n-2}b_x^{n-2}(\Delta ab)[\Delta_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) - \Delta_2(a_1 b_3 - a_3 b_1) + \Delta_3(a_1 b_2 - a_2 b_1)]$$
$$= \frac{1}{2}a_x^{n-2}b_x^{n-2}(\Delta ab)^2 = \frac{1}{2}\Delta_\sigma^2 = \frac{1}{2}\theta$$

whence we can write

$$(12) \qquad -\frac{8}{n^8(n-1)^8(n-2)^2}\Theta = a_x^{n-2}b_x^{n-2}(\Delta a b)^2 = \Delta_\sigma^2 = \theta.$$

The symbolic representation for the covariant

$$\Phi = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 \end{vmatrix} \Delta = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_x \end{bmatrix} \Delta$$

can be gotten from the equation (12) by replacing

$$\frac{n^6(n-1)^6(n-2)^2}{4}\Delta_1^2 \quad \text{with} \quad \frac{n^3(n-1)^3(n-2)(3n-7)}{2}\Delta_{11},$$
$$\frac{n^6(n-1)^6(n-2)^2}{4}\Delta_1\Delta_2 \quad \text{with} \quad \frac{n^3(n-1)^3(n-2)(3n-7)}{2}\Delta_{12},$$

and so on for all the combinations of the first derivatives. We thus get

$$(13) \qquad \begin{cases} -\dfrac{4}{n^5(n-1)^5(n-2)(3n-7)}\Phi = \alpha_x^{3n-8}a_x^{n-2}b_x^{n-2}(\alpha a b)^2 \\ \qquad = \alpha_x^{3n-8}\alpha_\sigma^2 = \varphi' = \dfrac{n-3}{3n-7}\varphi, \end{cases}$$

where we have put

$$\varphi = a_x^{n-4}(a_\sigma^2)^2 = a_x^{n-4}b_x^{n-2}c_x^{n-2}d_x^{n-2}e_x^{n-2}(a b c)^2(a d e)^2.$$

Taking the first polar of the hessian of the n-ic

$$\Delta = \alpha_x^{3n-6} = (a b c)^2 a_x^{n-2}b_x^{n-2}c_x^{n-2} = a_x^{n-2}a_\sigma^2,$$

with respect to the point y, we get

$$\Delta_y = \alpha_x^{3n-7}\alpha_y = (a b c)^2 a_x^{n-3}b_x^{n-2}c_x^{n-2}a_y = a_x^{n-3}a_\sigma^2 a_y.$$

Here the subscripts y may be replaced by determinants of the second order and the formula thus gotten be used for purposes of abbreviation. For instance we may put

$$(\Delta_\sigma f_\sigma) = a_x^{n-3}a_\sigma^2(a_\sigma f_\sigma).$$

Taking the second polar of the hessian with respect to the point y, we get

$$(3n-7)\alpha_x^{3n-8}\alpha_y^2 = (n-3)a_x^{n-4}a_\sigma^2 a_y^2 + 2(n-2)(abc)^2 a_x^{n-3}b_x^{n-3}c_x^{n-2}a_y b_y,$$

from which, by making the substitution

$$y_i = d_x^{n-2}e_x^{n-2}(de)_i,$$

we get the equation

$$(3n-7)\alpha_x^{3n-8}\alpha_\sigma^2 = (n-3)a_x^{n-4}(a_\sigma^2)^2 + 2(n-2)(abc)^2 a_x^{n-3}b_x^{n-3}c_x^{n-2}(a_\sigma b_\sigma),$$

where the last term contains $f_x = 0$, as we shall prove immediately. With the proof of this fact we shall have established the truth of the last equality in equation (13).

To prove that the term

$$(abc)^2(ade)(bde)a_x^{n-3}b_x^{n-3}c_x^{n-2}d_x^{n-2}e_x^{n-2}$$

contains the factor f_x, we start with the equation

$$(abc)(bcd)(ade)[b_x(cad)+c_x(abd)]a_x^{n-3}b_x^{n-3}c_x^{n-3}d_x^{n-3}e_x^{n-1} = 0,$$

which is seen to be true by interchanging b and c in either of the terms. In the first term we replace $b_x(ade)$, by the use of ($8A$), and we get the equation

$$(abc)(bcd)(cad)[a_x(bde) + d_x(abe) - e_x(abd)]a_x^{n-3}b_x^{n-3}c_x^{n-3}d_x^{n-3}e_x^{n-1}$$
$$+ (abc)(bcd)(ade)(abd)a_x^{n-3}b_x^{n-3}c_x^{n-2}d_x^{n-3}e_x^{n-1} = 0,$$

the third term of which contains f_x and can therefore be neglected. In the first term interchange a and d and in the last term interchange first c and d and then b and c. The two terms thus gotten for the first and last terms are alike and they are also like the second term. We thus have the equation

$$3(abc)(bcd)(abe)(cad)a_x^{n-3}b_x^{n-3}c_x^{n-3}d_x^{n-2}e_x^{n-1} = 0.$$

Now, by the use of ($8A$), we replace $e_x(abc)$ and get the equation

$$3(bcd)(abe)(cad)[a_x(bce) + b_x(cae) + c_x(abe)]a_x^{n-3}b_x^{n-3}c_x^{n-3}d_x^{n-2}e_x^{n-2} = 0,$$

the last term of which is the form desired and the first two terms of which are alike if we interchange a and b in either of them. Taking the first term and adding to itself what it becomes by interchanging a and d, we get the equivalent of the first two terms. They are

$$3(bcd)(cad)[(abe)(bcd) + (abc)(bde)]a_x^{n-2}b_x^{n-3}c_x^{n-3}d_x^{n-2}e_x^{n-2},$$

which, by use of ($8D$), becomes

$$3(bce)^2(cad)(abd)a_x^{n-2}b_x^{n-3}c_x^{n-3}d_x^{n-2}e_x^{n-2},$$

an expression like the term sought by properly interchanging the letters. We have then

as a result

$$(abc)^2(a_\sigma b_\sigma)a_x^{n-3}b_x^{n-3}c_x^{n-2} = \frac{1}{6}(abc)(bcd)(abd)(acd)a_x^{n-3}b_x^{n-3}c_x^{n-3}d_x^{n-3}e_x^n = 0,$$

and the last equality in number (13) is established.

We shall frequently find the covariant gotten by bordering the matrix of the hessian of the hessian of the n-ic with the first derivatives of the n-ic. It is the form gotten by interchanging f and Δ in the determinant expression for Θ and is put in the symbolic form as follows:

$$\frac{-4}{n^8(n-1)^8(n-2)^2(3n-7)^2}\begin{vmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} & f_1 \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} & f_2 \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} & f_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \alpha_x^{3n-8}\beta_x^{3n-8}(\alpha\beta f)(f_1\alpha_2\beta_3 - f_2\alpha_1\beta_3 + f_3\alpha_1\beta_2)$$

$$= \frac{1}{2}\alpha_x^{3n-8}\beta_x^{3n-8}(\alpha\beta f)[f_1(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2) - f_2(\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_2) + f_3(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)]$$

$$= \frac{1}{2}\alpha_x^{3n-8}\beta_x^{3n-8}(\alpha\beta f)^2 = \frac{1}{2}f_\omega^2.$$

By equations (10), (12) and (13), we have

$$(14) \qquad f_\omega^2 = \theta - \Delta\varphi'.$$

If, in the first member of equation (14), we replace f_1^2 with f_{11}, replace $f_1 f_2$ with f_{12} and so on throughout the expression for the square of the determinant, we shall get a symbolic representation for the covariant

$$\Psi = \begin{vmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 \end{vmatrix} f.$$

Making these substitutions, remembering to supply the proper numerical coefficients, we get

$$(15) \quad \frac{-8}{n^7(n-1)^7(n-2)^2(3n-7)^2}\Psi = \alpha_x^{3n-8}\beta_x^{3n-8}a_x^{n-2}(\alpha\beta a)^2 = a_x^{n-2}a_\omega^2 = \psi.$$

In addition to the covariants given in equations (11), (12), (13), (14) and (15), we shall give in number (16) a list of abbreviations for the forms that will appear in the work following. The forms given at the last of the list, represented by the letters Σ are those that appear only in the case of the octic. The equation of the bitangential of the octic contains most of the other forms also. Those represented by the letters Π make their appearance first in the case of the septimic. The form represented by Λ is the only one appearing in the case of the sextic which does not also occur in the case of the quintic. Some of these forms may possibly contain $f_x = 0$.

$$
(16)\left\{\begin{array}{ll}
\Delta_\Delta = \alpha_x^{3n-8}\alpha_\omega^2 = \alpha_x^{3n-8}\beta_x^{3n-8}\gamma_x^{3n-8}(\alpha\beta\gamma)^2, & \Gamma_1 = a_x^{n-5}(a_\sigma^2)^2(\Delta_\sigma a_\sigma), \\
\xi = a_x^{n-5}(a_\sigma^2)^2(\Delta a f), \quad \varepsilon = a_x^{n-6}(a_\sigma^2)^3, & \Gamma_2 = \alpha_x^{3n-8} a_x^{n-3} b_x^{n-2}(\Delta_\sigma a_\sigma)(\alpha a b)^2, \\
\eta = a_x^{n-3} b_x^{n-2}(\Delta a b)^2(\Delta a f), & \Pi_1 = a_x^{n-7}(a_\sigma^2)^3(\Delta a f), \\
\zeta = a_x^{n-4} a_\sigma^2(\Delta_\sigma a_\sigma)(\Delta a f), & \Pi_2 = a_x^{n-5} b_x^{n-2} a_\sigma^2(\Delta a b)^2(\Delta a f), \\
\Upsilon_1 = a_x^{n-5} b_x^{n-5}(a_\sigma^2)^2(b_\sigma^2)^2(a_\sigma b_\sigma), & \Pi_3 = a_x^{n-6}(a_\sigma^2)^2(\Delta_\sigma a_\sigma)(\Delta a f), \\
\Upsilon_2 = a_x^{n-5} b_x^{n-4} c_x^{n-2}(a_\sigma^2)^2 b_\sigma^2(a b c)(\Delta b c), & \Pi_4 = \alpha_x^{3n-8} a_x^{n-3} b_x^{n-2}(\alpha a b)^2(\Delta a f), \\
\Omega_1 = \alpha_x^{3n-8} a_x^{n-4} b_x^{n-2} a_\sigma^2(\alpha a b)^2, & \Pi_5 = \alpha_x^{3n-8} a_x^{n-4} a_\sigma^2(\alpha_\sigma a_\sigma)(\alpha a f), \\
\Omega_2 = a_x^{n-5} b_x^{n-3} c_x^{n-2}(a_\sigma^2)^2(a_\sigma b_\sigma)(\Delta b c)^2, & \Pi_6 = a_x^{n-4} b_x^{n-2}(\Delta_\sigma a_\sigma)(\Delta a b)^2(\Delta a f), \\
\Omega_3 = \alpha_x^{3n-8} a_x^{n-3} b_x^{n-3} c_x^{n-2} d_x^{n-2}(a_\sigma b_\sigma)(\alpha b d)^2(\Delta a c)^2, & \Sigma_1 = a_x^{n-8}(a_\sigma^2)^4, \\
\Omega_4 = a_x^{n-3} b_x^{n-2}(a_\omega f_\omega)(\Delta a b)^2, & \Sigma_2 = a_x^{n-7}(a_\sigma^2)^3(\Delta_\sigma a_\sigma), \\
\Omega_5 = a_x^{n-4} b_x^{n-3} c_x^{n-2} d_x^{n-2} a_\sigma^2(a b d)(\Delta a d)(\Delta b c)^2, & \Sigma_3 = a_x^{n-6} b_x^{n-2}(a_\sigma^2)^2(\Delta a b), \\
\Omega_6 = a_x^{n-4} b_x^{n-4} c_x^{n-2} a_\sigma^2 b_\sigma^2(\Delta_\sigma a_\sigma)(a b c)(\Delta b c), & \Sigma_4 = a_x^{n-4} b_x^{n-2} c_x^{n-2}(\Delta a b)^2(\Delta a c)^2, \\
\Lambda = a_x^{n-3} a_\omega^2(\Delta_\sigma a_\sigma), & \Sigma_5 = a_x^{n-5} b_x^{n-2} a_\sigma^2(\Delta_\sigma a_\sigma)(\Delta a b)^2.
\end{array}\right.
$$

§ 6.

Reduction of the expressions for A_0, A_1 and C_r.

By reference to the form for B_r given in equation (7), we see that we must reduce the expressions for A_0, A_1 and C_r so that the u contained in each will be given explicitly in terms of u_x as far as possible. From equations (3) and (10) we have

$$A_0 = \frac{n(n-1)}{2} a_x^{n-2} a_y^2 = -\frac{n(n-1)}{4} a_x^{n-2}[a_x^2 u_\sigma^2 - 2a_x(a_\sigma u_\sigma)u_x + a_\sigma^2 u_x^2],$$

the first term of which contains $f_x = 0$ and the second of which, by (8 C), is equal to

$$-\tfrac{2}{3} a_x^{n-2} a_\sigma^2 u_x^2.$$

We thus have, by (11),

$$A_0 = -\frac{n(n-1)}{2^2.3} a_x^{n-2} a_\sigma^2 u_x^2 = -\frac{n(n-1)}{2^2.3}\Delta u_x^2. \tag{17}$$

Similarly, we have

$$A_1 = -\frac{n(n-1)}{2^2.3} a_x^{n-3} a_y [a_x^2 u_\sigma^2 - 2a_x(a_\sigma u_\sigma)u_x + a_\sigma^2 u_x^2],$$

the first term of which contains $f_y = 0$ and the second of which, by (8 C), contains $u_y = 0$. We thus have

$$A_1 = -\frac{n(n-1)}{2^2.3} a_x^{n-3} a_\sigma^2 a_y u_x^2 = -\frac{n(n-1)}{2^2.3}\Delta_y u_x^2. \tag{18}$$

From equations (3), (17) and (18) we get

$$C_r = A_0 A_r - A_1 A_{r-1} = -\frac{n^2(n-1)^2}{2^2.3\, r(r+1)(r+2)} a_x^{n-r-2} a_y^{r+1} [r \Delta a_y + (r+2) a_x \Delta_y],$$

the development of which will be made in two parts, one with r an even number and the other with r taken as an odd number. Supposing that $r = 2t$, we have

$$(19) \left\{ \begin{aligned} C_{2t} = \frac{(-1)^{t+1} n^2(n-1)^2}{2^{t+4}.3t(t+1)(2t+1)} a_x^{n-2t-2} [a_x^2 u_\sigma^2 - 2a_x(a_\sigma u_\sigma) u_x + a_\sigma^2 u_x^2]^t \times \\ \times [\Delta a_x^2 u_\sigma^2 + (t-1) \Delta a_x (a_\sigma u_\sigma) u_x - (t+1) a_x^2 (\Delta_\sigma u_\sigma) u_x - t \Delta a_\sigma^2 u_x^2 + (t+1) a_x (\Delta_\sigma a_\sigma) u_x^2] u_x^2; \end{aligned} \right.$$

and supposing that $r = 2t - 1$, we have

$$(20) \left\{ \begin{aligned} C_{2t-1} = \frac{(-1)^{t+1} n^2(n-1)^2}{2^{t+3}.3t(2t-1)(2t+1)} a_x^{n-2t-1} [a_x^2 u_\sigma^2 - 2 a_x (a_\sigma u_\sigma) u_x + a_\sigma^2 u_x^2]^t \times \\ \times [(2t-1) \Delta a_y - (2t+1) a_x \Delta_y] u_x^2. \end{aligned} \right.$$

Since C_r is equal to zero for $r = 1$ and has no meaning for $r < 1$, we shall restrict t to positive integral values not less than 1 in equation (19) and not less than 2 in equation (20).

Making $t = 1$ in equation (19), multiplying and omitting the two terms in the product which contain $f_x = 0$ and the two terms that are alike and opposite in sign, we have

$$C_2 = \frac{n^2(n-1)^2}{2^6.3^2} [-2 \Delta a_x^{n-1} (a_\sigma u_\sigma) u_\sigma^2 u_x + 2 a_x^{n-1} (\Delta_\sigma a_\sigma) u_\sigma^2 u_x^2 + 4 a_x^{n-1} (a_\sigma u_\sigma)(\Delta_\sigma u_\sigma) u_x^2$$
$$-2 a_x^{n-2} a_\sigma^2 (\Delta_\sigma u_\sigma) u_x^2 + 2 \Delta a_x^{n-3} a_\sigma^2 (a_\sigma u_\sigma) u_x^3 - 4 a_x^{n-2} (\Delta_\sigma a_\sigma)(a_\sigma u_\sigma) u_x^3 - \Delta \varphi u_x^4 + 2 \theta u_x^4] u_x^2.$$

In this expression for C_2 the first and second terms cancel, by using (8 C) on each term, the third and sixth terms cancel, by using (8 C) on each term, the fourth and fifth terms cancel and we have

$$(21) \qquad B_2 = C_2 = \frac{n^2(n-1)^2}{2^6.3^2} [2\theta - \Delta \varphi] u_x^6 = \frac{n^2(n-1)^2}{2^6.3^2} H u_x^6,$$

where we have put

$$H = 2\theta - \Delta \varphi.$$

Now making $n = 4$ and equating the discriminant of equation (5) to zero, we have for the equation of a bitangential curve of the general plane quartic curve the equation

$$H = 0,$$

from which, by use of the equations (11), (12) and (13), we get the well known form

$$\Theta - 3 \Delta \Phi = 0,$$

as given by SALMON in « *Higher Plane Curves* ».

§ 7.

The equation of a bitangential of the quintic.

Proceeding to the development of the equation of a bitangential of the quintic, we must first find an expression for B_3 with the u removed from it. From equation (7) we have

$$B_3 = A_0 C_3 - 2 A_1 B_2,$$

where the value of C_3 must be obtained from equation (20) by making $t = 2$, squaring and multiplying as there indicated. Doing this and making use of equation (9) in one of the terms and cancelling, we have

$$A_0 C_3 = \frac{n^3(n-1)^3}{2^8.3^3.5}[8\Delta^2\Delta_y u_\sigma^2 - 8\Delta^3 a_x^{n-3} b_x^{n-2}(abu)^2 a_y + 20\Delta(\Delta_\sigma u_\sigma)\Delta_y u_x$$
$$- 12\Delta^2 a_x^{n-4} a_\sigma^2 (a_\sigma u_\sigma) a_y u_x + 3\Delta^2 a_x^{n-5}(a_\sigma^2)^2 a_y u_x^2 - 5\Delta\varphi\Delta_y u_x^2] u_x^6.$$

The first two terms within the braces in this expression for $A_0 C_3$ are equal to

$$8\Delta^2\Delta_y u_\sigma^2 - 8\Delta^2 a_x^{n-3} b_x^{n-2}[a_x\Delta_y + (\Delta a f) u_x](abu)^2,$$

the first two terms of which cancel. Denoting the other term by T, for convenience, we have

$$T = -8\Delta a_x^{n-3} b_x^{n-2}(\Delta a f)[(\Delta a b)u_x + a_x(\Delta b u) - b_x(\Delta a u)](abu)u_x = T_1 + T_2 + T_3.$$

Proceeding with these terms separately, we have

$$T_1 = -8\Delta a_x^{n-3} b_x^{n-2}(\Delta a b)[(\Delta a b) a_y + (abf)(\Delta a u)] u_x^2,$$

the first term of which will be left unchanged and the second term of which is equal to

$$-8 a_x^{n-3} b_x^{n-2}(\Delta a b)[a_x(\Delta b f) - b_x(\Delta a f)](\Delta a u) u_x^2,$$

which in turn is equal to

$$4\theta\Delta_y u_x^2 - 4 a_x^{n-3}[a_x^2\theta - 2\Delta a_x(\Delta_\sigma a_\sigma) + \Delta^2 a_\sigma^2](\Delta a u) u_x^2.$$

Here the first two terms cancel and the last two contain $(\Delta\Delta u) = 0$, whence we have

$$T_1 = -8\Delta a_x^{n-3} b_x^{n-2}(\Delta a b)^2 a_y u_x^2.$$

For the second term in T above we have

$$T_2 = -8\Delta a_x^{n-2} b_x^{n-2}(\Delta a f)(\Delta b u)(abu) u_x$$
$$= -4\Delta a_x^{n-2} b_x^{n-2}[(\Delta\Delta f)(abu) + (\Delta a b)\Delta_y](abu) u_x,$$

the first term of which is zero, thus making

$$T_2 = -4\Delta(\Delta_\sigma u_\sigma)\Delta_y u_x.$$

For the third term in T we have

$$T_3 = 8\Delta a_x^{n-3}(\Delta a f)(\Delta a u) a_y u_x$$
$$= -4\Delta a_x^{n-3}[a_x^2(\Delta_\sigma u_\sigma) - \Delta a_x(a_\sigma u_\sigma) - a_x(\Delta_\sigma a_\sigma) u_x + \Delta a_\sigma^2 u_x](\Delta a u) u_x,$$

the second term of which contains $(\Delta u u) = 0$ and each of the last two terms of which contains $(\Delta \Delta u) = 0$. We thus have

$$T_3 = -4\Delta(\Delta_\sigma u_\sigma)\Delta_y u_x.$$

Collecting, we get for the first two terms in $A_0 C_3$,

$$T = -8\Delta(\Delta_\sigma u_\sigma)\Delta_y u_x - 8\Delta a_x^{n-3} b_x^{n-2} (\Delta a b)^2 a_y u_x^2.$$

The fourth term in $A_0 C_3$ is equal to

$$-12\Delta a_x^{n-4} a_\sigma^2 [a_x \Delta_y + (\Delta a f) u_x](a_\sigma u_\sigma) u_x$$

$$= -12\Delta(\Delta_\sigma u_\sigma)\Delta_y u_x - 12\Delta a_x^{n-4} a_\sigma^2 a_\sigma [\Delta_\sigma a_y - a_\sigma \Delta_y + f_\sigma (\Delta a u)] u_x^2,$$

the last term of which contains $(\Delta \Delta u) = 0$. Adding the other three terms to the terms gotten for T, and replacing the first, second and fourth terms in $A_0 C_3$ with their sum, we get

$$A_0 C_3 = \frac{n^3(n-1)^3}{2^8 . 3^3 . 5} \left\{ \begin{matrix} 3\Delta a_x^{n-5} (a_\sigma^2)^2 - 8 a_x^{n-3} b_x^{n-2} (\Delta a b)^2 \\ -12 a_x^{n-4} a_\sigma^2 (\Delta_\sigma a_\sigma) + 7\varphi a_x^{n-3} a_\sigma^2 \end{matrix} \right\} \Delta a_y u_x^6.$$

Now putting

$$\Delta a_y = a_x \Delta_y + (\Delta a f) u_x$$

and multiplying, we have

$$A_0 C_3 = \frac{n^3(n-1)^3}{2^8 . 3^3 . 5} (G u_x - 10 H \Delta_y) u_x^8, \tag{22}$$

where we have put

$$\begin{cases} G = \Delta G_0 + G_1 \\ G_0 = 3\xi \\ G_1 = -8\eta - 12\zeta. \end{cases} \tag{23}$$

From equations (18) and (21) we have for the second term in B_3 the equation

$$-2 A_1 B_2 = \frac{n^3(n-1)^3}{2^7 . 3^3} H \Delta_y u_x^8.$$

Now making substitutions for the two terms in B_3, we get

$$B_3 = \frac{n^3(n-1)^3}{2^8 . 3^3 . 5} G u_x^9. \tag{24}$$

Putting $n = 5$ in equation (5) and equating the discriminant to zero, we have

$$B_3^2 + 4 B_2^3 = 0.$$

Substituting for B_2 and B_3 the forms given for them in equations (21) and (24), we have for the equation of a bitangential curve of the general plane quintic curve the equation

$$G^2 + 25 H^3 = 0. \tag{25}$$

§ 8.

Removal of the extraneous factor Δ^2.

In order to remove the extraneous factor Δ^2 from the equation of the bitangential of the quintic as given in equation (25), we have from equation (23) the equation

$$G^2 = (\Delta G_0 + G_1)^2 = \Delta^2 G_0^2 + 2\Delta G_0 G_1 + G_1^2,$$

the three terms of which will have to be reduced. From equations (16) we have

$$G_0^2 = 9\xi^2 = 9\, a_x^{n-5} b_x^{n-5} (a_\sigma^2)^2 (b_\sigma^2)^2 (\Delta a f)(\Delta b f)$$
$$= 9\, \alpha_x^{3n-8} a_x^{n-5} b_x^{n-5} (a_\sigma^2)^2 (b_\sigma^2)^2 (\alpha a f)[\Delta (\alpha b f) + b_x (\Delta \alpha f)]$$
$$= -\tfrac{9}{2} \Delta\, \alpha_x^{3n-8} a_x^{n-5} b_x^{n-5} (a_\sigma^2)^2 (b_\sigma^2)^2 [\alpha_x^2 (a_\sigma b_\sigma) - 2\, \alpha_x b_x (\alpha_\sigma a_\sigma) + a_x b_x \alpha_\sigma^2]$$
$$- \tfrac{9}{2} \varphi\, \alpha_x^{3n-8} \beta_x^{3n-8} a_x^{n-5} (a_\sigma^2)^2 (\alpha \beta f)[a_x (\alpha \beta f) - f_x (\alpha \beta a)],$$

$$\Delta^2 G_0^2 = -\tfrac{9}{2} \Delta^2 \varphi^2 \theta + 9 \Delta^3 \varphi \Gamma_1 - \tfrac{9}{2} \Delta^4 \Upsilon_1 .$$

Proceeding in the same way with the other terms in G^2 and adding results, we get

$$(26) \qquad G^2 = \left\{ \begin{array}{l} -200\theta^3 + 300 \Delta \varphi \theta^2 - \frac{225}{2} \Delta^2 \varphi^2 \theta \\ -20 \Delta^2 \theta \Gamma + 15 \Delta^3 \varphi \Gamma + 8 \Delta^3 \Omega + \Delta^4 \Upsilon \end{array} \right\},$$

where we have put

$$(27) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \Gamma = 3 \Gamma_1 - 8 \Gamma_2 \\ \Upsilon = 72 \varphi \Omega_1 - \frac{9}{2} \Upsilon_1 - 24 \Upsilon_2 - 16 \varphi \psi \\ \Omega = \frac{22}{3} \theta \psi - 20 \theta \Omega_1 + 3 \Omega_2 - 4 \Omega_3 - \frac{4}{3} \Omega_4 - 8 \Omega_5 + 6 \Omega_6 . \end{array} \right.$$

From equation (21) we get

$$25 H^3 = 200 \theta^3 - 300 \Delta \varphi \theta^2 + 150 \Delta^2 \varphi^2 \theta - 25 \Delta^3 \varphi^3 ,$$

the first two terms of which are cancelled by the first two terms of the expression for G^2, given in equation (26), when the substitutions are made in equation (25). We thus have

$$(28) \qquad G^2 + 25 H^3 = \Delta^2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{75}{2} \varphi^2 \theta - 5 (4\theta - 3 \Delta \varphi) \Gamma \\ -25 \Delta \varphi^3 + 8 \Delta \Omega + \Delta^2 \Upsilon \end{array} \right\} = 0$$

for the equation of a bitangential curve of the general plane quintic curve with the extraneous factor Δ^2 removed.

In one of the methods given by SALMON in « *Higher Plane Curves* » there is an extraneous factor involved, but it is not a function of the hessian of the n-ic as in this case. In the equation of the bitangential of the quintic given in HEAL's first paper there occurs the square of the hessian of the quintic as an extraneous factor. It will be of interest here to sketch his method and prove the formula which he used in the removal of the Δ^2 in his second paper.

He uses the equation of the quintic in the form having the x-axis tangent to the curve at the origin. Making y equal to zero in this quintic, he shows that the discriminant of the cubic in x thus obtained is a factor of the absolute term in a certain equation which possesses the proper orders for a bitangential as suggested by SALMON. This equation is

$$(29) \quad [297 \Delta J(f, \Delta, \Phi) - 456 \Delta J'(f, \Delta, \Phi) - 20 J(f, \Delta, \Theta)]^2 = 3025 (4\Theta - 9 \Delta \Phi)^3,$$

in which $J(f, \Delta, \Phi)$ is the jacobian of the forms f, Δ, Φ and $J'(f, \Delta, \Phi)$ means that

in forming the jacobian the Φ is to be differentiated on the assumption that the second derivatives of Δ which enter Φ are constants. If the discriminant of the cubic in x, gotten by making y equal to zero in the quintic, be equal to zero, then the origin is a point of bitangency and the absolute term of the equation (29) is zero. Thus, with this assumption, equation (29) becomes a bitangential of the quintic whose coefficients satisfy the assumption. The quintic in this case is not the general plane quintic in the full sense as treated above.

In Mr. HEAL's second paper he develops equation (29) by use of the formula for the product of two jacobians and gets a form which contains Δ^2 in every term except two. These two terms are

$$\Delta\Theta\left\{2\Phi\Theta-\begin{bmatrix}\Theta\\ \Delta\end{bmatrix}\right\},$$

where, after the notation of CLEBSCH, the covariant $\begin{bmatrix}\Theta\\ \Delta\end{bmatrix}$ is the matrix of the hessian of the n-ic bordered on one side by the first derivatives of Θ and on the other by the first derivatives of Δ. To remove the Δ^2 from these two terms he uses the formula

$$(30)\qquad 64\left\{\begin{bmatrix}\Theta\\ \Delta\end{bmatrix}-2\Phi\Theta\right\}=171\,\Delta^2\Psi+72\,\Delta\begin{bmatrix}\Phi'\\ \Delta\end{bmatrix}.$$

Some letters concerning the proof of this formula passed between CAYLEY and HEAL. They can be seen in the « Proceedings of the London Mathematical Society », in « The Annals of Mathematics » and in CAYLEY's Collected Works.

To prove this formula we first find symbolic representations for the covariants involved which we have not already used. In the same way that we developed Θ, we get

$$\begin{bmatrix}\Phi'\\ \Delta\end{bmatrix}=-\frac{n^2(n-1)^2}{2}(\Phi'_\sigma\Delta_\sigma),$$

where the Φ' was defined in giving the meaning of J' in equation (29). Supplying the numerical coefficients in these derivatives we have

$$\frac{2^3}{n^{10}(n-1)^{10}(n-2)^3(3n-7)}\begin{bmatrix}\Phi'\\ \Delta\end{bmatrix}=\alpha_x^{3n-8}a_x^{n-3}b_x^{n-2}(\Delta_\sigma a_\sigma)(\alpha a b)^2=\Gamma_2\,.$$

Similarly, we have

$$\frac{2^4}{n^{13}.(n-1)^{13}(n-2)^3}\begin{bmatrix}\Theta\\ \Delta\end{bmatrix}=(3n-7)\alpha_x^{3n-8}(\alpha_\sigma\Delta_\sigma)^2+(n-2)a_x^{n-3}b_x^{n-2}(\Delta_\sigma a_\sigma)(\Delta a b)^2.$$

In this last expression we have for the first term

$$\alpha_x^{3n-8}(\alpha_\sigma\Delta_\sigma)^2=\varphi'\theta-\tfrac{1}{3}\Delta^2\psi,$$

and for the second term

$$a_x^{n-3}b_x^{n-2}(\Delta_\sigma a_\sigma)(\Delta a b)^2=\Delta\Gamma_2-\tfrac{1}{6}\Delta^2\psi.$$

We thus have

$$\frac{2^4}{n^{13}(n-1)^{13}(n-2)^3}\begin{bmatrix}\Theta\\ \Delta\end{bmatrix}=(3n-7)\varphi'\theta+(n-2)\Delta\Gamma_2-\frac{7n-16}{6}\Delta^2\psi,$$

which, by the use of equations (11), (12), (13) and (15), becomes

$$\begin{bmatrix}\Theta\\ \Delta\end{bmatrix} = 2\Phi\Theta + \frac{3(n-2)}{3n-7}\Delta\begin{bmatrix}\Phi'\\ \Delta\end{bmatrix} + \frac{3(n-2)(7n-16)}{(3n-7)^2}\Delta^2\Psi.$$

Making $n = 5$, we get HEAL's formula as given in equation (30).

§ 9.

The equation of a bitangential of the sextic.

To find the equation of a bitangential of the sextic we must first find an expression for B_4 which has the u removed from it. From equation (7) we have

$$B_4 = A_0^2 C_4 - 3A_1 B_3 - 3A_1^2 B_2.$$

To get an expression for the first term in the second member of this equation, we put $t = 2$ in equation (19), square and multiply as indicated in (19), make use of equation (9), cancel and collect terms. We get

$$A_0^2 C_4 = \frac{n^4(n-1)^4}{2^{11}.3^4.5}\Big[-15\Delta^2 H u_\sigma^2 u_x + \tfrac{8}{3}\Delta^4 a_x^{n-3} b_x^{n-2}(a_\sigma u_\sigma)(abu)^2 - 8\Delta^4 a_x^{n-4} b_x^{n-2} a_\sigma^2 (abu)^2 u_x$$
$$+ 8\Delta^3 a_x^{n-3} b_x^{n-2}(\Delta_\sigma a_\sigma)(abu)^2 u_x + 8\Delta^3 a_x^{n-2}(\Delta a u)^2 u_x - 9\Delta^3 a_x^{n-5}(a_\sigma^2)^2(a_\sigma u_\sigma) u_x^2$$
$$+ 15\Delta^2\varphi(\Delta_\sigma u_\sigma) u_x^2 + 2\Delta^3 \varepsilon u_x^3 - 8\Delta^3 a_x^{n-4} b_x^{n-2} a_\sigma^2(\Delta ab)(abu) u_x^2 - 3\Delta^2\Gamma_1 u_x^3\Big] u_x^9,$$

in which the second, third, fourth, sixth and ninth terms must be further reduced. We shall refer to these terms as T_2, T_3, etc., for convenience. We have

$$T_2 = \tfrac{8}{3}\Delta^3 a_x^{n-3} b_x^{n-2}[(\Delta ab)u_x + a_x(\Delta bu) - b_x(\Delta au)](abu)(a_\sigma u_\sigma) = T_{21} + T_{23},$$

the second term containing $(buu) = 0$. For the first term we have

$$T_{21} = \tfrac{8}{3}\Delta^2 a_x^{n-3} b_x^{n-2}(\Delta ab)[(\Delta ab)u_x + a_x(\Delta bu) - b_x(\Delta au)](a_\sigma u_\sigma) u_x$$
$$= \tfrac{8}{3}\Delta^2 a_x^{n-3} b_x^{n-2}(\Delta ab) a_\sigma[\Delta_\sigma(abu) - a_\sigma(\Delta bu) + b_\sigma(\Delta au)] u_x^2$$
$$- \tfrac{8}{9}\Delta^3 b_x^{n-2}(\Delta bu)^2 u_x - \tfrac{8}{3}\Delta^2 a_x^{n-3} a_\sigma[\Delta_\sigma a_y - a_\sigma\Delta_y + f_\sigma(\Delta au)](\Delta au) u_x,$$

where the second, third and sixth are zero terms and the fourth and last terms are alike and equal to

$$-\tfrac{16}{9}\Delta^3 a_x^{n-2}(\Delta au)^2 u_x.$$

The other two terms are equal to

$$\tfrac{8}{3}\Delta a_x^{n-3} b_x^{n-2}(\Delta_\sigma a_\sigma)(\Delta ab)[(\Delta ab)u_x + a_x(\Delta bu) - b_x(\Delta au)] u_x^2$$
$$- \tfrac{8}{3}\Delta a_x^{n-3}(\Delta_\sigma a_\sigma)[a_x\Delta_y + (\Delta af) u_x](\Delta au) u_x,$$

the second and fourth of which are zero terms. We thus have

$$T_{21} = \tfrac{8}{3}\Delta a_x^{n-3} b_x^{n-2}(\Delta_\sigma a_\sigma)(\Delta ab)^2 u_x^3 - \tfrac{16}{3}\Delta a_x^{n-3}(\Delta_\sigma a_\sigma)(\Delta af)(\Delta au) u_x^2 - \tfrac{16}{9}\Delta^3 a_x^{n-2}(\Delta au)^2 u_x.$$

The other term in T_2 is equal to

$$T_{23} = -\tfrac{8}{3}\Delta^2 a_x^{n-3}[a_x\Delta_y + (\Delta a f)u_x](\Delta a u)(a_\sigma u_\sigma),$$

the first term of which contains $(\Delta u u) = 0$. Proceeding with the other term we have

$$T_{23} = -\tfrac{8}{3}\Delta^2 a_x^{n-3} a_\sigma[\Delta_\sigma a_y - a_\sigma \Delta_y + f_\sigma(\Delta a u)](\Delta a u) u_x,$$

the second term of which is zero, the last term equal to

$$-\tfrac{8}{9}\Delta^3 a_x^{n-2}(\Delta a u)^2 u_x,$$

and the first term equal to

$$-\tfrac{8}{3}\Delta a_x^{n-3}(\Delta_\sigma a_\sigma)[a_x\Delta_y + (\Delta a f)u_x](\Delta a u)u_x.$$

This first term is zero. Collecting terms we have

$$T_2 = \tfrac{8}{3}\Delta a_x^{n-3} b_x^{n-2}(\Delta_\sigma a_\sigma)(\Delta a b)^2 u_x^3 - 8\Delta a_x^{n-3}(\Delta_\sigma a_\sigma)(\Delta a f)(\Delta a u)u_x^2 - \tfrac{8}{3}\Delta^3 a_x^{n-2}(\Delta a u)^2 u_x.$$

In the same way T_3, T_4 and T_9 are reduced, and denoting the sum of T_2, T_3, T_4, and T_9 by T, we have

$$\begin{aligned} T = {} & \tfrac{32}{3}\Delta a_x^{n-3} b_x^{n-2}(\Delta_\sigma a_\sigma)(\Delta a b)^2 u_x^3 - 16\Delta^2 a_x^{n-4} b_x^{n-2} a_\sigma^2(\Delta a b)^2 u_x^3 \\ & - 24\Delta a_x^{n-3}(\Delta_\sigma a_\sigma)(\Delta a f)(\Delta a u)u_x^2 + 24\Delta^2 a_x^{n-4} a_\sigma^2(\Delta a f)(\Delta a u)u_x^2 \\ & - 8\Delta^3 a_x^{n-2}(\Delta a u)^2 u_x. \end{aligned}$$

This last term cancels the fifth term in $A_0^2 C_4$. The first two terms were found in the reduction of G^2 to be equal to

$$\tfrac{8}{3}\Delta^2\left(4\Gamma_2 - 6\Delta\Omega_1 + \tfrac{7}{3}\Delta\psi\right)u_x^3.$$

The other two terms will have to be further reduced. We have from equations (16),

$$\begin{aligned} \eta\Delta_y = {} & a_x^{n-3} b_x^{n-2}(\Delta a b)^2(\Delta a f)\Delta_y = a_x^{n-3} b_x^{n-2}(\Delta a b)(\Delta a f)[(\Delta a f)(\Delta b u) - (\Delta b f)(\Delta a u)] \\ = {} & -\tfrac{1}{2} a_x^{n-3} b_x^{n-2}(\Delta a b)[\Delta^2 a_\sigma^2 - 2\Delta a_x(\Delta_\sigma a_\sigma) + \theta a_x^2](\Delta b u) \\ & - \tfrac{1}{2} a_x^{n-3} b_x^{n-2} c_x^{n-2}(\Delta a f)(\Delta b c)[\Delta(a b c) - a_x(\Delta b c)](\Delta a u), \end{aligned}$$

in which the first two terms are zero, the third and last terms are alike and their sum is equal to

$$-\tfrac{1}{2}\theta a_x^{n-2} b_x^{n-2}(\Delta a b)[\Delta(a b u) - (\Delta a b)u_x] = -\tfrac{1}{2}\Delta\theta(\Delta_\sigma u_\sigma) + \tfrac{1}{2}\theta^2 u_x.$$

We thus have

$$\Delta a_x^{n-3}(\Delta_\sigma a_\sigma)(\Delta a f)(\Delta a u) = -2\eta\Delta_y - \Delta\theta(\Delta_\sigma u_\sigma) + \theta^2 u_x,$$

from which we get a reduction for the third term in T. Also from (16) we have

$$\begin{aligned} \zeta\Delta_y = {} & a_x^{n-4} a_\sigma^2(\Delta_\sigma a_\sigma)(\Delta a f)\Delta_y = a_x^{n-4} a_\sigma^2(\Delta a f)\Delta_\sigma[\Delta_\sigma a_y + f_\sigma(\Delta a u) - u_\sigma(\Delta a f)] \\ = {} & -\tfrac{1}{2}\theta a_x^{n-4} a_\sigma^2[a_x^2(\Delta_\sigma u_\sigma) - \Delta a_x(a_\sigma u_\sigma) - a_x(\Delta_\sigma a_\sigma)u_x + \Delta a_\sigma^2 u_x] \\ & + \tfrac{1}{3}\Delta^2 a_x^{n-4} a_\sigma^2(\Delta a f)(\Delta a u) + \tfrac{1}{2} a_x^{n-4} a_\sigma^2[\Delta^2 a_\sigma^2 - 2\Delta a_x(\Delta_\sigma a_\sigma) + \theta a_x^2](\Delta_\sigma u_\sigma), \end{aligned}$$

in which the first term cancels the last term and the second term cancels half of the

next to the last term. We thus have

$$\Delta^2 a_x^{n-4} a_\sigma^2(\Delta a f)(\Delta a u) = 3\zeta\Delta_y + \tfrac{3}{2}\Delta\theta(\Delta_\sigma u_\sigma) - \tfrac{3}{2}\theta(\theta - \Delta\varphi)u_x,$$

from which we get a reduction for the fourth term in T.

Making these substitutions, we get

$$T = -8\Delta^3 a_x^{n-2}(\Delta a u)^2 u_x + 24(2\eta + 3\zeta)\Delta_y u_x^2 + 12\Delta(5\theta - 3\Delta\varphi)(\Delta_\sigma u_\sigma)u_x^2$$
$$- 12\theta(5\theta - 3\Delta\varphi)u_x^3 + \tfrac{8}{3}\Delta^2\left(4\Gamma_2 - 6\Delta\Omega_1 + \tfrac{7}{3}\Delta\psi\right)u_x^3.$$

The sixth term in $A_0^2 C_4$ is equal to

$$T_6 = -9\Delta^2 a_x^{n-5}(a_\sigma^2)^2[a_x(\Delta_\sigma u_\sigma) + 2b_x^{n-2}(\Delta a b)b_y]u_x^2$$
$$= -9\Delta^2\varphi(\Delta_\sigma u_\sigma)u_x^2 - 18\Delta a_x^{n-5} b_x^{n-2}(a_\sigma^2)^2(\Delta a b)[b_x\Delta_y + (\Delta b f)u_x]u_x^2,$$

the last term of which is equal to

$$-9\Delta a_x^{n-5} b_x^{n-2} c_x^{n-2}(a_\sigma^2)^2(\Delta b c)[\Delta(a b c) - a_x(\Delta b c)]u_x^3$$
$$= -9\Delta^2\Gamma_1 u_x^3 + 9\Delta\varphi\theta u_x^3.$$

We thus have

$$T_6 = -9\Delta^2\varphi(\Delta_\sigma u_\sigma)u_x^2 - 18\Delta\zeta\Delta_y u_x^2 + 9\Delta(\varphi\theta - \Delta\Gamma_1)u_x^3.$$

Now substituting these values for T and T_6, we have

$$(31) \qquad A_0^2 C_4 = \frac{n^4(n-1)^4}{2^{12}.3^5.5}[-90\Delta^2 H u_\sigma^2 - 36 G\Delta_y u_x + 180\Delta H(\Delta_\sigma u_\sigma)u_x$$
$$- 90\theta H u_x^2 - 45 H^2 u_x^2 + \Delta^2 I u_x^2]u_x^{10},$$

where we have put

$$(32) \qquad \begin{cases} I = \Delta I_0 + I_1 \\ I_0 = 12\varepsilon - 96\Omega_1 + \tfrac{112}{3}\psi \\ I_1 = 45\varphi^2 - 72\Gamma_1 + 64\Gamma_2. \end{cases}$$

For the second term in B_4, by equations (18) and (24), we have

$$-3A_1B_3 = \frac{n^4(n-1)^4}{2^{10}.3^3.5} G\Delta_y u_x^{11},$$

and for the third term, by equations (18) and (21), we have

$$-3A_1^2 B_2 = \frac{n^4(n-1)^4}{2^{11}.3^3}[\Delta^2 u_\sigma^2 - 2\Delta(\Delta_\sigma u_\sigma)u_x + \theta u_x^2]H u_x^{10}.$$

Adding the results for the three terms in B_4, we get

$$(33) \qquad B_4 = \frac{n^4(n-1)^4}{2^{12}.3^5.5}(\Delta^2 I - 45 H^2)u_x^{12}.$$

Making $n = 6$ in equation (5) and equating the discriminant to zero, we have

$$(B_4 + 3B_2^2)^3 - 27(B_2B_4 - B_3^2 - B_2^3)^2 = 0.$$

Substituting in this equation the expressions given for B_2, B_3 and B_4 in equations (21), (24) and (33), we get

$$(34) \qquad 5\Delta^6 I^3 - 81[5\Delta^2 HI - 12(G^2 + 25H^3)]^2 = 0,$$

for the equation of a bitangential curve of the general plane sextic curve, but containing the sixth power of the hessian of the sextic as an extraneous factor.

§ 10.

Removal of the extraneous factor Δ^6.

The removal of the extraneous factor Δ^6 is easily accomplished. Referring to the expression for $G^2 + 25H^3$, given in equation (28), we see that we already have Δ^4 removed and that the removal of the remaining Δ^2 requires that the terms in $5HI$ which do not contain Δ must cancel the terms within the braces in equation (28) which do not contain Δ. The terms in $5HI$ which do not contain Δ explicitly are

$$450\varphi^2\theta - 720\theta\Gamma_1 + 640\theta\Gamma_2,$$

and the terms in $-12(G^2 + 25H^3)$ which do not contain Δ explicitly are

$$-450\varphi^2\theta + 720\theta\Gamma_1 - 1920\theta\Gamma_2,$$

from which it appears that $\theta\Gamma_2$ must contain Δ as a factor. To prove this we have

$$\begin{aligned}\theta\Gamma_2 &= \alpha_x^{3n-8} a_x^{n-3} b_x^{n-2} (\Delta_\sigma a_\sigma)(\Delta_\sigma \Delta_\sigma)(\alpha a b)^2 \\ &= \alpha_x^{3n-8} a_x^{n-3} b_x^{n-2} (\Delta_\sigma a_\sigma)(\alpha a b)\Delta_\sigma[\alpha_\sigma(\Delta a b) - a_\sigma(\Delta \alpha b) + b_\sigma(\Delta \alpha a)] \\ &= \alpha_x^{3n-8} \beta_x^{3n-8} a_x^{n-3} b_x^{n-2} (\Delta_\sigma a_\sigma)(\alpha_\sigma \beta_\sigma)(\alpha a b)[\Delta(\beta a b) + a_x(\Delta \beta b) - b_x(\Delta \beta a)] \\ &\quad + \theta \alpha_x^{3n-8} a_x^{n-2} (\Delta \alpha a)^2 + \tfrac{2}{3}\Delta \alpha_x^{3n-8} a_x^{n-3} b_x^{n-2} c_x^{n-2} (\alpha a b)(\Delta \alpha b)(\Delta a c)^2 \\ &\quad + \tfrac{1}{3}\Delta \alpha_x^{3n-8} a_x^{n-3} (\Delta_\sigma a_\sigma)(\Delta \alpha a)^2.\end{aligned}$$

Here, the first two and last three terms are easily reduced to

$$\tfrac{1}{3}\Delta\Omega_4 + \Delta\varphi'\Gamma_2 - \tfrac{1}{6}\Delta\theta\psi - \tfrac{1}{6}\Delta^2\varphi'\psi,$$

and the third term can be written as

$$T = \alpha_x^{3n-8}\beta_x^{3n-8}\gamma_x^{3n-8} a_x^{n-3} (\Delta_\sigma a_\sigma)(\alpha_\sigma \beta_\sigma)(\beta\gamma a)[\alpha_x(\gamma a f) + a_x(\alpha\gamma f)] = T_1 + T_2.$$

For these two terms we have

$$\begin{aligned}T_1 &= \tfrac{1}{2}\beta_x^{3n-8}\gamma_x^{3n-8} a_x^{n-3} (\Delta_\sigma a_\sigma)(\beta\gamma a)\Delta_\sigma[f_\sigma(\beta\gamma a) - a_\sigma(\beta\gamma f)] \\ &= \tfrac{1}{6}\Delta^2 a_x^{n-3} a_\omega^2 (\Delta_\sigma a_\sigma) - \tfrac{1}{2}\theta a_x^{n-3} a_\sigma^2 (a_\omega f_\omega) + \tfrac{1}{3}\Delta a_x^{n-3} b_x^{n-2} (a_\omega f_\omega)(\Delta a b)^2 \\ &= \tfrac{1}{6}\Delta^2 \Lambda + \tfrac{1}{3}\Delta\Omega_4,\end{aligned}$$

the middle term being equal to zero, and

$$\begin{aligned}T_2 &= \tfrac{1}{3}\Delta \alpha_x^{3n-8}\beta_x^{3n-8}\gamma_x^{3n-8} (\alpha_\sigma\beta_\sigma)(\beta\gamma\Delta)(\alpha\gamma f) \\ &= \tfrac{1}{6}\Delta \alpha_x^{3n-8}\beta_x^{3n-8}\gamma_x^{3n-8} (\beta\gamma\Delta)\alpha_\sigma[\alpha_\sigma(\beta\gamma f) - f_\sigma(\alpha\beta\gamma)],\end{aligned}$$

the first term of which is zero and the last term of which is equal to

$$-\tfrac{1}{18}\Delta^2\Delta_\omega^2 = -\tfrac{1}{54}\Delta^3\Delta_\Delta.$$

Collecting terms, we have

$$\theta\Gamma_2 = \tfrac{1}{2}\Delta\chi,$$

where we have put

$$(35) \qquad \chi = \tfrac{4}{3}\Omega_4 + \tfrac{1}{3}\Lambda + 2\varphi'\Gamma_2 - \tfrac{1}{3}\theta\psi - \tfrac{1}{3}\Delta\varphi'\psi - \tfrac{1}{27}\Delta^2\Delta_\Delta .$$

Using this expression for $\theta\Gamma_2$ and substituting in equation (34) the values of HI and $G^2 + 25H^3$ given in equations (21), (28) and (32), we get

$$(36) \qquad \Delta^6\left\{5I^3 - 81\left[\begin{matrix} 5(HI_0 - \varphi I_1 - 128\chi) \\ -\,12(15\varphi\Gamma - 25\varphi^3 + 8\Omega + \Delta\Upsilon)\end{matrix}\right]^2\right\} = 0$$

for the equation of a bitangential curve of the general plane sextic curve with the extraneous factor Δ^6 removed.

§ 11.

The equation of a bitangential of the septimic.

The processes involved in finding the equation of a bitangential curve of the general plane septimic curve are the same, with very few exceptions, as they are in the case of the sextic. We shall therefore give only the results obtained in the several steps. No attempt will be made, in this paper, to remove the extraneous factor Δ^{12} from the equation here obtained.

From equation (7) we have

$$B_5 = A_0^3 C_5 - 4A_1B_4 - 6A_1^2B_3 - 4A_1^3B_2,$$

from which to compute a form for B_5. Making $t = 3$ in equation (20) and performing the multiplications indicated, introducing the value of A_0^3 from equation (17) and carrying the several steps through in a manner similar to the method used in the case of the sextic, we finally get for the first term in B_5 the equation

$$(37) \quad \left\{\begin{aligned} A_0^3C_5 = \frac{n^5(n-1)^5}{2^{12}.3^6.5.7}&[210\Delta^2H\Delta_y u_\sigma^2 - 63\Delta^2Gu_\sigma^2u_x - 420\Delta H(\Delta_\sigma u_\sigma)\Delta_y u_x \\ &+ 126\Delta G(\Delta_\sigma u_\sigma)u_x^2 - (7\Delta^2 I - 315H^2)\Delta_y u_x^2 + 210H\theta\Delta_y u_x^2 \\ &- 84G\theta u_x^3 + \Delta J u_x^3]u_x^{12},\end{aligned}\right.$$

where we have put

$$(38) \quad \left\{\begin{aligned} &J = \Delta^2 J_0 + \Delta J_1 + J_2, \\ &J_0 = -15\Pi_1, \qquad J_1 = 120\Pi_2 + 90\Pi_3, \\ &J_2 = -162\xi\theta - 48\Pi_4\theta + 48\Pi_5\theta - 80\Pi_6 .\end{aligned}\right.$$

For the other three terms in B_5 we have

$$-4A_1B_4 = \frac{n^5(n-1)^5}{2^{12}.3^6.5.7}[7\Delta^2I - 315H^2]\Delta_y u_x^{14},$$

$$-6A_1^2B_3 = \frac{n^5(n-1)^5}{2^{12}.3^6.5.7}[63\Delta^2u_\sigma^2 - 126\Delta(\Delta_\sigma u_\sigma)u_x + 63\theta u_x^2]Gu_x^{13},$$

$$-4A_1^3B_2 = \frac{n^5(n-1)^5}{2^{12}.3^6.5.7}[-210\Delta^2u_\sigma^2 + 420\Delta(\Delta_\sigma u_\sigma)u_x - 210\theta u_x^2]H\Delta_y u_x^{12}.$$

Adding these three terms to the first term as given in equation (37), we get

$$(39) \qquad B_5 = \frac{n^5(n-1)^5}{2^{12}.3^6.5.7}[\Delta J - 21\, G\theta]\, u_x^{15}.$$

Now making $n=7$ in equation (5) and equating the discriminant to zero, we have

$$\begin{aligned} &B_5^4 - 120 B_5^3 B_3 B_2 + 8 B_5^2[20 B_4^2 B_2 + 45 B_4(B_3^2 - 4 B_2^3) + 6 B_2^2(55 B_3^2 + 72 B_2^3)] \\ &+ 32 B_5 B_3[-20 B_4^3 + 140 B_4^2 B_2^2 - 45 B_4 B_2(7 B_3^2 + 8 B_2^3) + 4 B_3^2(27 B_3^2 + 40 B_2^3)] \\ &+ 16 B_4^2[16 B_4^3 - 160 B_4^2 B_2^2 + 40 B_4 B_2(9 B_3^2 + 10 B_2^3) - 5 B_3^2(27 B_3^2 + 40 B_2^3)] = 0. \end{aligned}$$

Substituting in this equation the forms for B_2, B_3, B_4 and B_5 given in equations (21), (24), (33) and (39), we get

$$(40) \left\{ \begin{aligned} &97200(\Delta J - 21\, G\theta)^4 - 20412000(\Delta J - 21\, G\theta)^3 GH \\ &+ 264600(\Delta J - 21\, G\theta)^2[5(\Delta^2 I - 45 H^2)^2 H + 27(\Delta^2 I - 45 H^2)(G^2 - 25 H^3) \\ &+ 270(11\, G^2 H^2 + 90 H^5)] + 24696(\Delta G J - 21\, G^2\theta)[-25(\Delta^2 I - 45 H^2)^3 \\ &+ 2625(\Delta^2 HI - 45 H^3)^2 - 2025(\Delta^2 HI - 45 H^3)(7\, G^2 + 50 H^3) + \\ &+ 432(27\, G^4 + 250\, G^2 H^3)] + 12005(\Delta^2 I - 45 H^2)^2[(\Delta^2 I - 45 H^2)^3 \\ &- 150(\Delta^2 HI - 45 H^3)^2 - 45(\Delta^2 HI - 45 H^3)(18\, G^2 + 125 H^3) \\ &- 27(27\, G^4 + 250\, G^2 H^3)] = 0 \end{aligned} \right.$$

for the equation of a bitangential curve of the general plane septimic curve, but containing Δ^{12} as an extraneous factor. Evidently the labor in the removal of this factor would be tedious.

§ 12.

The equation of a bitangential of the octic.

The processes in the case of the octic are very little different from those of the sextic and septimic. We have from equation (7),

$$B_6 = A_0^4 C_6 - 5 A_1 B_5 - 10 A_1^2 B_4 - 10 A_1^3 B_3 - 5 A_1^4 B_2,$$

from which to find a form for B_6. Making $t=3$ in equation (19) and performing the multiplications indicated, introducing the value of A_0^4 from equation (17) and carrying the several steps through as we did in the case of the sextic, we get for the first term in B_6 the equation

$$(41) \left\{ \begin{aligned} A_0^4 C_6 = \frac{n^6(n-1)^6}{2^{17}.3^7.7}&[210\Delta^4 H(u_\sigma^2)^2 + 168\Delta^2 G\Delta_y u_\sigma^2 u_x - 840\Delta^3 H(\Delta_\sigma u_\sigma) u_\sigma^2 u_x \\ &- 14\Delta^2(45 H^2 + 90 H\theta - \Delta^2 I) u_\sigma^2 u_x^2 - 560\Delta^2 H a_x^{n-2}(\Delta a u)^2 u_x^2 \\ &- 336\Delta G(\Delta_\sigma u_\sigma)\Delta_y u_x^2 + 8(42\, G\theta - \Delta J)\Delta_y u_x^3 \\ &+ 28\Delta(\Delta^2 I - 30 H\theta - 45 H^2)(\Delta_\sigma u_\sigma) u_x^3 + (1632 H\theta^2 - \Delta K) u_x^4] u_x^{14}, \end{aligned} \right.$$

where we have put

$$(42)\qquad \begin{cases} K = \Delta^4 K_0 + \Delta^3 K_1 + \Delta^2 K_2 + \Delta K_3 + K_4, \\ K_0 = -9\Sigma_1, \qquad K_1 = 72\Sigma_2 + 144\Sigma_3, \\ K_2 = 672\,\Omega_1\,\theta - \frac{464}{3}\psi\,\theta - 420\,\varepsilon\,\theta - 64\Sigma_4 - 192\Sigma_5, \\ K_3 = 1512\,\Gamma_1\,\theta - 992\,\Gamma_2\,\theta, \qquad K_4 = -816\,\varphi\,\theta. \end{cases}$$

For the other four terms in B_6 we have

$$-5A_1 B_5 = \frac{n^6(n-1)^6}{2^{17}.3^7.7}[8\Delta J - 168\,G\,\theta]\Delta_y u_x^{17},$$

$$-10A_1^2 B_4 = \frac{n^6(n-1)^6}{2^{17}.3^7.7}[\Delta^2 u_\sigma^2 - 2\Delta(\Delta_\sigma u_\sigma)u_x + \theta u_x^2][14\Delta^2 I - 630H^2]u_x^{16},$$

$$-10A_1^3 B_3 = \frac{n^6(n-1)^6}{2^{17}.3^7.7}[-\Delta^2 u_\sigma^2 + 2\Delta(\Delta_\sigma u_\sigma)u_x - \theta u_x^2]\,168\,G\,\Delta_y u_x^{15},$$

$$-5A_1^4 B_2 = \frac{n^6(n-1)^6}{2^{17}.3^7.7}[-3\Delta^4(u_\sigma^2)^2 + 12\Delta^3(\Delta_\sigma u_\sigma)u_\sigma^2 u_x - 18\Delta^2\theta u_\sigma^2 u_x^2$$
$$+ 8\Delta^2 a_x^{n-2}(\Delta a u)^2 u_x^2 + 12\Delta\theta(\Delta_\sigma u_\sigma)u_x^3 - 3\theta^2 u_x^4]\,70\,H u_x^{14}.$$

Adding these four terms to the first term as given in equation (41), we get

$$(43)\qquad B_6 = \frac{n^6(n-1)^6}{2^{17}.3^7.7}\left\{\begin{matrix} 14\Delta^2\theta I - \Delta K \\ -630H^2\theta + 1422\,H\,\theta^2 \end{matrix}\right\} u_x^{18}.$$

Now making $n=8$ in equation (5) and equating the discriminant to zero, we get an equation consisting of seventy-seven terms made up of the coefficients B_2, B_3, B_4, B_5 and B_6, in which we can substitute the forms given by equations (21), (24), (33), (39) and (43) and thus get the equation of a bitangential curve of the general plane octic curve, but containing the twentieth power of the hessian of the octic as an extraneous factor.

Bloomington, Ind. (U.S.A.), January 16th, 1909.

U. S. HANNA.

SUR UNE NOUVELLE CLASSE DE SURFACES.

(2ème PARTIE).

Par M. **Georges Tzitzéica** (Bucarest).

Adunanza del 14 marzo 1909.

Dans la première partie de ce travail [1]) j'ai étudié les surfaces S dont *la courbure totale est proportionnelle à la quatrième puissance de la distance d'un point fixe au plan tangent.*

J'avais mis alors en évidence deux propriétés curieuses de ces surfaces définies par une propriété essentiellement métrique, à savoir, de conserver cette définition métrique après une transformation *affine* et après une transformation *duale.* J'ai même donné dans la Note citée (pages 184 et 185) l'origine de ces propriétés.

Depuis, je me suis posé un autre problème: *remplacer la définition métrique des surfaces S par une définition affine.* La propriété que j'avais démontrée indiquait la possibilité du problème, que j'ai réussi à résoudre.

Je retrouverai tout d'abord les résultats de la première Note par une méthode plus expéditive, plus générale et mieux appropriée à la question. J'ajouterai la recherche des surfaces S de révolution. Je donnerai ensuite la démonstration du théorème que j'ai en vue.

1. Considérons une surface quelconque rapportée à ses lignes asymptotiques (u, v). Alors, les coordonnées x, y, z d'un point mobile sur la surface, que je suppose des fonctions de u et v continues et admettant des dérivées partielles au moins jusqu'au troisième ordre pour tout point ordinaire de la surface, sont des solutions linéairement indépendantes d'un système de la forme

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} = a\dfrac{\partial \theta}{\partial u} + b\dfrac{\partial \theta}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = a''\dfrac{\partial \theta}{\partial u} + b''\dfrac{\partial \theta}{\partial v}. \end{cases}$$

On peut ajouter à ce système l'équation suivante

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = a'\frac{\partial \theta}{\partial u} + b'\frac{\partial \theta}{\partial v} + h\theta,$$

[1]) *Voir* ces Rendiconti, t. XXV (1er semestre 1908), pp. 180-187.

a', b', h étant des fonctions de u et v continues pour tout point de la surface dont le plan tangent ne passe pas par l'origine.

Or, le système des équations (1) et (2) définit, non seulement la surface donnée, mais aussi toutes celles que l'on en déduit par des transformations *affines* laissant l'origine invariable.

On peut dire alors que le système (1) et (2) est naturellement adapté pour l'étude des propriétés affines des surfaces, en particulier pour celles des surfaces S.

2. Nous allons construire maintenant un système analogue au précédent pour une surface polaire réciproque de celle que nous venons de considérer, par rapport à une sphère de rayon 1 et ayant son centre à l'origine.

Puisque, d'après une propriété connue (que l'on pourrait d'ailleurs démontrer ici directement), sur la nouvelle surface les courbes (u, v) sont aussi des asymptotiques, il en suit que les coordonnées ξ, η, ζ vérifient un système de la forme

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} = \alpha \dfrac{\partial \omega}{\partial u} + \beta \dfrac{\partial \omega}{\partial v} \\ \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} = \alpha' \dfrac{\partial \omega}{\partial u} + \beta' \dfrac{\partial \omega}{\partial v} + k\omega \\ \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} = \alpha'' \dfrac{\partial \omega}{\partial u} + \beta'' \dfrac{\partial \omega}{\partial v}. \end{cases}$$

Si l'on tient compte des relations

$$\xi x + \eta y + \zeta z = 1, \qquad \xi \frac{\partial x}{\partial u} + \eta \frac{\partial y}{\partial u} + \zeta \frac{\partial z}{\partial u} = 0, \qquad \xi \frac{\partial x}{\partial v} + \eta \frac{\partial y}{\partial v} + \zeta \frac{\partial z}{\partial v} = 0,$$

que l'on dérive successivement en utilisant les équations (1), (2) et (3), on trouve

$$(4)\quad \alpha = a - 2b', \quad \beta = -b, \quad \alpha' = -a', \quad \beta' = -b', \quad k = h, \quad \alpha'' = -a'', \quad \beta'' = b'' - 2a'.$$

On peut appeler le système (3) *adjoint* du système (1) et (2).

3. Cherchons maintenant à l'aide du système (1) et (2) les conditions nécessaires et suffisantes pour que la surface donnée soit une surface S. Or, la courbure totale est donnée par

$$K = -\frac{D'^2}{H^2} = -\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}}{H^4}, \qquad H^2 = EG - F^2,$$

l'expression entre deux barres indiquant un déterminant réduit à sa première ligne; la distance p de l'origine au plan tangent par

$$p = \frac{\begin{vmatrix} x & \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}}{H}.$$

Donc on a, si la surface est S,

$$\frac{K}{p^4} = -\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} x & \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}^4} = \text{const.}$$

et en tenant compte de (2), on déduira

$$\begin{vmatrix} x & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} = \text{const. } h.$$

En prenant la dérivée logarithmique par rapport à u et v, on trouve

$$(5) \qquad a + b' = \frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial u}, \qquad a' + b'' = \frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial v},$$

où j'ai supposé implicitement $h \neq 0$, ce qui est légitime, autrement le système (1) et (2) définira un réseau plan.

Or, les conditions d'intégrabilité des équations (1) et (2) donnent, entre autres, les relations suivantes

$$a - b' = \frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial u}, \qquad b'' - a' = \frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial v}$$

et alors les (5) conduisent à

$$a' = 0, \qquad b' = 0,$$

qui sont ainsi les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface soit S. On constate en même temps que *les surfaces affines d'une surface S sont aussi des surfaces S*, et on voit des relations (4) *qu'il en est de même des surfaces duales.*

Si on laisse de côté les surfaces réglées et en tenant compte des conditions d'intégrabilité et des relations $a' = b' = 0$, le système des équations (1) et (2) devient (voir la Note citée, p. 186)

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} = \dfrac{1}{h}\dfrac{\partial h}{\partial u}\dfrac{\partial \theta}{\partial u} + \dfrac{1}{h}\dfrac{\partial \theta}{\partial v} \\ \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = h\theta \\ \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = \dfrac{1}{h}\dfrac{\partial \theta}{\partial u} + \dfrac{1}{h}\dfrac{\partial h}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial \theta}{\partial v} \end{cases}$$

et son système adjoint sera

$$(\mathrm{II}) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} = \dfrac{1}{h}\dfrac{\partial h}{\partial u}\dfrac{\partial \omega}{\partial u} - \dfrac{1}{h}\dfrac{\partial \omega}{\partial v} \\ \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} = h\omega \\ \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} = -\dfrac{1}{h}\dfrac{\partial \omega}{\partial u} + \dfrac{1}{h}\dfrac{\partial h}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial \omega}{\partial v}, \end{cases}$$

h étant une solution de l'équation

$$(6) \qquad \frac{\partial^2 \log h}{\partial u \partial v} = h - \frac{1}{h^2}.$$

4. Nous allons chercher à l'aide des équations précédentes les surfaces S qui sont en même temps de révolution.

On pourrait étudier la question directement et introduire $z = \varphi(x^2 + y^2)$ dans l'équation aux dérivées partielles du second ordre que vérifie z comme fonction de x

et de y et obtenir une équation différentielle ordinaire du second ordre pour la fonction φ. Mais, l'intégration de cette dernière équation n'est pas aisée. Aussi je préfère l'étudier à l'aide du système (I).

Il s'agit de choisir la fonction h, vérifiant l'équation (6), de manière que le système (I) admette trois intégrales liées par une relation de la forme

$$x^2 + y^2 = 2f(z).$$

Si l'on prend les dérivées successives des deux membres par rapport à u et à v et si l'on tient compte de (I), on obtient, entre autres, les égalités suivantes

$$2zf'(z) - 4f(z) = f'''(z)\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^3,$$

$$2zf'(z) - 4f(z) = f'''(z)\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^3.$$

Or, les premiers membres et par conséquent aussi $f'''(z)$ ne peuvent pas être nuls (autrement la surface se réduirait à un cône de révolution); il faut donc avoir

$$\frac{\partial z}{\partial u} = m\frac{\partial z}{\partial v}, \qquad m^3 = 1,$$

et en remplaçant u par mu et h par mh, on peut réduire m à être égal à 1. Alors, z est une fonction de $u + v$, et la deuxième équation de (I) prouve que h aussi est une fonction seulement de $\alpha = u + v$, laquelle d'après (6) vérifie l'équation suivante

$$hh'' = h'^2 + h^3 - 1. \tag{7}$$

Maintenant, h étant une intégrale de cette équation, il s'agit d'intégrer le système correspondant (I). A cet effet, je fais le changement de variables suivant: je pose $\alpha = u + v$, $\beta = u - v$ et le système (I) devient

$$\text{(I')} \quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha^2} &= \frac{h'+1}{2h}\frac{\partial\theta}{\partial\alpha} + \frac{h}{2}\theta \\ \frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\partial\beta} &= \frac{h'-1}{2h}\frac{\partial\theta}{\partial\beta} \\ \frac{\partial^2\theta}{\partial\beta^2} &= \frac{h'+1}{2h}\frac{\partial\theta}{\partial\alpha} - \frac{h}{2}\theta. \end{aligned}\right.$$

Les deux premières s'intègrent séparément et donnent

$$\theta = B_1 e^{\int\frac{h'-1}{2h}d\alpha} + B_2 e^{\int\frac{h^2}{h'+1}d\alpha}, \qquad \theta = Be^{\int\frac{h'-1}{2h}d\alpha} + A,$$

A étant une fonction de α, et les B des fonctions de β. Par comparaison entre les deux expression de θ on déduit

$$B_1 = B, \qquad B_2 = \text{const.} = C_1, \qquad A = C_1 e^{\int\frac{h^2}{h'+1}d\alpha}$$

et alors introduisant l'expression qui résulte

$$\theta = Be^{\int\frac{h'-1}{2h}d\alpha} + C_1 e^{\int\frac{h^2}{h'+1}d\alpha}$$

dans la dernière équation de (I′), on trouve pour B l'équation

$$B'' = \frac{h'^2 - 1 - 2h^3}{4h^2} . B,$$

où le facteur de B est constant en vertu de l'équation (7) que vérifie h. Je suppose cette constante positive et alors on a

$$B'' + k^2 B = 0,$$

d'où

$$B = C_2 \cos k\beta + C_3 \sin k\beta,$$

et par conséquent

$$\theta = C_2 \cos k\beta\, e^{\int \frac{h'-1}{2h} d\alpha} + C_3 \sin k\beta\, e^{\int \frac{h'-1}{2h} d\alpha} + C_1 e^{\int \frac{h^2}{h'+1} d\alpha}$$

est l'intégrale générale du système (I′). On déduit les solutions linéairement indépendantes suivantes

$$x = \cos k\beta\, e^{\int \frac{h'-1}{2h} d\alpha}, \qquad y = \sin k\beta\, e^{\int \frac{h'-1}{2h} d\alpha}, \qquad z = e^{\int \frac{h^2}{h'+1} d\alpha},$$

qui donnent une double infinité de surfaces de révolution, parce que d'après (7) h dépend de deux constantes arbitraires. Nous avons résolu le problème de la recherche des surfaces S de révolution et même un plus général. En effet, par une transformation affine on en déduit les surfaces dont les sections faites par des plans parallèles sont des coniques homothétiques et ayant les centres en ligne droite, et réciproquement. Un cas singulier de ces surfaces s'obtient lorsque les coniques homothétiques sont des paraboles. Ce cas a été implicitement exclu de notre calcul en supposant la constante k différente de zéro. Si l'on suppose $k = 0$, l'intégrale générale de (I′) n'a plus la forme donnée plus haut, parce que les deux exponentielles qui y entrent deviennent égales. Si on recommence l'intégration, on trouve l'intégrale générale suivante

$$\theta = e^{\int \frac{h'-1}{2h} d\alpha} \left[C_1 \left(\beta^2 + \int \frac{4h}{h'+1} d\alpha \right) + C_2 \beta + C_3 \right]$$

et on en tire la surface

$$x = \left(\beta^2 + \int \frac{4h}{h'+1} d\alpha \right) e^{\int \frac{h'-1}{2h} d\alpha}, \qquad y = \beta\, e^{\int \frac{h'-1}{2h} d\alpha}, \qquad z = e^{\int \frac{h'-1}{2h} d\alpha}$$

coupée par les plans $z = \text{const.}$ suivant des paraboles homothétiques.

5. J'ai démontré aussi que, en dehors des surfaces de révolution, les normales d'une surface S ne peuvent pas appartenir à un complexe linéaire. En effet, si α, β, γ sont des paramètres directeurs de la normale et si l'on suppose l'équation du complexe réduite, on devra avoir

$$\alpha y - \beta x = m\gamma, \qquad m = \text{const.} \tag{8}$$

Si l'on suppose de plus

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 1,$$

alors α, β, γ sont des solutions du système (II) et en dérivant successivement (8), en tenant compte de (I) et (II), on trouve finalement

$$m h \frac{\partial \gamma}{\partial u} = 0, \qquad m h \frac{\partial \gamma}{\partial v} = 0.$$

Or, h étant différent de zéro, γ ne pouvant pas être constant (autrement un calcul simple prouverait que la surface se réduit à un plan), il faut que l'on ait $m = 0$, ce qui prouve que la surface S en question est de révolution.

6. Je reviens maintenant à la question et je considère une ligne asymptotique $u =$ const. d'une surface S, et en chaque point de cette ligne je mène la tangente à l'autre ligne asymptotique $v =$ const. qui y passe. Toutes ces tangentes forment une surface réglée R_1, définie par les équations

$$(9) \qquad x_1 = x + t\frac{\partial x}{\partial u}, \qquad y_1 = y + t\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad z_1 = z + t\frac{\partial z}{\partial u},$$

où x_1, y_1, z_1 sont, le long de R_1, des fonctions de v et de t.

L'équation du plan tangent en un point (v, t) de R_1 est

$$\left| X - x \quad \frac{\partial x}{\partial u} \quad \frac{\partial x}{\partial v} + htx \right| = 0,$$

en réduisant toujours le déterminant à sa première ligne, ou

$$\left| X - x \quad \frac{\partial x}{\partial u} \quad \frac{\partial x}{\partial v} \right| + ht \left| X \quad \frac{\partial x}{\partial u} \quad x \right| = 0.$$

Ce plan devient pour $t = \infty$

$$\left| X \quad \frac{\partial x}{\partial u} \quad x \right| = 0$$

et l'on voit qu'il passe par l'origine. Ainsi donc, *toutes les surfaces R_1 ont pour développables asymptotiques des cônes ayant tous l'origine pour sommet.*

Un calcul analogue prouve que l'on a la même propriété pour les surfaces réglées R_2 déduites des lignes asymptotiques $v =$ const., de la même manière que les R_1 ont été déduites des courbes $u =$ const.

7. Je vais démontrer maintenant que la propriété *affine* que nous venons de trouver pour les surfaces S, caractérise ces surfaces.

Supposons qu'une surface définie par le système (1) et (2) ait pour les surfaces R_1 et R_2 qui correspondent à ses lignes asymptotiques des développables asymptotiques réduites à des cônes de même sommet, qui sera pris pour origine. Le plan tangent en un point quelconque (v, t) d'une surface R_1, qui reste définie par les équations (9), a pour équation

$$\left| X - x - t\frac{\partial x}{\partial u} \quad \frac{\partial x}{\partial u} \quad \frac{\partial x}{\partial v} + t\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \right| = 0$$

ou, en tenant compte des équations (1) et (2),

$$\left| X - x \quad \frac{\partial x}{\partial u} \quad \frac{\partial x}{\partial v} + t\left(b'\frac{\partial x}{\partial v} + hx\right) \right| = 0;$$

et en décomposant le déterminant, on a

$$\left| X - x \quad \frac{\partial x}{\partial u} \quad \frac{\partial x}{\partial v} \right| + t \left| X - x \quad \frac{\partial x}{\partial u} \quad b'\frac{\partial x}{\partial v} + hx \right| = 0,$$

qui pour $t = \infty$ devient

$$\left| X - x \quad \frac{\partial x}{\partial u} \quad b'\frac{\partial x}{\partial v} + hx \right| = 0. \tag{10}$$

Comme $\left| x \quad \frac{\partial x}{\partial u} \quad \frac{\partial x}{\partial v} \right|$ ne peut être constamment nul pour la surface considérée, autrement elle se réduirait à un cône, il résulte que le plan asymptote (10) de R_1 ne passe par l'origine que si l'on a $b' \equiv 0$; de même, si on considère les surfaces R_2, on tire $a' \equiv 0$. Les identités $a' \equiv b' \equiv 0$ prouvent bien que la surface considérée est une surface S.

8. Le théorème précédent appliqué aux surfaces réglées prend une autre forme. Remarquons en effet que dans ce cas les surfaces R_1, par exemple, se réduisent à la surface considérée elle-même, et que les surfaces R_2 sont les quadriques osculatrices le long de chaque génératrice de la surface. Le théorème précédent devient alors: *Une surface réglée est une surface S si sa développable asymptotique se réduit à un cône et si toutes les quadriques osculatrices ont le sommet de ce cône pour centre.*

Ce qu'il y a de remarquable c'est que, si une surface réglée possède seulement la propriété affine d'avoir sa développable asymptotique réduite à un cône, elle peut aussi être définie, comme les surfaces S, par une propriété métrique, à savoir, le rapport $K:p^4$ envisagé plus haut reste constant le long de toute génératrice de la surface, mais il varie d'une génératrice à une autre.

En effet, supposons la surface réglée définie par

$$x = a + lu, \qquad y = b + mu, \qquad z = c + nu,$$

a, b, c, l, m, n, étant des fonctions d'un paramètre t. On a alors

$$\frac{K}{p^4} = - \frac{|l' \quad l \quad a'|^2}{|a \quad l \quad a' + l'u|^4},$$

où les accents désignent la dérivation par rapport à t. Cette expression est indépendante de u si l'on a

$$|a \quad l \quad l'| = 0.$$

Or celle-ci est la condition pour que les plans asymptotes passent par l'origine. Si l'on écrit que le même rapport est aussi indépendant de t, on retrouve les surfaces S réglées données explicitement au § 8 de la première partie de ce travail.

Enfin j'ajoute que l'on peut donner pour les surfaces S réglées une propriété caractéristique à l'aide des lignes flecnodales de ces surfaces. Mais sur ce point je me réserve de revenir à une autre occasion.

Bucarest, le 26 février 1909.

G. Tzitzéica.

LE QUARTICHE PIANE PROIETTIVE A SÈ STESSE.

Memoria di **Edgardo Ciani** (Genova).

Adunanza del 28 febbrajo 1909.

Se una quartica piana è invariante rispetto a una collineazione periodica del suo piano, si suol dire che è proiettiva a sè stessa, o che possiede la collineazione suddetta, dopo di che possiede anche evidentemente tutte le potenze della collineazione medesima. Sorge così e si amplia il concetto di gruppo di collineazioni spettanti a una quartica e si delinea quindi la questione seguente: *«determinare tutti i casi, proiettivamente distinti, nei quali una quartica piana irriduttibile è invariante rispetto a gruppi finiti di collineazioni piane».* Alla completa risoluzione di questo problema è destinato il presente scritto. Ma prima di intraprendere la trattazione sistematica non sarà inopportuna un poco di storia sull'argomento.

KLEIN [1]) per il primo ha presentato e illustrato il caso più notevole, fra quelli suddetti, col ben noto gruppo di 168 collineazioni piane. Posteriormente, S. KANTOR [2]) e (con maggior precisione) A. WIMAN [3]) risolvevano, quasi contemporaneamente, il problema per tutte le quartiche di genere tre. Qualche anno dopo avendo io trattato, indipendentemente dal genere, la questione inerente al numero e alla configurazione delle omologie armoniche spettanti ad una quartica piana [4]), mi servivo, in seguito, dei miei resultati per risolvere, sempre indipendentemente dal genere, la questione più ampia sopra delineata. Questi resultati io pubblicai sotto la forma di enunciato in una breve noticina dell'Istituto Lombardo [5]) riservandomi a dare per esteso tutti gli sviluppi e di-

[1]) *Ueber die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Functionen* [Mathematische Annalen, Bd XIV (1879), pp. 428-471].

[2]) *Neue Theorie der eindeutigen periodischen Transformationen in der Ebene* [Acta Mathematica, Bd. XIX (1895), pp. 115-193].

[3]) *Ueber die hyperelliptischen Curven und diejenigen vom Geschlechte $p = 3$, welche eindeutige Transformationen in sich zulassen* [Bihang till Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar, Bd. XXI (1895), Abth. I, No. 1, pp. 1-23]; *Zur Theorie der endlichen Gruppen von birationalen Transformationen in der Ebene* [Mathematische Annalen, Bd. XLVIII (1897), pp. 195-240].

[4]) *I varii tipi possibili di quartiche piane più volte omologico-armoniche* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XIII (1899), pp. 347-373].

[5]) *I gruppi finiti di collineazioni piane dotati di una quartica invariante irriduttibile* [Rendiconti del R. Istituto Lombardo, serie II, vol. XXXIII (1900), pp. 1170-1176].

mostrazioni relative: ma poi preoccupato della eccessiva complicazione degli uni e delle altre tralasciai ogni cosa. Tornando recentemente a occuparmi dell'argomento, sono riuscito a cambiamenti e semplificazioni tali da indurmi alla presente pubblicazione anche perchè essa risolve la questione dianzi enunciata qualunque sia il genere della quartica (mentre i due Autori sopracitati si limitano al genere tre).

Del resto anche la ricerca nel caso $p = 3$ potrebbe facilmente ridursi a quella inerente a quartiche singolari (salvo pochi casi) mediante le considerazioni seguenti. Se con $f = 0$ si rappresenta analiticamente la quartica, con A il suo invariante cubico e con $S = 0$ il covariante S, è ben noto [6]) che tutti i covarianti di 4° ordine e di 4° grado sono quelli del fascio:

$$S + \lambda A.f = 0.$$

Un esempio di un tale covariante diverso da S e da f è il contravariante quadratico del contravariante quadratico di f (luogo di un punto tale che tirando da esso le 4 trasversali che tagliano equianarmonicamente f, queste formino nuovamente un gruppo equianarmonico). Indichiamo con E questo covariante: esso è individuato nel fascio precedente da $\lambda = \frac{1}{3}$. Ebbene, se f possiede un gruppo G di collineazioni, tale gruppo spetterà anche ad S e ad E (perchè sono due covarianti), cioè a tre curve del fascio suddetto e quindi a tutte e per conseguenza alle curve singolari del fascio medesimo. Farà eccezione la quartica che ha S (ed E) coincidenti con sè medesima, cioè la quartica di Klein [7]); faranno eccezione le quartiche che hanno S indeterminato (anche queste ben conosciute) e finalmente quelle a invariante cubico nullo o (ciò che è lo stesso) quelle che hanno S ed E coincidenti fra loro e non con f: e pure quest'ultime, per quanto meno note, si presentano di facile studio. Potrebbero quindi anche queste considerazioni servire di traccia per lo studio della questione proposta sebbene io non me ne sia servito nel presente lavoro e abbia preferito una via più breve.

La memoria attuale è divisa in tre capitoli. Trattandosi di collineazioni periodiche ho cominciato dal destinare il primo capitolo all'esame di quelle fra di esse che ammettono una quartica invariante irriduttibile riprendendo quindi per intiero particolarmente i resultati di S. Kantor e aggiungendovi quelli inerenti a quartiche singolari (dal Kantor tralasciati). Nel 2° capitolo è contenuto il teorema che risolve completamente la questione proposta. Nel 3° capitolo ho preso in considerazione con qualche dettaglio uno fra i casi trovati notevole per la particolare relazione che esso ha con la cosidetta quartica di Caporali già, sotto altri punti di vista, riconosciuta feconda di belle e interessanti proprietà geometriche [8]).

---

[6]) Maisano, *Sistemi completi dei primi cinque gradi della forma ternaria biquadratica e degl'invarianti, covarianti e controvarianti di sesto grado* [Giornale di Matematiche, vol. XIX (1881), pp. 198-237].

[7]) Ciani, *Un teorema sopra il covariante S della quartica piana* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XIV (1900), pp. 16-21].

[8]) Ciani, *La quartica di* Caporali [Rendiconto dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche (sezione della Società Reale di Napoli), serie III, vol. II (1896), pp. 126-144].

I.

Le collineazioni periodiche dotate di quartica invariante irriduttibile.

1. A quali condizioni debbono soddisfare una collineazione piana periodica e una quartica irriduttibile affinchè la seconda sia invariante rispetto alla prima? Per rispondere a questa domanda distingueremo diversi casi cominciando da quello nel quale la suddetta collineazione è una omologia. Siccome essa deve essere periodica così il centro e l'asse non possono essere incidenti: si può dunque assumere il centro come punto (001) e l'asse come retta $x_3 = 0$, per cui indicando con C la omologia supposta, essa si rappresenterà con la sostituzione

$$C \equiv \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \alpha x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix},$$

dove α è radice primitiva di $z^r = 1$ essendo r il periodo di C. Sia $f = 0$ l'equazione di una quartica irriduttibile. Se essa deve riuscire invariante rispetto a C, si è condotti ovviamente ai tre casi seguenti:

$$f = a x_3^4 + b x_3^2 + c = 0, \qquad r = 2,$$

$$f = a x_3^3 + b = 0, \qquad r = 3,$$

$$f = a x_3^4 + b = 0, \qquad r = 4,$$

dove nella prima e nella 3ª a è una costante; nella 2ª e nella 3ª b è una binaria biquadratica in $x_1 x_2$; nella 1ª b e c sono binarie dei gradi rispettivi 2 e 4 e nella 2ª a è lineare in $x_1 x_2$.

2. Se poi la supposta collineazione C non è omologica e ha il periodo non superiore a 4, si trova per $r = 3$

$$f = a x_3^4 + b x_3^2 x_1 x_2 + c x_3 x_1^3 + d x_3 x_2^3 + e x_1^2 x_2^2 = 0$$

con

$$C \equiv \begin{pmatrix} \alpha x_1 & \alpha^2 x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \qquad \alpha^3 = 1,$$

dove a, b, c, d, e sono costanti con $e \neq 0$ se no da f si stacca x_3 e c, d non sono nulli insieme altrimenti f si compone di due coniche bitangenti.

Per $r = 4$ si può prendere

$$C \equiv \begin{pmatrix} i x_1 & -x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

e si trovano per f i due tipi seguenti:

$$f = a x_1^4 + b x_1^2 x_2 x_3 + c x_2^4 + d x_2^2 x_3^2 + e x_3^4 = 0,$$

$$f = a x_1^2 x_3^2 + b x_1^2 x_2^2 + c x_2^3 x_3 + d x_2 x_3^3 = 0,$$

dove a, b, c, d, e sono costanti.

3. Sia adesso $r > 4$ e qualche potenza di C, ma non tutte, sia omologica. Per conseguenza la f avrà una delle tre forme trovate al n° 1.

Discutiamole separatamente. La f abbia dunque la prima forma:

$$f = a x_3^4 + b x_3^2 + c = 0,$$

dove b non e identicamente nullo altrimenti si cade nella 3^a forma.

Scriviamo C nel modo seguente:

$$C = \begin{pmatrix} \alpha x_1 & \alpha^k x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix},$$

dove α è radice primitiva di $z^r = 1$.

Se $a \neq 0$, si è condotti alla quartica:

$$f = a x_3^4 + b x_3^2 x_2^2 + c x_1^3 x_2 + d x_2^4 = 0,$$

dove a, b, c, d sono costanti. Il periodo $r = 6$; $k = 3$, $\alpha^3 = -1$.

Se poi $a = 0$, disponendo opportunamente del punto unità si trovano le due forme:

$$f = x_3^2 x_1 x_2 + x_1^4 + x_2^4 = 0,$$

$$f = x_3^2 x_2^2 + x_1^4 + x_1 x_2^3 = 0.$$

Nella prima $r = 8$, $k = 3$; nella seconda $r = 6$, $k = 5$.

4. La f abbia la 3^a forma omologica del n° 1, cioè

$$f = a x_3^4 + b = 0$$

e la C sia quella generica del n° precedente. Escludiamo i casi che rientrano nel n° precedente e quelli che spettano al numero seguente (allorchè considereremo la f omologica a periodo 3). Rimane soltanto il caso

$$f = x_3^4 + x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3 = 0$$

con $r = 8$, $k = 5$. Con opportuna, quanto ovvia, trasformazione di coordinate la f può portarsi alla forma

$$f = \sum_1^3 x_i^4 = 0.$$

La quartica attuale è quella di Dyck (n° 16).

5. La f abbia la 2^a forma omologica del n° 1. Escludendo casi già trovati rimangono i seguenti.

Il 1° è:

$$f = x_3^3 x_2 + x_1^4 + x_1 x_2^3 = 0$$

con $r = 9$, $k = 4$.

Il 2° è:

$$f = x_3^3 x_2 + x_1^4 + x_2^4 = 0$$

con $r = 12$, $k = 4$. La quartica è quella di Caporali specializzata (Cap. III).

Il 3° è:

$$x_3^3 x_2 + x_1^4 = 0.$$

Ma per questa, r può esser grande a piacere.

6. Sia ora $r > 4$ e numero primo: ne segue che C non può essere omologica (n° 1). Considerando poi la proiettività binaria che C subordina sopra ogni lato del triangolo unito, ne viene che essa non può essere identica e che il suo periodo r su-

pera 4 per cui le intersezioni dei lati suddetti con f sono tutte assorbite dai vertici del medesimo triangolo. Se uno dei vertici è singolare per f le tangenti in esso sono tutte assorbite dai lati che passano per quel vertice. Sono possibili due casi a seconda che la f passa per due dei vertici suddetti, o per tutti e tre. Sarà utile distinguerli.

7. La f passi per due vertici. Ne viene che uno, ed uno solo di essi deve essere singolare. Esso può essere doppio, o triplo. Suddistinguiamo.

Sia doppio. Si vede subito che non può esser cuspide e si è condotti a una equazione della forma seguente:

$$f = a x_2^2 x_1 x_3 + x_2(b x_1^3 + c x_1^2 x_3 + d x_1 x_3^2) + e x_3^4 = 0,$$

dove a, b, c, d, e sono costanti: $a \neq 0$ se no (010) è triplo (e non doppio); $b \neq 0$ se no f si spezza. Ora la cubica polare del punto doppio si compone di $x_1 = 0$ e della conica

$$2 a x_2 x_3 + b x_1^2 + c x_1 x_3 + d x_3^2 = 0$$

e questa essendo invariante rispetto a C non può segare il trilatero unito fuori dei vertici.

Essendo a e $b \neq 0$ segue $c = d = 0$. E allora la f può ridursi alla forma:

$$f = x_2^2 x_1 x_3 + x_2 x_1^3 + x_3^4 = 0$$

e la C è la seguente

$$C \equiv \begin{pmatrix} \alpha x_1 & \alpha^2 x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \qquad \alpha^5 = 1,\ r = 5.$$

Se poi il vertice singolare è triplo, si trova necessariamente che f è della forma

$$f = x_2 x_1^3 + x_3^4 = 0;$$

ma, come già abbiamo osservato, r è allora qualunque.

8. La f passi per tutti e tre i vertici del triangolo unito. Se tutti e tre sono semplici si trova:

$$f = x_1 x_2^3 + x_2 x_3^3 + x_3 x_1^3 = 0.$$

La f è la quartica di KLEIN (cfr. prefazione): la C ha il periodo $r = 7$ ed è la seguente:

$$\begin{pmatrix} \alpha x_1 & \alpha^3 x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \qquad \alpha^7 = 1.$$

Non rimane altro caso possibile che uno dei vertici sia multiplo per f e gli altri due punti semplici. Ma si esclude subito che la multiplicità sia 3. E se deve essere 2 resulta che il vertice in parola è cuspide e si perviene necessariamente alla:

$$f = x_2^2 x_3^2 + x_2 x_1^3 + x_1 x_3^3 = 0$$

con

$$C \equiv \begin{pmatrix} \alpha x_1 & x_2 & \alpha^4 x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \qquad r = 5, \qquad \alpha^5 = 1.$$

9. Dalle considerazioni fatte sin qui risulta che i valori primi possibili di r sono soltanto 2, 3, 5, 7, e, se il genere è tre, il valore 5 si esclude. Ne segue che, se r non è primo, i suoi fattori primi non possono essere diversi da 2, o da 3. Infatti sia q un

fattore primo di r: se C è la collineazione a periodo r, la collineazione $C^{\frac{r}{q}}$ avrà per periodo q e quindi $q = 2, 3, 5, 7$: ma se $q = 7$ abbiamo già visto che siamo nel caso della quartica di KLEIN e $r = q = 7$ (contro la ipotesi che r non sia primo). Se $q = 5$, siamo nei due casi trovati nei n^i 7 e 8 e vedremo al n° 13 che allora non esistono altre collineazioni possibili e quindi $r = q = 5$ (contro l'ipotesi che r non sia primo). Dunque i valori possibili di r sono della forma: 2^m; 3^n; $2^s.3^t$. Nel 1° e nel 3° caso la $C^{\frac{r}{2}}$ è omologia armonica e quindi valgono le considerazioni dei n^i 3 e 4 e non troviamo tipi nuovi. Se finalmente $r = 3^n$ con $n > 1$, la $C^{3^{n-1}}$ ha il periodo 3, e se sarà omologica valgono le considerazioni del n° 5: altrimenti potremo assumere

$$C^{3^{n-1}} \equiv \begin{pmatrix} \alpha x_1 & \alpha^2 x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \alpha^3 = 1$$

e la f sarà (n° 2)

$$f = a x_3^4 + b x_3^2 x_1 x_2 + c x_3 x_1^3 + d x_3 x_2^3 + e x_1^2 x_2^2 = 0,$$

dove $e \neq 0$ e c, d non possono insieme annullarsi altrimenti f si spezza. Tenendo presente questo, si ponga

$$C \equiv \begin{pmatrix} \beta x_1 & \beta^k x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

e si esiga che C appartenga ad f e si vedrà come necessariamente debba essere $n = 1$.

La discussione è quindi esaurita: non sono possibili altri casi all'infuori di quelli trovati.

È necessario riassumerli classificandoli a seconda del valore del periodo ed enunciando volta a volta le caratteristiche proiettive più rimarchevoli.

10. *Periodo uguale a due* (cfr. il n° 1).

Si ha un solo caso

$$f = a x_3^4 + b x_3^2 + c = 0,$$

dove a è una costante; b e c due binarie in x_1 e x_2 dei gradi rispettivi 2 e 4. La collineazione C è

$$C \equiv \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & -x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}.$$

Il centro di omologia è uno dei 21 punti doppi della Steineriana; l'asse è una delle 21 tangenti quadruple della Cayleyana [9]): ogni punto comune all'asse e alla curva (che non sia singolare) è un punto sestattico.

11. *Periodo uguale a tre* (cfr. n^i 1 e 2).

Si hanno due casi a seconda che la C è omologica o no.

1° *Caso.* — La C sia omologica e rappresentabile con

$$C \equiv \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \alpha x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \qquad \alpha^3 = 1.$$

---

9) BERTINI, *Le tangenti multiple della Cayleyana di una quartica piana generale* [Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XXXII (1896-97), pp. 32-33].

La quartica è

$$f = x_3^3 x_1 + \varphi(x_1, x_2) = 0,$$

dove φ è una binaria biquadratica in x_1, x_2.

La curva possiede 4 flessi sull'asse di omologia ($x_3 = 0$) con le relative tangenti concorrenti nel centro di omologia (001), che è per la curva un punto di ondulazione ($x_1 = 0$ tangente di ondulazione).

2° *Caso.* — La C non sia omologica e rappresentabile con

$$C \equiv \begin{pmatrix} \alpha x_1 & \alpha^2 x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \qquad \alpha^3 = 1.$$

La quartica è

$$f = a x_3^4 + b x_3^2 x_1 x_2 + c x_3 x_1^3 + d x_3 x_2^3 + e x_1^2 x_2^2 = 0,$$

dove a, b, c, d, e sono costanti. La retta $x_3 = 0$ è in generale una bitangente di f.

12. *Periodo uguale a quattro* (cfr. i n[i] 1 e 2).

Si hanno tre casi distinti.

1° *Caso.* — La C sia omologica e rappresentabile con

$$C \equiv \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & i x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}.$$

La quartica è

$$f = x_3^4 + \varphi(x_1, x_2) = 0,$$

dove $\varphi(x_1, x_2)$ è binaria biquadratica in $x_1 x_2$. La curva possiede 4 ondulazioni sull'asse di omologia con le tangenti relative concorrenti nel centro di omologia (che non può appartenere alla curva).

2° *Caso*

$$f = a x_1^4 + b x_1^2 x_2 x_3 + c x_2^4 + d x_2^2 x_3^2 + e x_3^4 = 0.$$

3° *Caso*

$$f = a x_1^2 x_3^2 + b x_1^2 x_2^2 + c x_2^3 x_3 + d x_2 x_3^3 = 0.$$

In entrambi si ha la C non omologica seguente:

$$C \equiv \begin{pmatrix} i x_1 & -x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}.$$

Nel 3° caso la curva possiede sempre un punto doppio: nel 2° caso, in generale, non lo possiede.

13. *Periodo uguale a cinque* (cfr. i n[i] 7 e 8).

1° *Caso*

$$f = x_2^2 x_1 x_3 + x_2 x_1^3 + x_3^4 = 0,$$

$$C \equiv \begin{pmatrix} \alpha x_1 & \alpha^2 x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \qquad \alpha^5 = 1.$$

2° *Caso*

$$f = x_2^2 x_3^2 + x_2 x_1^3 + x_1 x_3^3 = 0,$$

$$C = \begin{pmatrix} \alpha x_1 & x_2 & \alpha^4 x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \qquad \alpha^5 = 1.$$

Sono proprietà comuni a entrambi le seguenti: la curva possiede un punto doppio; le intersezioni del trilatero unito della C con la f sono tutte assorbite dai vertici; la f non possiede altre collineazioni all'infuori di C e delle sue potenze.—Specificando i due casi si può aggiungere che nel 1° il punto doppio è un nodo, nel 2° una cuspide; nel 1° caso la f passa per due vertici del triangolo unito di C, nel 2° passa per tutti e tre, etc.

14. *Periodo uguale a sei* (cfr. il n° 3).

1° *Caso*

$$f = a x_3^4 + b x_3^2 x_2^2 + c x_1^3 x_2 + d x_2^4 = 0,$$

dove a, b, c, d sono costanti. La C è la seguente:

$$C = \begin{pmatrix} \alpha x_1 & -x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \qquad \alpha^3 = -1.$$

Il quadrato e il cubo di C sono due omologie con i rispettivi periodi uguali a 2 e a 3. Il centro dell'una omologia esiste sull'asse dell'altra.

2° *Caso*

$$f = x_3^2 x_2^2 + x_1^4 + x_1 x_2^3 = 0$$

con

$$C \equiv \begin{pmatrix} \alpha x_1 & -\alpha^2 x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \qquad \alpha^3 = -1.$$

La curva possiede un tac-nodo (001) con $x_2 = 0$ tangente tac-nodale. La C di questo 2° caso è proiettivamente diversa da quella del 1° caso: infatti la C attuale non ha per 2ª potenza una omologia.

15. *Periodo uguale a sette.* (cfr. il n° 8).

Esiste un solo caso: la quartica di KLEIN

$$f = x_1 x_2^3 + x_2 x_3^3 + x_3 x_1^3 = 0$$

con

$$C \equiv \begin{pmatrix} \alpha x_1 & \alpha^3 x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \qquad \alpha^7 = 1.$$

La f possiede altre collineazioni formanti con C il noto G_{168}.

16. *Periodo uguale a otto* (cfr. i n[i] 3 e 4).

1° *Caso.* — La quartica di DYCK [10])

$$f = \sum_1^3 x_i^4 = 0$$

con

$$C \equiv \begin{pmatrix} i x_2 & -x_1 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}.$$

La f possiede altre collineazioni formanti con C il noto G_{96}. Esse possono rappresentarsi con $\begin{pmatrix} \alpha x_i & \beta x_h & \gamma x_k \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$, dove α, β e γ sono radici quarte dell'unità e $i, h, k = 1, 2, 3$.

---

[10]) WALTHER DYCK, *Notiz über eine reguläre* RIEMANN'*sche Fläche vom Geschlechte drei und die zugehörige « Normalcurve » vierter Ordnung* [Mathematische Annalen, Bd. XVII (1880), pp. 510-516].

2° *Caso*

$$f = x_3^2 x_1 x_2 + x_1^4 + x_2^4 = 0$$

con

$$C \equiv \begin{pmatrix} \alpha x_1 & \alpha^3 x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \qquad \alpha^8 = 1.$$

La f possiede altre collineazioni che si possono rappresentare con

$$\begin{pmatrix} \alpha x_1 & \alpha^3 x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^r \begin{pmatrix} x_2 & x_1 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \qquad (r = 1, 2, \ldots, 8).$$

Esse insieme a C compongono un G_{16}.

17. *Periodo uguale a nove* (cfr. il n° 5)

Esiste un solo caso:

$$f = x_3^3 x_2 + x_1^4 + x_1 x_2^3 = 0$$

con

$$C \equiv \begin{pmatrix} \alpha x_1 & \alpha^4 x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \qquad \alpha^9 = 1, \qquad (\alpha \text{ rad. primitiva}).$$

Le potenze di C compongono l'intero gruppo spettante a f.

18. *Periodo uguale a dodici* (cfr. il n° 5).

Esiste un sol caso: la quartica di CAPORALI specializzata

$$f = x_3^3 x_2 + x_1^4 + x_2^4 = 0$$

con

$$C \equiv \begin{pmatrix} \alpha x_1 & \alpha^4 x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \qquad \alpha^{12} = 1, \qquad (\alpha \text{ rad. primitiva}).$$

La f possiede altre collineazioni: esse con C formano un G_{48} di cui diremo nel Capitolo III.

19. *Periodo qualunque* (cfr. il n° 5).

$$f = x_3^4 + x_1^3 x_2 = 0$$

con

$$C \equiv \begin{pmatrix} \alpha x_1 & \alpha^k x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

con la sola condizione $3 + k = r$.

II.

Teorema fondamentale.

20. Indichiamo ora con G l'intero gruppo di collineazioni posseduto dalla quartica irriduttibile f e consideriamo il caso in cui G contenga delle omologie armoniche e la f sia quindi una, o più volte omologico-armonica. Ricordando il teorema del n° 13 della mia memoria già citata su tali quartiche, si può dire che i centri e gli assi di tali omologie sono così disposti da potere assicurare sempre, o la esistenza di un solo triangolo invariante rispetto alle omologie in parola, ovvero la esistenza di un solo

punto e di una sola retta invarianti (e non incidenti) rispetto alle omologie in parola. Esiste un solo caso di eccezione: la quartica di KLEIN che per ora intendiamo di escludere. A precisare le cose, si può aggiungere che esiste il triangolo invariante nei casi II, VI, VII considerati in quel n° 13 sopra nominato, esiste un punto e una retta invarianti nei casi I, III, IV e V del n° stesso. Questo è quanto risulta immediatamente dal teorema citato, ma evidentemente il numero delle omologie armoniche di G e la figura composta con i loro centri e i loro assi, sono invarianti non soltanto rispetto alle omologie suddette, ma rispetto anche a ogni altra collineazione di G e quindi esisterà o un solo triangolo invariante, o una sola retta e punto invarianti rispetto all'intero gruppo G. Dico che questa conclusione vale anche se in G non esiste alcuna omologia armonica. Infatti risulta allora dal capitolo precedente che il periodo di una qualunque collineazione di G non può essere diverso da 3, o da 5, o da 7. Il caso $r = 7$ si esclude perchè conduce alla quartica di KLEIN (n° 15); per $r = 5$ esiste un solo triangolo invariante che è il triangolo unito della collineazione che ha tale periodo e infatti essa, con le sue potenze, compone l'intero gruppo spettante alla curva (n° 13). Rimane dunque a considerare il caso in cui tutte le collineazioni di G siano a periodo tre e quindi l'ordine di G sia 3^n (cfr. il n° 9). Ma in tal caso G possiede un sottogruppo invariante G_3 di 3° ordine composto quindi con le potenze di una stessa collineazione C a periodo tre. Se C è omologia il centro e l'asse compongono un punto e una retta invarianti rispetto a G_3 e quindi rispetto a G. Se C non è omologica è invariante il triangolo dei punti uniti. Si ha dunque il seguente risultato:

Se una quartica irriduttibile possiede un gruppo G di collineazioni, o esiste un solo triangolo invariante rispetto a G, o esistono un punto e una retta invarianti e non incidenti, o altrimenti la quartica è quella di KLEIN *e il gruppo è il relativo G_{168}.*

21. Ci proponiamo adesso di discutere le eventualità espresse dal precedente enunciato cominciando dal considerare il caso in cui esista un punto e una retta invarianti (non incidenti) e non esista alcun triangolo invariante. Assumiamo tale punto come (001) e tale retta come $x_3 = 0$. Su di essa il gruppo ternario G supposto, subordina un gruppo binario g rispetto al quale deve essere invariante l'insieme delle 4 intersezioni di f con $x_3 = 0$. Dunque il gruppo g è di specie conosciuta, esso è isomorfo oloedrico col gruppo della piramide, o della doppia piramide, o con alcuno di quelli spettanti a poliedri regolari. Ma se si trattasse del gruppo della piramide (semplice, o doppia) esisterebbe sopra $x_3 = 0$ una coppia invariante di punti: essi insieme a (001) individuerebbero un triangolo invariante e saremmo fuori della ipotesi fatta. Dunque g è isomorfo oloedrico con il gruppo spettante a qualche poliedro regolare: ma d'altra parte esso deve possedere come elemento invariante l'insieme delle 4 intersezioni di $x_3 = 0$ con f, dunque g è il gruppo del tetraedro e l'insieme suddetto compone un gruppo equianarmonico. — Siccome poi in g esiste la identità, così esisterà in G la collineazione

$$C \equiv \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \alpha x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \alpha^r = 1 \ (\alpha \text{ rad. primitiva}),$$

che è manifestamente una omologia a periodo r col centro in (001) e con asse $x_3 = 0$.

Dunque la nostra quartica f sarà omologica ed r non può avere altri valori che 2, o 3, o 4 (cfr. il n° 1). Ma se fosse $r = 3$, il gruppo g ammetterebbe almeno un punto invariante: quello d'incontro di $x_3 = 0$ con la tangente a f nel centro di omologia (cfr. il n° 11). Sarà quindi $r = 2$ ovvero $r = 4$ e in entrambi i casi l'equazione di f sarà della forma seguente:

$$a x_3^4 + b x_3^2 + c = 0,$$

dove a è una costante, b una binaria quadratica in $x_1 x_2$ e c una binaria biquadratica equianarmonica (per quanto abbiamo visto sopra). Ma (001) e $x_3 = 0$ debbono essere invarianti rispetto a G, sarà dunque invariante rispetto a g la coppia di punti (distinti o no) secondo i quali $b = 0$ incontra $x_3 = 0$: il che abbiamo già dichiarato essere impossibile. Occorre quindi che la forma b sia nulla identicamente, cioè che r sia uguale a 4 e la f sia la seguente

$$f = a x_3^4 + c = 0$$

con la c equianarmonica. Ne segue (cfr. il capitolo seguente) che f è la quartica di CAPORALI specializzata, e G il G_{48} relativo.

22. Passiamo ora al caso in cui esista un triangolo invariante che assumeremo subito come fondamentale, di guisa che tutte le collineazioni di G si potranno rappresentare con sostituzioni della forma:

$$\begin{pmatrix} \alpha x_i & \beta x_h & x_k \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

dove ihk è una permutazione qualunque di 123.

Suddistinguiamo poi il caso attuale in due, a seconda che esiste, o no, in G una collineazione a periodo tre. Esista questa collineazione C. Può essere che G si componga esclusivamente delle potenze di C: se ciò non accade, discutiamo un momento l'effetto che C produce. Essa permuterà circolarmente i tre lati del triangolo invariante supposto, ovvero li terrà fissi. Quando li permuti circolarmente, C non può essere omologica: assumendo per punto unità un punto unito di C avremo

$$C \equiv \begin{pmatrix} x_2 & x_3 & x_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

e quindi f avrà la forma seguente:

$$f = a \sum_1^3 x_i^4 + b(x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1) + c(x_1 x_2^3 + x_2 x_3^3 + x_3 x_1^3)$$
$$+ d \sum_1^3 x_i^2 x_h^2 + e x_1 x_2 x_3 \sum_1^3 x_i = 0,$$

dove a, b, c, d, e sono costanti. Le altre sostituzioni di G saranno della forma (1); dovendo esse spettare a f ne segue che α e β sono radici quarte dell'unità, quando a o d sieno diverse da zero, ovvero radici settime quando si abbia $a = d = e = 0$. Per conseguenza G o coincide con G_{96} (cfr. il n° 16) oppure con G_{168} (cfr. il n° 15) o altrimenti è sottogruppo dell'uno, o dell'altro.

Quando invece la C tenga fissi i lati del triangolo invariante essa può essere omo-

logica e quindi rappresentabile con

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \alpha x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

e la f con (cfr. il n° 11)

$$x_3^3 x_1 + \varphi(x_1, x_2) = 0,$$

dove φ è binaria biquadratica in x_1, x_2. Ora si osservi che se esiste un'altra omologia ciclica di 3° ordine diversa da C, o da C^2, si perviene alla quartica di CAPORALI specializzata e quindi G è G_{48}, o gli appartiene come sottogruppo (cfr. il n° 29 del Capitolo seguente). Rimane dunque a vedere quel che accade quando C e C^2 sono le sole omologie di 3° ordine spettanti a f. Allora ogni altra collineazione di C ha la forma

$$\begin{pmatrix} \alpha x_1 & \beta x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}.$$

Esigendo la appartenenza alla f si trova anzitutto la condizione $\alpha = \beta^4$ (per la presenza indispensabile dei due termini $x_3^3 x_1$, x_2^4 altrimenti f si spezzerebbe), dopo di che si trova che, o G appartiene al G_{48}, ovvero si compone delle potenze di una stessa collineazione (non appartenente a G_{48}).

Se poi la C, pure avendo il periodo tre, non è omologica, avremo:

$$C \equiv \begin{pmatrix} \alpha x_1 & \alpha^2 x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \qquad \alpha^3 = 1 \tag{2}$$

$$f = a x_3^4 + b x_3^2 x_1 x_2 + c x_1^3 x_3 + d x_2^3 x_3 + e x_1^2 x_2^2 = 0,$$

dove a, b, c, d, e sono costanti e il triangolo fondamentale è il supposto triangolo invariante. E ora ogni altra collineazione C' di G dovendo spettare a f è della forma

$$C' \equiv \begin{pmatrix} \beta x_1 & \gamma x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

a meno che c e d non sieno uguali. Se non lo sono, si osservi che $e \neq 0$ e che, d'altra parte, uno almeno dei due termini $x_1^3 x_3$, $x_2^3 x_3$ ci deve essere se no f si spezza; e per la stessa ragione non può mancare uno degli altri due $a x_3^4$, $b x_3^2 x_1 x_2$ e quindi si trova che G è costituito per intiero con le potenze di C'.

Se poi c e d sono uguali, si aggiunge la sostituzione:

$$\begin{pmatrix} x_2 & x_1 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

e il gruppo G è generato da quest'ultima e dalla (2) precedente. Allora, con evidente trasformazione di coordinate, tali due sostituzioni generatrici possono scriversi rispettivamente

$$\begin{pmatrix} y_2 & y_1 & y_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y_2 & y_3 & y_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

e ora manifestamente C appartiene al G_{96} (cfr. il n° 16).

23. Non resta a discutere altra ipotesi che (pure esistendo un triangolo invariante) non esista in G alcuna collineazione a periodo tre. Ne segue (Capitolo I) che il periodo r delle collineazioni di G non potrà avere valori diversi da 2, 4, 5, 8, ovvero potrà

essere qualsiasi; ma allora G si comporrà delle potenze di una stessa collineazione (n° 19). Ciò accadrà anche per $r = 5$ (cfr. il n° 13). Se $r = 8$, o G apparterrà al G_{96} o sarà il G_{96} medesimo, oppure sarà, o apparterrà al G_{16} inerente alla quartica

$$f = x_3^2 x_1 x_2 + x_1^4 + x_2^4 = 0$$

secondo le considerazioni del n° 16. E se finalmente $r = 2$ ovvero $r = 4$, è evidente la appartenenza di G al G_{96}.

24. Risulta dunque dimostrato il seguente teorema:

Se una quartica piana irriduttibile possiede un gruppo finito di collineazioni, esso è necessariamente uno dei seguenti qui sotto descritti, o gli appartiene come sottogruppo.

a) Il G_{168} d'ordine 168 della quartica di KLEIN;

b) Il G_{96} d'ordine 96 della quartica di DYCK;

c) Il G_{48} d'ordine 48 della quartica di CAPORALI *specializzata* (cfr. il Capitolo seguente).

d) Il G_{16} descritto al n° 16 e inerente alla quartica:

$$f = x_3^2 x_1 x_2 + x_1^4 + x_2^4 = 0.$$

Esso può ritenersi generato dalle due sostituzioni:

$$\begin{pmatrix} x_2 & x_1 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha x_1 & \alpha^3 x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \quad \alpha^8 = 1 \ (\alpha \text{ rad. primitiva}).$$

e) Ogni gruppo composto con le potenze di una stessa collineazione non contenuta nei gruppi precedenti. Il periodo di questa collineazione può essere 5, 6, 9, o qualunque, e i casi relativi sono descritti ai n[i] 13, 14, 17, 19.

È bene che il lettore osservi che i gruppi precedentemente indicati sono tali che niuno può essere sottogruppo del precedente quando anche (l'ordine del maggiore essendo multiplo dell'ordine del minore) potrebbe nascere il sospetto di una tale dipendenza. Così è ben noto che il G_{168} non possiede dei G_{48}. Il G_{48} non può appartenere al G_{96} (n° 27). E nemmeno il G_{16} può appartenere al G_{96} perchè nel G_8 del G_{16} non esiste la omologia ciclica a periodo 4 che esiste invece nei G_8 di G_{96}.

III.

La quartica di Caporali specializzata.

25. Fra i casi specificati dal teorema precedente ne segnaleremo uno che si è presentato in altri punti della presente memoria e che ora vogliamo considerare con qualche dettaglio mettendo in luce particolarmente il gruppo di 48 collineazioni che la curva possiede. — *Essa intanto può ritenersi caratterizzata dall'avere 4 ondulazioni in linea retta, formanti gruppo equianarmonico, con le relative tangenti di ondulazione concorrenti in un punto.* — Questo fatto mette in evidenza una particolare generazione della curva, così da poterla riguardare come caso speciale della quartica di CAPORALI. Ecco come.

È noto che tale quartica non è altro che la jacobiana di una retta r e di un fascio φ di cubiche sizigetiche: in seguito a ciò si dimostra che la stessa curva può anche considerarsi come jacobiana di una seconda retta r' e di un secondo fascio φ' di cubiche sizigetiche. Ebbene può accadere che le rette r ed r' coincidano: ciò avviene quando si prenda per retta r una delle nove polari armoniche di φ, in seguito a che tale retta è anche una polare armonica di φ'. Precisamente in tal caso la quartica si può ritenere caratterizzata dal possedere quattro ondulazioni allineate formanti gruppo equianarmonico con le tangenti di ondulazione concorrenti in un punto. Ciò costituisce quindi il caso attuale e rende ragione della adottata denominazione di quartica di Caporali specializzata [11]).

26. Assumendo per $x_3 = 0$ la retta delle ondulazioni, e su di essa [per (100), (010)] una coppia del covariante sestico del gruppo delle ondulazioni, e finalmente per (001) il punto comune alle tangenti di ondulazione, la equazione della curva può scriversi (con opportuna disposizione del punto unità)

$$f = x_3^4 + x_1^4 + x_2^4 + 2i\sqrt{3}\,x_1^2 x_2^2 = 0.$$

Essa è manifestamente priva di punti multipli, e potrebbe anche caratterizzarsi esigendo la invarianza rispetto a una omologia a periodo quattro con l'asse di omologia secante equianarmonicamente la curva.

Ciò premesso, si osservi che il gruppo delle quattro ondulazioni essendo equianarmonico, è invariante rispetto alle 12 proiettività binarie del gruppo tetraedrico. Esso può ottenersi aggiungendo al gruppo quadrinomio binario seguente:

$$\begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -x_2 & x_1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}$$

la sostituzione a periodo tre

$$\begin{pmatrix} -x_1 + ix_2 & x_1 + ix_2 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}.$$

Si hanno così, da tutti i prodotti possibili, le dodici sostituzioni del gruppo binario suddetto. Ebbene la binaria biquadratica in $x_1 x_2$ che comparisce in $f = 0$ rimane invariata per le prime 4 proiettività precedenti: per effetto delle altre si riproduce col fattore esterno $2 + 2i\sqrt{3}$. Perchè dunque tutta la f sia cambiata in sè stessa, basta alle prime quattro sostituzioni binarie aggiungere x_3 trasformantesi in αx_3 dove α è radice quarta di uno e, alle otto rimanenti, x_3 trasformantesi in $\sqrt[4]{2 + 2i\sqrt{3}}$. Siccome tanto α quanto $\sqrt[4]{2 + 2i\sqrt{3}}$ hanno 4 valori, avremo in tutto 48 proiettività ternarie costituenti il gruppo cercato G_{48}.

Si può dunque dire:

La quartica di Caporali *specializzata è invariante rispetto a un gruppo di 48*

---

[11]) Cfr. [8]).

collineazioni piane che è isomorfo meriedrico al gruppo del tetraedro. Per rappresentare geometricamente i 4 elementi fondamentali su cui opera il gruppo tetraedrico suddetto, si possono assumere le 4 ondulazioni allineate della curva.

27. Per mettere in evidenza le collineazioni a periodo dodici possedute dalla curva, osserviamo che il gruppo delle ondulazioni può rappresentarsi con $x_1^4 + x_1 x_2^3 = 0$. Basta collocare i due punti fondamentali su $x_3 = 0$ così: l'uno sulla curva e l'altro sul punto polare rispetto alle altre intersezioni di f con $x_3 = 0$. Scegliendo opportunamente il punto unità, la f può scriversi

$$f = x_3^4 + x_1^4 + x_1 x_2^3 = 0$$

e ora è manifesta la invarianza di f rispetto alla seguente collineazione a periodo 12

$$C \equiv \begin{pmatrix} \alpha^4 x_1 & x_2 & \alpha x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix},$$

dove α è radice primitiva di $z^{12} = 1$. È questo il caso del n° 18. Si può quindi dire:

La curva attuale è l'unica quartica irriduttibile dotata di collineazioni a periodo 12.

La presenza di questa collineazione potrebbe servire a caratterizzare la curva. È notevole che C^3, C^4, C^6 sieno tutte e tre omologiche col periodo rispettivo 4, 3, 2. Si può dunque aggiungere che *la nostra curva costituisce il solo esempio possibile di quartica dotata contemporaneamente delle 3 specie di omologie che una quartica possa possedere* (n° 1).

Dal momento che il G_{48} attuale possiede collineazioni a periodo 12 è manifesto che esso non possa essere sottogruppo di G_{96}, perchè in G_{96} non esistono sicuramente tali collineazioni.

28. Riprendiamo le omologie C^3 e C^4 del n° precedente. L'asse della prima taglia f in 4 ondulazioni formanti gruppo equianarmonico, l'asse della seconda taglia f in 4 flessi formanti un gruppo armonico. Le 4 tangenti di ondulazione concorrono in un punto del 2° asse, le 4 tangenti di flesso concorrono in un punto del 1°. Il punto di concorso delle tangenti di flesso non solo esiste sulla retta delle ondulazioni ma coincide con una determinata di queste: il punto di concorso delle tangenti di ondulazione è sulla retta dei flessi ma naturalmente non appartiene a f. Se si considera come è costruito il triangolo fondamentale del n° precedente, si vede che si può costruirne altri tre in uguali condizioni. Essi hanno a comune un vertice e il lato opposto (centro e asse della omologia a periodo 4): gli altri due vertici sono costituiti, per ciascun triangolo, da una ondulazione e dal suo punto polare rispetto alle tre rimanenti:

Esistono dunque in G_{48} quattro sottogruppi G_{12} composti ciascuno dalle potenze di una collineazione a periodo 12.

Infine le proprietà dei flessi possono riassumersi nel seguente enunciato:

La quartica di CAPORALI *specializzata possiede 4 ondulazioni e 16 flessi. Le 4 ondulazioni compongono un gruppo equianarmonico su di una retta e le tangenti relative concorrono in un punto. I 16 flessi compongono 4 gruppi armonici sopra 4 rette di un fascio equianarmonico che ha per centro il punto comune alle tangenti di ondulazione*

suddette. Le 4 tangenti dei 4 flessi di un gruppo armonico concorrono in un punto di ondulazione così che ogni gruppo armonico di 4 flessi è coordinato a un punto di ondulazione.

La curva possiede 12 omologie di cui 7 a periodo 2, una a periodo 4 e quattro a periodo 3.

29. Finalmente osserveremo che se una quartica irriduttibile possiede due omologie a periodo tre (che non siano l'una il quadrato dell'altra) la curva è necessariamente l'attuale.

Infatti se f possiede una omologia a periodo tre l'equazione potrà scriversi (n° 1)

$$x_3^3 x_1 + \varphi(x_1, x_2) = 0,$$

dove φ è binaria biquadratica in $x_1 x_2$. Il centro d'omologia (001) è punto di ondulazione con $x_1 = 0$ tangente relativa: l'asse d'omologia è $x_3 = 0$. La cubica polare del centro si compone dell'asse contato due volte e della *tangente* suddetta. Questo dimostra che se esiste un'altra omologia a periodo tre, che non sia il quadrato di quella già esistente, è impossibile la coincidenza dei due centri delle due omologie medesime, come pure è impossibile che il centro della 2ª omologia esista sopra $x_3 = 0$ [perchè questo centro è punto di ondulazione, mentre i punti comuni a $x_3 = 0$ e a f sono flessi e al più punti singolari (n° 11)]. Segue che il centro della 2ª omologia non è unito per la prima, per cui applicando la prima al centro della 2ª, troveremo 4 ondulazioni in linea retta formanti gruppo equianarmonico e con le tangenti relative concorrenti nel punto comune agli assi delle due omologie, il che caratterizza precisamente la quartica di Caporali specializzata.

Quinto al mare, febbrajo 1909.

EDGARDO CIANI.

SUR LA RÉDUCTIBILITÉ DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES ET LES NOMBRES EXPONENTIELS.

Note de M. **Georges Rémoundos** (Athènes).

Adunanza del 28 marzo 1909.

1. Ce travail fait la suite d'un autre publié dans le même recueil [1]) et contenant des résultats, dont je tiens à répéter ici les énoncés avant d'aller plus loin; je répéterai ces énoncés sous une forme plus commode et plus abrégée, en employant les dénominations suivantes:

Nous dirons que l'équation algébrique:

$$f(x, y) = 0 \tag{1}$$

admet *une solution exponentielle d'ordre n*, si elle est satisfaite par des valeurs de la forme:

$$\begin{cases} x = a_0 + a_1 e^{\alpha_1} + a_2 e^{\alpha_2} + \cdots + a_n e^{\alpha_n} \\ y = b_0 + b_1 e^{\alpha_1} + b_2 e^{\alpha_2} + \cdots + b_n e^{\alpha_n}, \end{cases} \tag{2}$$

les coefficients a_i, b_i étant des nombres algébriques, ainsi que les exposants α_i; nous supposons encore que le nombre des termes exponentiels ne puisse pas être inférieur à n pour une, au moins, des valeurs (2). Dans mon travail précédent, j'ai établi les théorèmes suivants:

I. *Toute équation algébrique à coefficients algébriques admettant une solution exponentielle de la forme:* $x = a e^{\alpha}$, $y = b e^{\beta}$ *est binôme.* La réciproque est aussi vraie. C'est le premier théorème.

II. *Pour qu'il existe une substitution linéaire de la forme:*

$$\begin{cases} x = \gamma x' + \delta y' + \lambda \\ y = \gamma' x' + \delta' y' + \lambda' \end{cases} \tag{3}$$

transformant une équation algébrique à coefficients algébriques en une autre binôme (à coefficients aussi algébriques) il faut et il suffit qu'elle admette une solutiou exponentielle d'ordre 2.

Les coefficients de la substitution (3) sont aussi supposés algébriques. C'est le second théorème.

---

[1]) *Sur la réductibilité des équations algébriques par des substitutions linéaires* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXVII (1° semestre 1909), pp. 272-280].

Je tiens d'abord à donner une explication nécessaire pour la démonstration de notre premier théorème: Nous avons démontré [2]) que, si l'équation algébrique est satisfaite par les valeurs:

$$x = a e^{\alpha}, \qquad y = a e^{\beta},$$

elle est aussi satisfaite par toutes les solutions de l'équation binôme:

$$\frac{x^p}{y^q} = \frac{a^p}{b^q} e^{\alpha p - \beta q}.$$

J'ai oublié, alors, de remarquer que cette équation binôme est aussi à coefficients algébriques (ce qui est absolument nécessaire); or cela est évident parce que l'exposant $\alpha p - \beta q$ est nul d'après la relation:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{p}{q}$$

écrite dans ma Note citée et définissant la fraction irréductible $\frac{p}{q}$.

L'équation donnée admet, donc, toutes les solutions de l'équation binôme:

$$\frac{x^p}{y^q} = \frac{a^p}{b^q}. \tag{4}$$

L'équation donnée étant supposée irréductible, nous en concluons qu'elle est tout à fait équivalente à l'équation binôme (4).

L'importance du premier théorème est visible, parce qu'il montre que la propriété d'admettre une solution exponentielle de la forme: $x = a e^{\alpha}$, $y = b e^{\beta}$ est caractéristique pour les équations binômes.

Si une équation algébrique admet une solution de la forme:

$$x = a_0 + a e^{\alpha}, \qquad y = b_0 + b e^{\beta},$$

les nombres a_0, b_0 étant aussi algébriques, la substitution $x = a_0 + x'$, $y = b_0 + y'$ nous ramène à une équation binôme admettant la solution:

$$x' = a e^{\alpha}, \qquad y' = b e^{\beta}.$$

Le second théorème nous fournit une condition *arithmétique* nécessaire et suffisante pour qu'une équation algébrique à coefficients algébriques puisse se ramener à une équation binôme par une substitution linéaire de la forme (3) à coefficients algébriques.

Il est vrai que la recherche d'une telle substitution peut bien se faire par des méthodes bien simples et que ce problème peut se ramener à certaines relations algébriques, auxquelles doivent satisfaire les coefficients algébriques de la substitution cherchée, mais nous n'avons pas de cette manière une condition *générale* et *simple*, nécessaire et suffisante; à ce point de vue le théorème II offre un véritable intérêt et il est curieux qu'il donne une condition de ce problème essentiellement algébrique moyennant une solution transcendante de l'équation algébrique.

Très souvent notre théorème II présente de l'intérêt pratique et donne lieu à des

[2]) Loc. cit. [1]).

applications utiles: cela arrive dans les cas où nous pouvons trouver facilement une solution exponentielle d'ordre 2 pour l'équation donnée; dans les autres cas, il faut avouer que l'utilité pratique est très petite, puisque la recherche d'une solution exponentielle peut présenter des difficultés considérables; mais son intérêt théorique est *général* et digne d'attention à cause de la condition simple qu'il fournit, condition exprimée moyennant ces nombres transcendants élémentaires, que j'ai appelés *exponentiels*.

Je tiens à faire connaître, pour abréger le langage, que nous continuerons dans la suite à ne considérer que des équations à *coefficients algébriques*.

Abordons maintenant les nouveaux résultats, que je me propose de développer dans ce travail.

Les solutions exponentielles d'ordre supérieur à deux.

2. Dans ma Note précédente je n'ai utilisé que les solutions exponentielles d'ordre 1 et 2. Il est maintenant naturel de poser la question suivante: *Quelle sera l'utilité des solutions exponentielles d'ordre supérieur à deux au point de vue de la réductibilité des équations algébriques à deux variables?* Pour en faire un emploi, nous passerons au langage géométrique, en supposant que x et y soient les coordonnées rectilignes des points de la courbe:

$$f(x, y) = 0. \tag{5}$$

Nous ferons voir qu'il faut passer à des espaces supérieurs (à plus de dimensions) pour avoir un résultat analogue à celui que nous avons obtenu par les solutions exponentielles d'ordre *deux* ou *un*.

Supposons, d'abord, que les coordonnées d'un point de la courbe (5) soient de la forme:

$$\left\{\begin{aligned} x &= a_0 + a_1 e^{\alpha_1} + a_2 e^{\alpha_2} + a_3 e^{\alpha_3} \\ y &= b_0 + b_1 e^{\alpha_1} + b_2 e^{\alpha_2} + b_3 e^{\alpha_3}, \end{aligned}\right. \tag{5'}$$

ces valeurs étant des nombres exponentiels d'ordre *trois*.

Nous passons, alors, à l'espace à trois dimensions, et nous considérons la courbe donnée comme l'intersection de la surface cylindrique (5) et d'une autre surface:

$$\varphi(x, y, z) = 0 \tag{6}$$

choisie de façon à avoir un point dont les coordonnées soient:

$$\left\{\begin{aligned} x &= a_0 + a_1 e^{\alpha_1} + a_2 e^{\alpha_2} + a_3 e^{\alpha_3} \\ y &= b_0 + b_1 e^{\alpha_1} + b_2 e^{\alpha_2} + b_3 e^{\alpha_3} \\ z &= c_0 + c_1 e^{\alpha_1} + c_2 e^{\alpha_2} + c_3 e^{\alpha_3}, \end{aligned}\right. \tag{7}$$

les nombres c_0, c_1, c_2, c_3 étant aussi algébriques; les valeurs de x et y sont égaux aux nombres (5'). L'équation (6) ainsi choisie sera appelée *adjointe* à l'équation donnée (5).

Ainsi, dans l'espace à trois dimensions, la courbe aura les équations:

$$(8) \qquad \begin{cases} f(xy) = 0 \\ \varphi(xyz) = 0, \end{cases}$$

qui seront satisfaites par les valeurs (7). Si, donc, nous effectuons la substitution:

$$(9) \qquad \begin{cases} x = a_0 + a_1 x' + a_2 y' + a_3 z' \\ y = b_0 + b_1 x' + b_2 y' + b_3 z' \\ z = c_0 + c_1 x' + c_2 y' + c_3 z', \end{cases}$$

les équations transformées seront satisfaites par les valeurs:

$$x' = e^{\alpha_1}, \qquad y' = e^{\alpha_2}, \qquad z' = e^{\alpha_2}.$$

En effet, les valeurs de x', y', z' correspondant au point ayant les coordonnées (7) satisferont évidemment aux relations:

$$(10) \qquad \begin{cases} a_1(x' - e^{\alpha_1}) + a_2(y' - e^{\alpha_2}) + a_3(z' - e^{\alpha_3}) = 0 \\ b_1(x' - e^{\alpha_1}) + b_2(y' - e^{\alpha_2}) + b_3(z' - e^{\alpha_3}) = 0 \\ c_1(x' - e^{\alpha_1}) + c_2(y' - e^{\alpha_2}) + c_3(z' - e^{\alpha_3}) = 0. \end{cases}$$

Si, donc, nous supposons que le déterminant:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro, les relations (10) nous donnent:

$$x' = e^{\alpha_1}, \qquad y' = e^{\alpha_2}, \qquad z' = e^{\alpha_3}$$

et ces valeurs satisferont aux nouvelles équations de la courbe.

Nous remarquons maintenant que nous pouvons bien remplacer la substitution (9) par une autre plus générale, à savoir:

$$(11) \qquad \begin{cases} x = a_0 + g_1 a_1 x' + g_2 a_2 y' + g_3 a_3 z' \\ y = b_0 + g_1 b_1 x' + g_2 b_2 y' + g_3 b_3 z' \\ z = c_0 + g_1 c_1 x' + g_2 c_2 y' + g_3 c_3 z', \end{cases}$$

les g_1, g_2, g_3 désignant des nombres *algébriques quelconques.*

Au moyen de cette substitution, les valeurs des x', y', z' correspondant au point ayant les coordonnées (7) seront égales, $x' = \frac{1}{g_1} e^{\alpha_1}$, $y' = \frac{1}{g_2} e^{\alpha_2}$, $z' = \frac{1}{g_3} e^{\alpha_3}$, et satisferont aux nouvelles équations de la courbe:

$$(12) \qquad \begin{cases} \sigma_1(x'y'z') = 0 \\ \sigma_2(x'y'z') = 0. \end{cases}$$

En supposant les axes primitifs rectangulaires, nous pouvons choisir les nombres algébriques g_1, g_2, g_3 de façon que les formules (11) définissent un changement de coordonnées; nous n'avons, en effet, qu'à prendre:

$$(13) \quad g_1 = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}, \qquad g_2 = \frac{1}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}, \qquad g_3 = \frac{1}{\sqrt{a_3^2 + b_3^2 + c_3^2}}.$$

Nous remarquons maintenant que le système des équations transformées (12) est toujours équivalent à un système d'équations:

$$F(x'y') = 0, \qquad \Sigma(x'z') = 0 \tag{14}$$

à deux variables, qui seront aussi satisfaites par les valeurs:

$$x' = \frac{1}{g_1} e^{\alpha_1}, \qquad y' = \frac{1}{g_2} e^{\alpha_2}, \qquad z' = \frac{1}{g_3} e^{\alpha_3}.$$

Ces équations (14) seront, donc, *binômes*, d'après notre premier théorème; les équations (12) et (14) sont, en effet, irréductibles en même temps que les équations (8), puisque la transformation (9) est évidemment birationnelle.

Nous voyons, donc, que, s'il y a une équation adjointe à l'équation donnée de la courbe, il est toujours possible de représenter la courbe par des équations binômes en passant à l'espace à trois dimensions et à l'aide d'une substitution linéaire de la forme (11). Nous en concluons que le problème de la représentation d'une courbe par des équations binômes à l'aide de l'espace à trois dimensions remplaçant le plan de la courbe dépend du problème de l'existence d'une équation *adjointe* à l'équation donnée de la courbe dans le sens ci-dessus donné.

Si nous considérons maintenant une équation:

$$f(xy) = 0 \tag{15}$$

admettant une solution exponentielle d'ordre n

$$\begin{cases} x = a_0 + a_1 e^{\alpha_1} + a_2 e^{\alpha_2} + \cdots + a_n e^{\alpha_n} \\ y = b_0 + b_1 e^{\alpha_1} + b_2 e^{\alpha_2} + \cdots + b_n e^{\alpha_n}, \end{cases} \tag{16}$$

nous pouvons représenter la courbe en question par des équations binômes à l'aide de l'hyperespace à n dimensions (si $n > 3$) dans le cas où il existe $n - 2$ équations *adjointes* dans le sens ci-dessus indiqué, c'est-à-dire admettant des solutions exponentielles n'ayant d'autres exposants que ceux des formules (16); soient:

$$\begin{cases} z_1 = c_{10} + c_{11} e^{\alpha_1} + c_{12} e^{\alpha_2} + \cdots + c_{1n} e^{\alpha_n} \\ z_2 = c_{20} + c_{21} e^{\alpha_1} + c_{22} e^{\alpha_2} + \cdots + c_{2n} e^{\alpha_n} \\ z_3 = c_{30} + c_{31} e^{\alpha_1} + c_{32} e^{\alpha_2} + \cdots + c_{3n} e^{\alpha_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_{n-2} = c_{n-2,0} + c_{n-2,1} e^{\alpha_1} + c_{n-2,2} e^{\alpha_2} + \cdots + c_{n-2,n} e^{\alpha_n} \end{cases} \tag{17}$$

les valeurs exponentielles des nouvelles coordonnées; alors la substitution:

$$\begin{cases} x = a_0 + a_1 z'_1 + a_2 z'_2 + \cdots + a_n y' \\ y = b_0 + b_1 z'_1 + b_2 z'_2 + \cdots + b_n y' \\ z_1 = c_{10} + c_{11} z'_1 + c_{12} z'_2 + \cdots + c_{1n} y' \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \tag{18}$$

fournit des équations binômes pour la courbe dans l'espace à n dimensions.

La question suivante se pose maintenant:

Existe-t-il toujours des équations adjointes d'une équation admettant une solution exponentielle d'ordre supérieur à deux?

Il nous est maintenant impossible de donner une réponse générale à cette question et d'affirmer l'existence des équations adjointes d'une façon générale. Nous pourrons cependant prouver l'existence de telles équations dans certains cas étendus et intéressants.

Existence des équations adjointes.

3. Supposons que les rapports $\alpha_2:\alpha_1$, $\alpha_3:\alpha_1$, $\alpha_4:\alpha_1$, ..., $\alpha_n:\alpha_1$ des exposants de la solution exponentielle (16) soient des nombres commensurables et réels et écrivons:

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1}=\mu_2, \quad \frac{\alpha_3}{\alpha_1}=\mu_3, \quad \frac{\alpha_4}{\alpha_1}=\mu_4, \ \ldots, \ \frac{\alpha_n}{\alpha_1}=\mu_n.$$

Cela posé, il est facile de voir que l'équation de forme parabolique:

$$(19) \qquad x=a_0+a_1 z+a_2 z^{\mu_2}+a_3 z^{\mu_3}+\cdots+a_n z^{\mu_n}$$

est bien *adjointe* de l'équation donnée, puisque elle admet la solution:

$$z=e^{\alpha_1}, \qquad x=a_0+a_1 e^{\alpha_1}+a_2 e^{\alpha_2}+a_3 e^{\alpha_3}+\cdots+a_n e^{\alpha_n}.$$

Nous avons, en effet:

$$a_0+a_1 e^{\alpha_1}+a_2 e^{\mu_2\alpha_1}+a_3 e^{\mu_3\alpha_1}+\cdots+a_n e^{\mu_n\alpha_1}=a_0+a_1 e^{\alpha_1}+a_2 e^{\alpha_2}+\cdots+a_n e^{\alpha_n}$$

grâce aux relations:

$$\alpha_2=\alpha_1\mu_2, \quad \alpha_3=\alpha_1\mu_3, \quad \alpha_4=\alpha_1\mu_4, \ \ldots, \ \alpha_n=\alpha_1\mu_n.$$

De plus, l'équation (19) est visiblement algébrique parce que les exposants μ_2, μ_3, ..., μ_n sont, par hypothèse, des nombres rationnels.

Pour la même raison l'équation:

$$(19) \qquad x=b_0+b_1 z+b_2 z^{\mu_2}+b_3 z^{\mu_3}+\cdots+b_n z^{\mu_n}$$

est aussi *adjointe* de l'équation donnée.

En utilisant donc l'adjointe (19) et, par conséquent, la substitution:

$$(20) \qquad \begin{cases} x=a_0+a_1 x'+a_2 y'+a_3 z' \\ y=b_0+b_1 x'+b_2 y'+b_3 z' \\ z=x', \end{cases}$$

nous obtenons des équations binômes pour la courbe en question. Nous pouvons toujours, bien entendu, choisir quelques nombres algébriques g_1, g_2, g_3 de façon que la substitution utilisée définisse un changement de coordonnées. Pour pouvoir conclure que les équations transformées de la courbe admettront la solution: $x'=e^{\alpha_1}$, $y'=e^{\alpha_2}$, $z'=e^{\alpha_3}$, ou bien:

$$x'=\frac{1}{g_1}e^{\alpha_1}, \qquad y'=\frac{1}{g_2}e^{\alpha_2}, \qquad z'=\frac{1}{g_3}e^{\alpha_3},$$

il faut supposer que l'un, au moins, des déterminants:

$$(21) \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro; nous pouvons même démontrer qu'il n'y a pas besoin de faire cette hypothèse, puisque, si tous les déterminants ci-dessus indiqués étaient nuls, il y aurait une relation algébrique à coefficients algébriques entre les deux valeurs de la solution exponentielle: Nous aurions, en effet, $\frac{b_1}{\alpha_1} = \frac{b_2}{\alpha_2} = \frac{b_3}{\alpha_3} = q$, q étant un nombre algébrique.

Il en résulte:

$$b_0 + b_1 e^{\alpha_1} + b_2 e^{\alpha_2} + b_3 e^{\alpha_3} = b_0 + q(a_1 e^{\alpha_1} + a_2 e^{\alpha_2} + a_3 e^{\alpha_3}),$$

ou bien:

$$y_1 = b_0 + q(x_1 - a_0), \tag{22}$$

x_1 et y_1 désignant les deux valeurs de la solution exponentielle considérée; mais alors l'élimination de y_1 entre l'équation (22) et l'équation:

$$f(x_1 y_1) = 0$$

nous démontrerait que le nombre x_1 ne saurait être transcendant, ce qui est contraire à notre hypothèse.

En utilisant donc une équation adjointe *parabolique,* nous pouvons bien résoudre le problème de la représentation par des équations binômes pour le cas d'une solution exponentielle d'ordre 3.

Passons maintenant au cas de $n = 4$, en supposant l'existence de la solution exponentielle:

$$x = a_0 + a_1 e^{\alpha_1} + a_2 e^{\alpha_2} + a_3 e^{\alpha_3} + a_4 e^{\alpha_4}$$
$$y = b_0 + b_1 e^{\alpha_1} + b_2 e^{\alpha_2} + b_3 e^{\alpha_3} + b_4 e^{\alpha_4}.$$

Les deux adjointes paraboliques:

$$\left\{\begin{aligned} x &= a_0 + a_1 z + a_2 z^{\mu_2} + a_3 z^{\mu_3} + a_4 z^{\mu_4} \\ y &= b_0 + b_1 u^{m_1} + b_2 u + b_3 u^{m_3} + b_4 u^{m_4}, \end{aligned}\right. \tag{23}$$

où l'on a:

$$\mu_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \quad \mu_3 = \frac{\alpha_3}{\alpha_1}, \quad \mu_4 = \frac{\alpha_4}{\alpha_1}, \quad m_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \quad m_3 = \frac{\alpha_3}{\alpha_2}, \quad m_4 = \frac{\alpha_4}{\alpha_2},$$

suffisent bien pour que l'emploi de *l'espace à quatre dimensions* fournisse un système d'équations en x, y, z, u admettant la solution:

$$\left\{\begin{aligned} x &= a_0 + a_1 e^{\alpha_1} + a_2 e^{\alpha_2} + a_3 e^{\alpha_3} + a_4 e^{\alpha_4} \\ y &= b_0 + b_1 e^{\alpha_1} + b_2 e^{\alpha_2} + b_3 e^{\alpha_3} + b_4 e^{\alpha_4} \\ z &= e^{\alpha_1} \\ u &= e^{\alpha_2}. \end{aligned}\right. \tag{24}$$

En utilisant donc la substitution (changement de coordonnées):

$$x = a_0 + g_1 a_1 x' + g_2 a_2 y' + g_3 a_3 z' + g_4 a_4 u'$$
$$y = b_0 + g_1 b_1 x' + g_2 b_2 y' + g_3 b_3 z' + g_4 b_4 u'$$
$$z = g_1 x'$$
$$u = g_2 y',$$

les nombres g_1, g_2, g_3, g_4 étant convenablement choisis (*voir* le n° 2) nous obtenons des équations transformées satisfaites par les valeurs :

$$x' = \frac{1}{g_1} e^{\alpha_1}, \qquad y' = \frac{1}{g_2} e^{\alpha_2}, \qquad z' = \frac{1}{g_3} e^{\alpha_3}, \qquad u' = \frac{1}{g_4} e^{\alpha_4}$$

et, par conséquent, des équations *binômes* de la courbe en question, conformément à notre premier théorème, dans *l'espace à quatre dimensions.*

S'il s'agit d'une solution exponentielle d'ordre supérieur à *quatre,* les deux équations adjointes paraboliques ne suffisent pas évidemment pour notre problème; malheureusement il n'est pas facile d'en indiquer d'autres.

Le problème de l'emploi des espaces supérieurs pour représenter par des équations binômes une courbe plane est donc résolu pour le cas des solutions exponentielles d'ordre trois et quatre avec la seule restriction que les rapports des exposants entre eux doivent être des nombres commensurables.

Courbes paraboliques.

4. Appelons *paraboliques* les courbes données par une équation de la forme :

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots + A_\rho x^\rho = Q_\rho(x), \tag{25}$$

$Q_\rho(x)$ désignant un polynôme quelconque en x du degré ρ et à coefficients algébriques. L'équation (25) admet toujours une infinité de solutions exponentielles d'ordre ρ de la forme :

$$x = e^\alpha, \qquad y = A_0 + A_1 e^\alpha + A_2 e^{2\alpha} + A_3 e^{3\alpha} + \cdots + A_\rho e^{\rho\alpha}, \tag{26}$$

α étant un nombre algébrique quelconque.

Toute équation de la même forme (25) peut servir d'équation adjointe pour l'équation (25); nous n'avons donc qu'à employer l'espace à ρ dimensions en prenant comme *adjointes* les équations suivantes :

$$\begin{aligned} z_1 &= a_{1,0} + a_{1,1} x + a_{1,2} x^2 + \cdots + a_{1,\rho} x^\rho \\ z_2 &= a_{2,0} + a_{2,1} x + a_{2,2} x^2 + \cdots + a_{2,\rho} x^\rho \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_{\rho-2} &= a_{\rho-2,0} + a_{\rho-2,1} x + a_{\rho-2,2} x^2 + \cdots + a_{\rho-2,\rho} x^\rho, \end{aligned}$$

les nombres a_{ij} étant algébriques et tels que les déterminants du tableau

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_\rho \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\rho} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\rho} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\rho-2,1} & a_{\rho-2,2} & \cdots & a_{\rho-2,\rho} \end{vmatrix}$$

d'ordre $\rho - 1$ ne soient pas tous nuls. En faisant donc la substitution :

$$\begin{aligned}
x &= g_1 x' \\
y &= A_0 + A_1 g_1 x' + A_2 g_2 y' + A_3 g_3 z_1' + \cdots \\
z_1 &= a_{10} + a_{11} g_1 x' + a_{12} g_2 y' + a_{13} g_3 z_1' + \cdots \\
z_2 &= a_{20} + a_{21} g_1 x' + a_{22} g_2 y' + a_{23} g_3 z_1' + \cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ,
\end{aligned}$$

nous obtiendrons $n - 1$ équations binômes à deux coordonnées chacune. Nous avons, donc, le théorème suivant :

Une courbe parabolique, peut toujours, à l'aide d'un espace supérieur, se représenter par des équations binômes. Si l'équation donnée est du dégré ρ, il faut avoir recours à l'espace à ρ dimensions.

Cela tient à ce que une équation parabolique du degré ρ admet toujours des solutions exponentielles d'ordre ρ et une infinité d'équations adjointes.

Il y aussi d'autres courbes pour lesquelles le problème de la représentation par des équations binômes est toujours possible et peut se résoudre comme pour les courbes paraboliques : c'est toutes les courbes planes dont l'équation admet une solution exponentielle de la forme :

$$x = A e^{\alpha_1}, \qquad y = a_0 + a_1 e^{\alpha_1} + a_2 e^{\alpha_2} + \cdots + a_n e^{\alpha_n},$$

la valeur d'une coordonnée ne contenant qu'un terme exponentiel ; on passera à un espace supérieur en employant des équations adjointes paraboliques du degré n.

Dans ces recherches il y a un fait remarquable digne d'appeler l'attention des mathématiciens, c'est que, dans les cas des solutions exponentielles d'ordre supérieur à *deux*, le plan de la courbe ne suffit pas pour la représenter par une équation binôme et que l'emploi de l'espace à trois dimensions, au lieu du plan, ou bien des hyperespaces nous permet d'obtenir une représentation de la courbe par des équations binômes.

Ce n'est pas la première fois où l'emploi des espaces supérieurs donne lieu à des réductions ou à des simplifications dans la théorie des courbes et des surfaces. Nous savons, par exemple, qu'à une surface algébrique quelconque de l'espace à trois dimensions on peut faire correspondre d'une manière birationnelle une surface n'ayant pas des points singuliers dans un espace à cinq dimensions [3]).

Nous remarquons aussi que, lorsque l'existence d'une solution exponentielle nous permet de conclure la possibilité de représenter la courbe par des équations binômes, soit en restant dans son plan soit en passant à un espace supérieur, nous avons en même temps d'une façon explicite la substitution linéaire nécessaire pour obtenir cette représentation.

---

[3]) Picard et Simart, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes* (Paris, Gauthier-Villars, 1897), t. I, page 80.

Les courbes gauches et les courbes des hyperespaces.

5. Dans notre Note précédente deja citée nous avons aussi envisagé des courbes gauches ou des courbes des hyperespaces, dont les équations admettent une solution exponentielle d'ordre égal au nombre des dimensions de l'espace considéré, et nous avons établi une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système de n équations à $n+1$ inconnues puisse se transformer en un système d'équations binômes moyennant une substitution linéaire entière [4]).

Dans les cas où les équations d'une courbe d'un espace à n dimensions admettent une solution exponentielle d'ordre supérieur à n, il faut avoir recours à un espace *supérieur* (à plus de dimensions) en employant des équations adjointes dans le sens indiqué dans les paragraphes précédents; les méthodes étant les mêmes, je crois qu'il est inutile d'y insister encore; nous obtiendrons ainsi, lorsque nous pouvons trouver un nombre suffisant d'équations *adjointes* au système donné d'équations de la courbe, des équations binômes pour la courbe en question.

6. Nous terminerons en faisant une remarque utile concernant notre théorème II de la première Note: La démonstration, que nous y avons exposée, fait voir que l'existence d'une solution exponentielle d'ordre *deux*

$$(27)\qquad \begin{cases} x_1 = a_0 + a_1 e^{\alpha_1} + a_2 e^{\alpha_2} \\ y_1 = b_0 + b_1 e^{\alpha_1} + b_2 e^{\alpha_2} \end{cases}$$

entraine la réductibilité en équation binôme, si le déterminant:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

est différent de zéro. Mais nous pouvons démontrer que cette hypothèse est toujours réalisée, parce qu'elle est une conséquence de l'existence de la solution (27). Si, en effet, nous avions:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire: $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = r$, r étant un nombre algébrique, la valeur:

$$y_1 = b_0 + b_1 e^{\alpha_1} + b_2 e^{\alpha_2}$$

pourrait s'écrire:

$$y_1 = b_0 + r(a_1 e^{\alpha_1} + a_2 e^{\alpha_2}) = b_0 + r(x_1 - a_0)$$

et, par conséquent, il y aurait une relation algébrique entre les valeurs x_1 et y_1, et la valeur exponentielle (transcendante) x_1 satisferait à une équation:

$$\theta(x) = 0$$

algébrique à coefficients algébriques, ce qui est visiblement absurde.

---

[4]) Loc. cit. [1]), pages 278 et 279.

On voit, donc, que nous n'avons besoin d'aucune restriction pour le Théorème II (*voir* le n° 1 de cette Note).

Ces recherches sont aussi intéressantes pour la théorie des nombres, parce que les équations qui n'admettent aucune solution exponentielle constituent une source féconde de nouveaux nombres transcendants.

Athènes, le 14 janvier 1909.

GEORGES RÉMOUNDOS.

UNA NUOVA DIMOSTRAZIONE DI UN TEOREMA DEL SIG. BOREL.

Nota di **Giuseppe Bagnera** (Palermo).

Adunanza del 9 maggio 1909.

Sia E un insieme *chiuso* di punti $P(x, y, \ldots, z)$ contenuti in un dominio parallelepipedo di lato L; sia d'altra parte Ω un insieme di dominii tale che ogni punto di E risulti *interno* ad uno almeno di essi.

Si tratta di dimostrare che è possibile scegliere *in* Ω un numero *finito* di dominii tali che ogni punto di E sia interno ad uno di questi.

Sia
$$\delta_1, \quad \delta_2, \ldots$$
una successione di numeri positivi tendente a zero, e supponiamo che per *ogni* δ_n si possa trovare un punto P_n di E tale che il dominio parallelepipedo di centro P_n e di lato $2\delta_n$ *non sia tutto interno a nessuno* dei dominii di Ω che comprendono il punto P_n.

I punti $P_1, P_2, \ldots$ ammettono un punto limite P_0 che appartiene pure ad E, e per questo punto P_0 non sarebbe evidentemente possibile assegnare alcun dominio di Ω al quale P_0 sia *interno*.

Esiste dunque un $\delta_n = \delta$ tale che per *qualsivoglia* punto P di E, il dominio parallelepipedo di centro P e di lato 2δ è interno ad *uno almeno* dei dominii di Ω che comprendono P.

Ciò posto, si divida il dominio parallelepipedo di lato L, che comprende tutti i punti di E, in dominii parallelepipedi di lato δ, e fra questi si considerino soltanto quelli:
$$D_1, \quad D_2, \ldots, D_s$$
che contengono punti di E. Siano poi $P_1, P_2, \ldots, P_s$ punti di E scelti a piacere in questi dominii rispettivamente, e per ogni punto P_i si consideri un dominio Ω_i di Ω che contenga nel suo interno il dominio parallelepipedo di centro P_i e di lato 2δ. Il dominio Ω_i contiene internamente D_i, e quindi, qualsivoglia punto di E è interno ad uno dei dominii
$$\Omega_1, \quad \Omega_2, \ldots, \Omega_s.$$

Il sig. Borel ha dato il teorema nel caso che E sia un intervallo e che Ω sia un insieme numerabile di segmenti; il teorema è stato poi generalizzato da altri sempre per insiemi E ad una dimensione.

Palermo, 9 maggio 1909.

G. Bagnera.

IL TEOREMA DELLA PROBABILITÀ COMPOSTA E LA DEFINIZIONE DESCRITTIVA DI PROBABILITÀ.

Nota di **Ugo Broggi** (Buenos-Aires).

Adunanza del 14 febbrajo 1909.

È necessario si postuli il valere del teorema della probabilità composta quando la probabilità di un evento sia definita descrittivamente come la grandezza positiva sodisfacente le condizioni:

1° è uno la probabilità di un evento certo;

2° è zero la probabilità di un evento impossibile;

3° se un evento si presenta col presentarsi dell'uno o dell'altro di due eventi escludentisi, la sua probabilità è uguale alla somma delle probabilità di questi;

e non sia data dal concetto di evento nè la determinazione consueta nel calcolo delle probabilità, fondata sull'ammissione di un complesso di casi ugualmente possibili, nè altra definizione più ristretta della seguente: « evento è ciò che può accadere o può non accadere », « evento certo è ciò che necessariamente accade », « evento impossibile è ciò che non può accadere » ? Risponde affermativamente il Bohlmann [1]), che alle tre proposizioni primamente formulate ne aggiunge una quarta (il teorema della probabilità composta):

4° se è p_1 la probabilità di un evento E_1, $p_{1,2}$ la probabilità che si verifichi così E_1 come un altro evento E_2, è $\frac{p_{1,2}}{p_1}$ una probabilità, e precisamente la probabilità che si verifichi E_2 supposto verificato E_1;

e aggiunge di ritenere che nessuna delle quattro proposizioni sia superflua (possa cioè venire dedotta dalle rimanenti); negativamente il Medolaghi [2]), il quale tuttavia, s'io non m'inganno, cade in equivoco sul contenuto del teorema, di cui è qui parola. Da postulati sostanzialmente coincidenti con 1 e 3, deduce egli una proposizione, che

[1]) *Lebensversicherungs-Mathematik* [Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, I *D* 4 *b*]. — Atti del IV° Congresso Internazionale dei Matematici. (In corso di stampa).

[2]) *La logica matematica ed il calcolo delle probabilità* [Bollettino dell'Associazione degli Attuari Italiani, anno 1907, n° 18].

chiama « teorema delle probabilità composte » [3]): ma nè tale proposizione può sostituire la 4, nè altri punti del lavoro del MEDOLAGHI valgono a legittimare che, note le probabilità di eventi singoli si assuma il loro prodotto come espressione della probabilità del coverificarsi degli eventi stessi.

Ma la risposta negativa è la vera.

Basta infatti riflettere come dai concetti « evento », « evento certo », derivino le proposizioni seguenti:

Se E è un evento qualsiasi, ed F è un evento certo, è necessario e basta, perchè si verifichino entrambi, che si verifichi E;

Se E ed F sono eventi qualsiasi è parimenti un evento, che supporremo espresso da $E.F$, quello che E si verifichi, e che, essendosi verificato E, si verifichi F.

Sia a la probabilità di E, e, supposto E verificato, siano b_1 la probabilità di un evento F_1, b_2 quella di un evento F_2, F_1 ed F_2 supposti escludentisi. E sia parimenti espressa da $\varphi(x, y)$ la probabilità del coverificarsi di un evento di probabilità x e di un altro evento, la di cui probabilità, se il primo evento si è verificato, è espressa da y.

Sarà quindi $\varphi(a, b_1)$ la probabilità di $E.F_1$, $\varphi(a, b_2)$ la probabilità di $E.F_2$ e, per l'assioma 2, $\varphi(a, b_1 + b_2)$ la probabilità che si verifichi E e, che essendosi verificato E, si verifichi F_1, oppure F_2. Ma tale probabilità non è, per l'assioma stesso, che la somma delle probabilità di $E.F_1$ e di $E.F_2$, onde potremo scrivere

$$(1) \qquad \varphi(a, b_1 + b_2) = \varphi(a, b_1) + \varphi(a, b_2).$$

E, se $0 \leqq a \leqq 1$, $0 \leqq b \leqq 1$, $\varphi(a, b) \geqq 0$, ciò vale ad escludere la esistenza di soluzioni della (1) discontinue per rapporto a b [4]) e sodisfacenti le condizioni del problema.

Dovrà pertanto venir posto, quando con $\chi(a)$ si esprima una funzione arbitraria di a,

$$\varphi(a, b) = \chi(a) b.$$

Ma è anche, per una delle proposizioni prima formulate,

$$\varphi(a, 1) = a;$$

---

3) Sia p_2 la probabilità di un evento E_2; $p_{0,0}$ la probabilità che non si verifichi nè E_2 nè un altro evento E_1 di probabilità p_1; $p_{0,2}$ la probabilità che E_1 non si verifichi e si verifichi E_2; $p_{1,0}$ quella che E_1 si verifichi e non si verifichi E_2. La proposizione « Se è

$$p_{0,2} \cdot p_{1,0} = p_{0,0} \cdot p_{1,2}$$

« è anche

$$p_{1,2} = p_1 \cdot p_2 \text{ »}$$

chiama il MEDOLAGHI « teorema delle probabilità composte », ed applica a legittimare il prodotto di probabilità. Ma essa non vale nè a definire $p_{1,2}$ quando siano noti solo p_1 e p_2, nè a definire p_2 quando siano noti solo p_1 e $p_{1,2}$: e sono appunto tali determinazioni che si vogliono fornite dal teorema della probabilità composta.

4) Cfr. G. DARBOUX, *Sur la composition des forces en Statique* [Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques, t. IX (1875), pp. 281-288].

onde si ha

$$\chi(a) = a,$$
$$\varphi(a, b) = ab;$$

nel che appunto consiste il teorema della probabilità composta, quale fu formulato dal Bohlmann, e riprodotto qui.

Ma si ha pure dal concetto di « evento impossibile », che se F è impossibile, impossibile è pure, qualunque sia E, $E.F$. È pertanto, identicamente in a, quando α esprima la probabilità di un evento impossibile,

$$\alpha = a.\alpha,$$

dal che deriva

$$\alpha = 0$$

e la proposizione 2, prima formulata:

È zero la probabilità di un evento impossibile.

Le proposizioni 2 e 4 sono cioè conseguenza delle proposizioni 1 e 3: i due sistemi 1, 3 e 1, 2, 3 4 debbono considerarsi equivalenti.

Ma, come mi progongo di dimostrare altrove, essi non valgono a definire in modo univoco la probabilità di un evento, quando non si introduca una restrizione nel concetto di evento e, chiarito il senso della espressione « due eventi sono uguali », non si postuli che ad eventi uguali corrispondono probabilità uguali.

Buenos-Aires, Dicembre 1908.

Ugo Broggi.

IL PROBLEMA DELLE FORME PER IL GRUPPO G_{168} E LA RISOLVENTE DI 7° GRADO PER QUESTO PROBLEMA.

Nota di **Riccardo Bucca** (Palermo).

Adunanza del 14 febbrajo 1909.

§ 1.

In questa Nota mi propongo lo studio del problema delle forme per il gruppo G_{168} e la costruzione della risolvente di 7° grado di esso problema e di far vedere come vanno corretti alcuni coefficienti numerici della medesima risolvente data da WEBER.

Dico subito che sono stato indotto a questa ricerca dallo studiare la poderosa memoria del professor FRANCESCO GERBALDI sopra un argomento analogo sul gruppo di 360 collineazioni piane [1]).

Dissi già [2]), e conviene qui ripeterlo, che le coniche invarianti per i due sistemi di sottogruppi ottaedrici esistenti in G_{168}, quando si assuma come triangolo coordinato, il triangolo unito di una collineazione di 7° ordine, e come punto unità un punto unito di una collineazione di 3° ordine, sono:

$$(1)\qquad f_\nu = \varepsilon^{2\nu} x_1^2 + \varepsilon^{4\nu} x_2^2 + \varepsilon^{\nu} x_3^2 - k(\varepsilon^{6\nu} x_2 x_3 + \varepsilon^{5\nu} x_3 x_1 + \varepsilon^{3\nu} x_1 x_2) = 0,$$

$$(2)\qquad f'_\nu = \varepsilon^{2\nu} x_1^2 + \varepsilon^{4\nu} x_2^2 + \varepsilon^{\nu} x_3^2 - k'(\varepsilon^{6\nu} x_2 x_3 + \varepsilon^{5\nu} x_3 x_1 + \varepsilon^{3\nu} x_1 x_2) = 0,$$

nelle quali formole ν piglia i valori $0, 1, \ldots, 6$, $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{7}}$ e k e k' sono radici dell'equazione $k^2 - k + 2 = 0$.

Le equazioni delle stesse coniche in coordinate di rette sono:

$$(3)\qquad \varphi_\nu = \varepsilon^{5\nu} u_1^2 + \varepsilon^{3\nu} u_2^2 + \varepsilon^{6\nu} u_3^2 - k'(\varepsilon^{\nu} u_2 u_3 + \varepsilon^{2\nu} u_3 u_1 + \varepsilon^{4\nu} u_1 u_2) = 0,$$

$$(4)\qquad \varphi'_\nu = \varepsilon^{5\nu} u_1^2 + \varepsilon^{3\nu} u_2^2 + \varepsilon^{6\nu} u_3^2 - k(\varepsilon^{\nu} u_2 u_3 + \varepsilon^{2\nu} u_3 u_1 + \varepsilon^{4\nu} u_1 u_2) = 0.$$

Per noi le coordinate di un punto o di una retta sono i valori che assumono le (1) o le (3) quando al posto delle x o delle u si mettano le coordinate solite proiettive di quel punto o di quella retta. Queste nuove coordinate del punto o della retta sono

[1]) Cfr. GERBALDI, *Sul gruppo semplice di 360 collineazioni piane* (Memoria 1ª) [questi Rendiconti tomo XII (1898), pp. 23-94], § 20.

[2]) Cfr. la mia Memoria: *Sul gruppo semplice di 168 collineazioni piane* [questi Rendiconti, tomo XXIV (2° semestre 1907), pp. 161-181].

omogenee, sono sette numeri che subiscono un gruppo G_{168} di permutazioni quando su quel punto o su quella retta si applicano le collineazioni del nostro gruppo.

Tra esse passano inoltre delle relazioni che già abbiamo trovato nel § 9 della mia citata memoria e nel § 10 si trovano le coordinate dei poli delle collineazioni del gruppo G_{168}. Tenendo presenti queste considerazioni, si può facilmente comprendere quanto segue.

§ 2.

Gl'invarianti A_k e l'invariante F.

Poniamo $A_k = \sum f_\nu^k = f_0^k + f_1^k + \cdots + f_6^k$ dove k è un intero qualsiasi; A_k sarà allora un invariante assoluto per il gruppo G_{168} (tranne il caso che sia identicamente nullo) e l'equazione $A_k = 0$ rappresenta una curva d'ordine $2k$ la quale per le collineazioni del gruppo si trasformerà in sè stessa.

A noi interessa considerare gl'invarianti A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 ed i loro valori nei poli. Facendo uso delle formole 31, 32, 33, 34, 35 del citato § 10, si trova che i valori degli invarianti sopra detti, nei diversi poli, sono quelli del quadro seguente:

Nei punti	K	Q	P	U	V
A_2	0	$\frac{7}{6}(k+2)$	0	$7(1-k)$	$k+3$
A_3	0	$\frac{7}{36}(-3k+2$	$12-3k$	$\frac{21}{16}(1+k)$	0
A_4	0	$\frac{7}{72}(10+9k)$	0	$-\frac{7}{64}(3k+7)$	$\frac{1}{4}(7+3k)$
A_5	0	$\frac{35}{1296}(-23k+42)$	0	$\frac{35}{256}(23-5k)$	0
A_6	0	$\frac{7}{7776}(575k-678)$	$24-15k$	$\frac{7}{1024}(205k-63)$	$\frac{5}{16}(k+5)$

L'invariante A_2 essendo di 4° ordine, deve a meno di un fattore numerico coincidere con la quartica di KLEIN. Dai valori precedenti si vede che i poli settupli e tripli stanno sulla quartica. Così pure l'invariante A_3 essendo di 6° ordine, deve, a meno di un fattore numerico, coincidere con l'Hessiano della quartica. Dall'essere $A_3 = 0$ nei poli settupli, segue che i 24 poli K sono flessi per la quartica di KLEIN e le 24 rette k sono tangenti di flesso.

Ogni altro invariante A_k si esprime linearmente mediante A_2 ed A_3. Così: $A_4 = aA_2$, dove a indica una costante. Questa costante si trova sostituendo per esempio le coordinate di un punto Q e si ha $a = \frac{1}{28}(5-k)$.

Con processi analoghi si trova:

$$A_5 = \frac{5(7+k)}{12 \times 7} A_2 A_3,$$

$$A_6 = \frac{1}{42}(9-k)A_3^2 + \frac{5}{4 \times 11 \times 7}(-5k+13)A_2 A_4$$

$$= \frac{1}{42}(9-k)A_3^2 + \frac{5(5-3k)}{4^2 \times 7^2} A_2^3.$$

Se poniamo $F = f_0 f_1 \ldots f_6$, anch'esso sarà un invariante di grado 14 per il gruppo G_{168}. I valori che questo invariante assume nei poli, sono i seguenti:

In un punto		K,	$F = 1$
»	»	Q,	$F = \frac{1}{6^6}(-1295k + 2234)$
»	»	P,	$F = 0$
»	»	U,	$F = \frac{k+1}{256}$
»	»	V,	$F = 0$.

§ 3.

Il problema delle forme per il gruppo G_{168}.

Si considerino i due fasci di curve:

$$F - \lambda A_2^2 A_3 = 0, \qquad A_3^2 - \mu A_2^3 = 0.$$

Il primo è di 14° ordine, il secondo di ordine 12.

Qualunque curva appartenente a questi due fasci è invariante per il gruppo G_{168} e però, se consideriamo due curve generiche dei due fasci, esse ci daranno $14 \times 12 = 168$ intersezioni, le quali formeranno un gruppo di punti per G_{168}, cioè un gruppo di punti che per le collineazioni di G_{168} subiscono un gruppo G_{168} di permutazioni. Reciprocamente ogni gruppo di siffatti punti è l'intersezione di due curve dei due fasci, però vanno eccettuati i gruppi di punti che si trovano sulla quartica $A_2 = 0$, la quale appartiene ad entrambi i fasci, nel primo contata due volte, nel secondo tre. Un tale gruppo particolare di punti che si trovi sulla curva $A_2 = 0$ si può considerare ottenuto come intersezione di questa curva con una curva del fascio di ordine 42, $F^3 - \theta A_3^7 = 0$.

Così per un gruppo generico di punti avremo in corrispondenza una coppia di valori finiti di parametri λ e μ, e per un gruppo di punti sulla curva $A_2 = 0$ avremo in corrispondenza un valore del parametro θ.

Pei poli avremo in particolare:

Per i punti K, $\theta = \infty$

» » U, $\lambda = \dfrac{2 - 3k}{2^2 \times 3 \times 73}$, $\mu = \dfrac{3^2 \times 5(1 - k)}{7 \times 2^4}$

» » Q, $\lambda = \dfrac{78 - 19k}{6^2 \times 7^3}$, $\mu = \dfrac{16(k - 1)}{3^2 \times 7 \times 13}$

» » P, $\theta = 0$

» » V, $\lambda =$ indeterminato, $\mu = 0$.

Ora se assegniamo i valori dei parametri λ e μ di un gruppo generico di punti, o il valore del parametro θ di un gruppo speciale, e vogliamo trovare i singoli punti del gruppo, saremo evidentemente condotti ad un'equazione di grado 168. Questo problema si riduce a quest'altro: Si diano agli invarianti assoluti F, A_2, A_3 dei valori assegnati e si cerchi di trovare i valori delle variabili x_1, x_2, x_3 o meglio più generalmente si cerchi di trovare i valori di una forma assegnata $\pi(x_1 x_2 x_3)$.

Poniamo $A_2(x_1 x_2 x_3) = \overline{A}_2$, $A_3(x_1 x_2 x^3) = \overline{A}_3$, $F(x_1 x_2 x_3) = \overline{F}$, $\pi(x_1 x_2 x_3) = \overline{\pi}$. Eliminando dalle quattro soprascritte equazioni le x_1, x_2, x_3 perverremo ad un'equazione di grado $4 \times 6 \times 14 = 2 \times 168$, i coefficienti della quale sono funzioni razionali intere di $\overline{A}_2$, $\overline{A}_3$, $\overline{F}$, con il coefficiente della più alta potenza eguale all'unità. Poichè le forme A_2, A_3, F, sono di grado pari, esse rimarranno invariate quando si cambiano di segno le x_1, x_2, x_3, quindi se il gruppo G_{168} si estende con l'operazione $x'_1 = -x_1$, $x'_2 = -x_2$, $x'_3 = -x_3$ si otterrà un gruppo di ordine 2×168 di collineazioni, per le quali A_2, A_3, F sono invarianti assoluti. I 336 valori che assume la forma π in corrispondenza alle 336 collineazioni del gruppo così esteso saranno le radici dell'equazione di grado 2×168 che abbiamo così trovato.

Se π in particolare rimane invariata per le collineazioni di un sottogruppo di ordine n del gruppo $G_{2 \times 168}$, allora il grado della equazione in π si abbasserà a $\dfrac{336}{n}$.

§ 4.

Risolventi di 7° grado per il problema delle forme del gruppo G_{168}.

Nel gruppo G_{168} sappiamo esistono due sistemi ciascuno di sette sottogruppi ottaedrici simili G_{24}.

Consideriamo il G_{24} generato da ω, χ, θ.

Gli invarianti di grado più piccolo di esso gruppo sono, come sappiamo:

f_0 di 2° ordine

A_2 di 4° ordine

A_3 di 6° ordine.

Insieme con questi consideriamo anche l'invariante di 12° ordine

$$F_1 = f_1 f_2 \dots f_6.$$

Se consideriamo un gruppo di 168 punti che si trasforma in sè per le collineazioni di G_{168}, esso si divide in sette gruppi di 24 punti ciascuno, uno di questi è invariato dal gruppo G_{24} considerato, gli altri sei dai sei sottogruppi ottaedrici simili.

Consideriamo i due fasci di curve:

$$f_0^2 - x A_2 = 0, \qquad f_0^3 - y A_3 = 0,$$

il primo di 4° ordine ed il secondo di ordine 6.

I 24 punti d'incontro di due curve generiche dei due fasci formano un gruppo di punti per il G_{24} considerato; reciprocamente un tale gruppo di punti è l'intersezione di due curve dei due fasci, tranne però di un gruppo di punti che si trovi sulla conica $f_0 = 0$, la quale appartiene ad entrambi i fasci, nel primo contata due volte e nel 2° tre.

Un gruppo di punti giacenti sulla conica $f_0 = 0$ si può considerare ottenuto come intersezione di questa conica con una curva del fascio di 12° ordine $F_1 - z A_2^3 = 0$.

Gli invarianti di grado minimo che per le collineazioni del gruppo G_{168} pigliano soltanto sette valori sono le f_ν e quindi la più semplice risolvente di 7° grado nel problema delle forme del gruppo G_{168} è quella che ha per radici le f_ν. Quando si conosce una radice, f_0 per esempio, di questa risolvente, il problema delle forme del gruppo G_{168} si riduce al problema delle forme del gruppo G_{24} perchè allora si conosceranno i valori dei parametri x, y:

$$x = \frac{f_0^2}{A_2}, \qquad y = \frac{f_0^3}{A_3}.$$

È facile per noi costruire la risolvente di 7° grado perchè abbiamo espresso gli invarianti A_k (che sono le somme di potenze delle radici f_ν) in funzione degli invarianti fondamentali A_2, A_3 ed abbiamo introdotto l'invariante F che è il prodotto delle radici.

Scriviamo questa risolvente sotto la forma:

$$x^7 + p_1 x^6 + p_2 x^5 + p_3 x^4 + p_4 x^3 + p_5 x^2 + p_6 x + p_7 = 0$$

e cerchiamo di determinare i coefficienti p.

Dall'algebra abbiamo le note formole:

$$p_1 = -s_1, \quad 2!p_2 = s_1^2 - s_2, \quad 3!p_3 = -s_1^3 + 3s_1 s_2 - 2s_3, \quad \text{ecc., ecc.}$$

Avremo nel nostro caso:

$$p_1 = 0, \quad 2!p_2 = -A_2, \quad p_3 = \frac{-A_3}{3}, \quad p_4 = \frac{9+k}{2^4 \times 7^2} A_2^2, \quad p_5 = \frac{7-k}{84} A_2 A_3$$

$$p_6 = -\frac{3+k}{2^4 \times 7^2} A_2^3 + \frac{5+k}{2^2 \times 3^3 \times 7} A_3^2, \quad p_7 = -F$$

e quindi la risolvente cercata per un gruppo di punti non situato sulla curva $A_2 = 0$ è

$$(a) \qquad \begin{cases} x^7 - \dfrac{A_2}{2} x^5 - \dfrac{A_3}{3} x^4 + \dfrac{9+k}{2^4 \times 7^2} A_2^2 x^3 + \dfrac{7-k}{84} A_2 A_3 x^2 \\ + \left[-\dfrac{3+k}{2^4 \times 7^2} A_2^3 + \dfrac{5+k}{2^2 \times 3^2 \times 7} A_3^2 \right] x - F = 0. \end{cases}$$

Per un gruppo speciale di punti sulla curva $A_2 = 0$ la risolvente si riduce a quest'altra:

$$(b) \qquad x^7 - \frac{A_3}{3} x^4 + \frac{5+k}{2^2 \times 3^2 \times 7} A_3^2 x - F = 0.$$

Per un gruppo di punti sulla curva $A_3 = 0$ la risolvente si riduce a:

$$(c) \qquad x^7 - \frac{A_2}{2} x^5 + \frac{9+k}{2^4 \times 8^2} A_2^2 x^3 - \frac{3+k}{2^4 \times 7^2} A_2^3 x - F = 0.$$

Se si considera l'altro sistema di sottogruppi ottaedrici esistenti in G_{168} e si ripetono le medesime considerazioni, si ottengono altre tre risolventi del problema delle forme per questo gruppo. Le equazioni di queste tre altre risolventi si ottengono dalle (*a*), (*b*), (*c*), cambiando dappertutto k in k'. Le radici saranno le f'_ν del 2° sistema.

§ 5.

Confronto con le risolventi di Weber.

Onde verificare l'esattezza dei coefficienti numerici della (*a*), confronteremo questa risolvente con quella data dal WEBER [3]) e avremo nello stesso tempo il modo di far vedere come vanno corretti due coefficienti della risolvente di WEBER.

Gli invarianti fondamentali che noi abbiamo chiamato A_2 ed A_3 sono, come si è osservato, la quartica di KLEIN e il suo covariante hessiano.

Questi due invarianti sono dati rispettivamente da:

$$A = x_1^3 x_3 + x_2^3 x_1 + x_3^3 x_2,$$
$$B = 5 x_1^2 x_2^2 x_3^2 - x_1^5 x_2 - x_2^5 x_3 - x_3^5 x_1.$$

Ancora conviene ricordare un invariante di 14° grado:

$$C = \sum x_1^{14} - 34 x_1 x_2 x_3 \sum x_1^{10} x_3 - 250 x_1 x_2 x_3 \sum x_1^8 x_2^3$$
$$+ 375 x_1^2 x_2^2 x_3^2 \sum x_1^6 x_2^2 + 18 \sum x_1^7 x_2^7 - 126 x_1^3 x_2^3 x_3^3 \sum x_1^2 x_2^3,$$

dove il $\sum$ indica che bisogna fare la somma dei tre termini che si ottengono permutando circolarmente le x_1, x_2, x_3.

Indicando quindi con a, b, g, l delle costanti possiamo porre:

$$A_2 = a A, \qquad A_3 = b B, \qquad F = g C + l A^2 B.$$

La costante a l'otteniamo subito, osservando che in $A_2 = \sum f_\nu^2$ il termine $x_1^3 x_3$ proviene soltanto dalla somma dei prodotti $2 \varepsilon^{2\nu} x^2 (- k \varepsilon^{5\nu} x_1 x_3)$, deve quindi il numero a essere eguale a $-14k$. Analogamente la costante b si trova osservando che il termine $x_1^5 x_2$ in $\sum f_\nu^3$ proviene semplicemente dalla somma dei prodotti $3 (\varepsilon^{2\nu} x_1^2)^2 (- k \varepsilon^{3\nu} x_1 x_2)$ e però in questa somma il coefficiente di $x_1^5 x_2$ è $-21 k$ che, confrontato con il corrispondente coefficiente di B, dà $b = 21 k$.

3) Cfr. H. WEBER, *Lehrbuch der Algebra*, Zweite Auflage, II. Band (Braunschweig, 1899), pag. 534.

Per avere le costanti g ed l, osserviamo che in BA^2 non si trova il termine $x_1'^4$ ed in C ed F questo termine ha per coefficiente l'unità, dunque sarà $g = 1$. Resta a determinare il numero l, che troveremo subito, osservando che nel punto (111) [punto Q], F piglia il valore $-126k - 1164$, C il valore -48, B il valore 2, A il valore 3, si avrà allora l'equazione:

$$-126k - 1164 = -48 + 18l, \quad \text{donde} \quad l = -(7k + 62).$$

I coefficienti della (a) diventano perciò:

$$\text{Coefficiente di } x^5, \quad 7kA = 7\frac{1-\sqrt{-7}}{2}A$$

$$\text{» » } x^4, \quad -7kB = -7\frac{1-\sqrt{-7}}{2}$$

$$\text{» » } x^3, \quad 7(2k-5)A^2 = -7(4+\sqrt{-7})A^2$$

$$\text{» » } x^2, \quad -7(4k-6)AB = 14(2+\sqrt{-7})AB$$

$$\text{» » } x, \quad 7(3k+2)A^3 + 7(k-3)B^2$$

$$= 7\frac{7-3\sqrt{-7}}{2}A^3 - 7\frac{5+\sqrt{-7}}{2}B^2$$

termine noto

$$-C + (7k+62)A^2B$$

$$= -C + \frac{131-7\sqrt{-7}}{2}A^2B.$$

Nella risolvente data dal WEBER il primo termine del coefficiente di x trovasi scritto $-7\frac{7+3\sqrt{-7}}{2}$ e l'ultimo del termine noto $\frac{167-7\sqrt{-7}}{2}$, e che gli esatti siano quelli trovati da noi, lo possiamo verificare richiamando la risolvente di KLEIN [4]).

Palermo, dicembre 1908.

RICCARDO BUCCA.

[4]) Cfr. KLEIN, *Ueber die Auflösung gewisser Gleichungen vom siebenten und achten Grade* [Mathematische Annalen, t. XV (1879), pp. 251-282], p. 266.

SUR LA CONVERGENCE DES DÉTERMINANTS INFINIS.

Par M. **Helge von Koch** (Stockholm).

Adunanza del 13 giugno 1909.

La première règle pour reconnaître la convergence d'un déterminant infini est due à M. POINCARÉ [1]). A cette règle j'ai ajouté [2]) une suite de critères de plus en plus précis et se rapprochant indéfiniment de la condition nécessaire et suffisante pour la convergence absolue (*Déterminants*, n^os 1 et 4). Revenu récemment sur ces questions, j'ai pu améliorer mes résultats sur quelques points. Dans les pages suivantes, je me bornerai à exposer les plus simples des résultats ainsi obtenus.

1. Soit donnée une suite infinie double

$$(1)\qquad \begin{cases} A_{11} & A_{12} & \cdots \\ A_{21} & A_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{cases}$$

Supposons que le produit des éléments diagonaux

$$(2)\qquad A_{11}A_{22}A_{33}\ldots$$

converge absolument, ce qui revient à supposer le produit convergent même si l'on remplace les A_{ii} par $1+|A_{ii}-1|$; formons une suite de nouveaux produits en laissant fixes les premiers indices des facteurs A_{ii} et permutant les seconds indices de toutes les manières possibles; et attribuons à chaque produit ainsi obtenu le signe $+$ ou le signe $-$ selon la parité ou l'imparité du nombre des transpositions nécessaires pour passer du produit initial (2) au produit considéré. Si la série qu'on peut former avec tous ces produits converge absolument — même si on remplace partout les A_{ii} par $1+|A_{ii}-1|$ —, nous convenons de dire que le déterminant des A_{ii} *converge absolument* [3]) et nous le

---

[1]) *Sur les déterminants d'ordre infini* [Bulletin de la Société Mathématique de France, t. XIV (1886), pp. 77-90].

[2]) *Sur la convergence des déterminants d'ordre infini* [Bihang till Kongl. Svenska Vetenskaps-Academiens Handlingar, Bd. XXII (1896), No. 4, pp. 1-31]. Pour abréger je désignerai, dans ce qui suit, ce mémoire par : *Déterminants*.

[3]) Cette définition coïncide, quant à l'essentiel, avec celle que j'ai donnée précédemment {*Sur les équations différentielles linéaires à coefficients rationnels* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris), t. CXVI (1^er semestre 1893), pp. 91-93]; *Déterminants*, n° 1}. J'ai ajouté ici, pour simplifier l'énoncé de certains résultats, la condition que la série doit converger absolument *même* si on remplace les A_{ii} par $1+|A_{ii}-1|$.

désignons par l'une ou l'autre des notations:

$$\Delta = [A_{ik}]_{i,k=1\ldots+\infty} = \sum \pm A_{11} A_{22} \ldots$$
$$= \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots \\ A_{21} & A_{22} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}.$$

Supposant ces conditions remplies et posant

$$A_{ik} = \delta_{ik} + a_{ik} \qquad \left(\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{pour } i = k \\ 0 & \text{» } i \neq k \end{cases}\right), \tag{3}$$

nous pouvons encore exprimer Δ par le développement suivant [4])

$$\Delta = 1 + \sum_i a_{ii} + \sum_{i,j} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} + \sum_{i,j,k} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} \end{vmatrix} + \cdots \tag{4}$$
$$(i < j < k \ldots)$$

et ce développement reste convergent si l'on y remplace tous les a_{ik} par $|a_{ik}|$ et que, dans tous les déterminants qui y figurent, on prend tous les termes avec le signe $+$.

On a aussi (*Déterminants*, n° 1)

$$\Delta = \lim_{n=+\infty} \Delta_n, \tag{5}$$

Δ_n désignant le déterminant d'ordre n

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} A_{11} & \ldots & A_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1} & \ldots & A_{nn} \end{vmatrix}.$$

Rappelons enfin le théorème suivant (*Déterminants*, n° 5) qui nous servira de base pour la présente étude:

Pour que le déterminant des A_{ik} converge absolument, il faut et il suffit que le produit des éléments diagonaux A_{ii} converge absolument et que la série formée avec tous les produits circulaires des A_{ik} converge absolument [5]).

Si ces conditions sont remplies, on a

$$|\Delta| \leqq [\Delta] \leqq e^S, \tag{6}$$

$[\Delta]$ désignant ce que devient Δ quand on y remplace A_{ii} par $1 + |A_{ii} - 1|$, A_{ik} par $|A_{ik}|$ et que l'on y prend tous les termes avec le signe $+$; et S désignant la somme $\sum_i |a_{ii}|$ augmentée de la somme des valeurs absolues de tous les produits circulaires des A_{ik}.

---

[4]) VON KOCH: *a*) *Sur les déterminants infinis et les équations différentielles linéaires* [Acta Mathematica, t. XVI (1892-93), pp. 217-295], p. 228; *b*) *Sur quelques points de la théorie des déterminants infinis* [Acta Mathematica, t. XXIV (1901), pp. 89-122], p. 93.

[5]) Par produit circulaire j'entends tout produit de la forme

$$A_{i_1 i_2} A_{i_2 i_3} \ldots A_{i_k i_1},$$

les indices i étant supposés distincts; je le dis de degré k si le nombre des facteurs est $= k$ (cfr. *Déterminants*, n° 4).

2. *Pour que le déterminant des A_{ik} et tous ses mineurs convergent absolument, il suffit que le produit des éléments diagonaux A_{ii} converge absolument et que la somme des carrés des éléments non-diagonaux A_{ik} converge absolument.*

Mettons comme plus haut

$$A_{ik} = \delta_{ik} + a_{ik},$$

δ_{ik} désignant *un* ou *zéro* selon que $i = k$ ou $i \neq k$.

Posons

$$\sigma^2 = \sum_{i,k}' |A_{ik}|^2 = \sum_{i,k}' |a_{ik}|^2, \tag{7}$$

la sommation s'étendant à toutes les valeurs

$$i, k = 1, 2, \ldots, +\infty$$

sauf les combinaisons $i = k$, ce qui est rappelé par l'accent. Par σ on désigne la racine carrée *positive* de σ^2.

Pour abréger l'écriture, désignons par $|i_1 i_2 \ldots i_r|$ la valeur absolue du produit de degré r:

$$A_{i_1 i_2} A_{i_2 i_3} \ldots A_{i_r i_1} = a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \ldots a_{i_r i_1}$$

(les i de chaque A étant distincts) et par $|i_1 i_2 \ldots i_r;\ i_{r+1}|$ la valeur absolue du produit de degré r:

$$A_{i_1 i_2} A_{i_2 i_3} \ldots A_{i_r i_{r+1}} = a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \ldots a_{i_r i_{r+1}}$$

(les i de chaque A étant encore distincts) et convenons de mettre

$$|i_1 \ldots i_r| = 0, \qquad |i_1 \ldots i_r;\ i_{r+1}| = 0$$

chaque fois que la condition ainsi imposée aux i n'est pas remplie. Avec ces notations on a, par exemple,

$$|ij;\ i| = |ij| = |a_{ij} a_{ji}|, \qquad |ij;\ k| = |a_{ij} a_{jk}|$$

$$|i_1 \ldots i_r;\ i_{r+1}| \cdot |i_{r+1} \ldots i_{r+p};\ i_1| = |i_1 \ldots i_{r+p}|.$$

Pour démontrer le théorème énoncé, nous aurons à nous servir de la formule de LAGRANGE-CAUCHY [6])

$$(\alpha u + \beta v + \cdots)^2 \leqq (\alpha^2 + \beta^2 + \cdots)(u^2 + v^2 + \cdots), \tag{8}$$

où $\alpha, \beta, \ldots;\ u, v, \ldots$ désignent des nombres positifs quelconques.

Supposons la série (7) convergente et considérons d'abord le cas

$$\sigma < 1.$$

On a, d'après (8),

$$\Big(\sum_j |ij;\ k|\Big)^2 \leqq \sum_j |i;\ j|^2 \cdot \sum_j |j;\ k|^2,$$

d'où

$$\sum_{i,k} |ij| \leqq \sigma^2,$$

$$\sum_k \Big(\sum_j |ij;\ k|\Big)^2 \leqq \sigma^2 \sum_j |i;\ j|^2.$$

[6]) CAUCHY, *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique* (Paris, 1821), Note II.

Je dis qu'on a, en général (pour $n \geqq 2$):

$$\sum_{i_1 \ldots i_n} |i_1 i_2 \ldots i_n| \leqq \sigma^n \tag{9}$$

et

$$\sum_j \Big(\sum_{i_2 \ldots i_n} |i_1 i_2 \ldots i_n; j| \Big)^2 \leqq \sigma^{2n-2} \sum_j |i_1; j|^2. \tag{10}$$

Ces formules étant vraies pour $n = 2$, il suffit d'établir que, étant supposées vraies pour une valeur déterminée de n, elles subsistent pour $n + 1$. On a, d'après (8),

$$\Big(\sum_{i_2 \ldots i_n k} |i_1 \ldots i_n k; j| \Big)^2 \leqq \sum_k \Big(\sum_{i_2 \ldots i_n} |i_1 \ldots i_n; k| \Big)^2 \sum_k |k; j|^2 \tag{11}$$

d'où, d'après (10),

$$\Big(\sum_{i_2 \ldots i_n k} |i_1 \ldots i_n k; j| \Big)^2 \leqq \sigma^{2n-2} \sum_k |i_1; k|^2 . \sum_k |k; j|^2, \tag{12}$$

d'où (en prenant $j = i_1$ et extrayant la racine carrée):

$$\sum_{i_2 \ldots i_n k} |i_1 \ldots i_n k| \leqq \sigma^{n-1} \frac{\sum_k |i_1; k|^2 + \sum_k |k; i_1|^2}{2},$$

$$\sum_{i_1 \ldots i_n k} |i_1 \ldots i_n k| \leqq \sigma^{n+1},$$

et, en sommant (12) ($j = 1, 2, \ldots$):

$$\sum_j \Big(\sum_{i_2 \ldots i_n k} |i_1 \ldots i_n k; j| \Big)^2 \leqq \sigma^{2n} \sum_k |i_1; k|^2.$$

Les formules (9), (10) sont donc générales.

D'après la formule (9), la somme des modules de tous les produits circulaires des A_{ik} est convergente et inférieure à

$$\sigma^2 + \sigma^3 + \cdots = \frac{\sigma^2}{1 - \sigma}.$$

Donc, d'après notre règle générale, le déterminant des A_{ik} est *absolument convergent.*

Passons au cas où la somme (7) est convergente et $\sigma > 1$. Soit ε un nombre positif < 1. Soit m un entier positif tel que

$$\sum_{i=m+1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} |a_{ik}|^2 < \varepsilon$$

et déterminons un nombre positif T tel que

$$\frac{1}{T^2} \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{+\infty} |a_{ik}|^2 + \sum_{i=m+1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} |a_{ik}|^2 < \varepsilon.$$

Posons

$$B_{ik} = \frac{A_{ik}}{T} \qquad (\text{pour } i \leqq m),$$

$$B_{ik} = A_{ik} \qquad (\text{pour } i > m),$$

et

$$B_{ik} = \delta_{ik} + b_{ik}.$$

On voit que le produit $\prod_i (1 + |b_{ii}|)$ converge et que la somme

$$\sum_{i,k}' |b_{ik}|^2$$

est convergente et < 1. Donc le déterminant des B_{ik} converge absolument. Or on passe de ce déterminant à celui des A_{ik} en multipliant chaque terme de celui-là par T^m.

Donc le déterminant des A_{ik} converge aussi absolument.

On voit immédiatement que chaque *mineur* du déterminant des A_{ik} converge aussi absolument. Considérons, par exemple, un mineur du premier ordre $\binom{i}{k}$ adjoint à un élément quelconque A_{ik}. Ce mineur s'obtient en remplaçant dans

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots \\ A_{21} & A_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

l'élément A_{ik} par *un* et les autres éléments de la ligne i et de la colonne k par zéro, ce qui n'altère pas la convergence absolue du produit des éléments diagonaux ou la convergence absolue de la somme des carrés des éléments non-diagonaux.

Remarque I. — D'après une formule de M. Hadamard [7]), on a

$$|\Delta_n|^2 \leqq \prod_{i=1}^{n} (1 + |a_{1i}|^2 + \cdots + |a_{ni}|^2),$$

d'où, d'après (5),

$$|\Delta|^2 \leqq \prod_{i=1}^{\infty} (1 + \sum_j |a_{ji}|^2). \tag{13}$$

Appliquant ce résultat au mineur $\binom{i}{k}$ $(i \neq k)$ on aura, en désignant le second membre de (13) par Π,

$$\binom{i}{k}^2 \leqq \sum_j' |a_{kj}|^2 \cdot \Pi \qquad (i \neq k) \tag{14}$$

et, par une permutation des lignes en colonnes:

$$\left|\binom{i}{k}\right|^2 \leqq \sum_j' |a_{ji}|^2 \cdot \Pi \qquad (j \neq i); \tag{15}$$

ce qui prouve que la somme des carrés des mineurs de Δ adjoints à une ligne (colonne) quelconque converge absolument.

Remarque II. — Supposons les A_{ik} tels que le produit $\prod_i A_{ii}$ converge absolument et que la somme des éléments non-diagonaux A_{ik},

$$\sum' a_{ik},$$

converge absolument; alors la somme des carrés des a_{ik} est absolument convergente à plus forte raison, ce qui prouve la convergence absolue de Δ.

---

7) *Résolution d'une question relative aux déterminants* [Bulletin des Sciences Mathématiques, 2e série, t. XVII (1893), première partie, pp. 240-246], p. 242.

On retrouve ainsi, comme cas particulier du théorème démontré, la règle de convergence de M. POINCARÉ:

Pour que le déterminant des $A_{ik} = \delta_{ik} + a_{ik}$ converge absolument, il suffit que la somme

$$\sum_{i,k} a_{ik}$$

converge absolument [8])

REMARQUE III. — Il peut arriver, qu'un déterminant qui ne satisfait pas aux conditions dont il s'agit, peut être ramené à ce cas par une substitution multiplicatoire convenable (*Déterminants*, nº 7). On arrive ainsi au théorème suivant:

Pour que le déterminant des A_{ik} converge absolument, il suffit que le produit des éléments diagonaux converge absolument et qu'il existe une suite de quantités non nulles

$$S_1, \quad S_2, \quad S_3, \ldots$$

telles que la somme

$$\sum' A_{ik}^2 \frac{S_i^2}{S_k^2} \tag{16}$$

converge absolument.

Supposons, par exemple, que les $A_{ik} = \delta_{ik} + a_{ik}$ satisfassent aux conditions

$$|a_{ik}| \leqq c_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, +\infty), \tag{17}$$

les c_k étant des nombres positifs *formant une série convergente.* Prenant $S_i = \sqrt{c_i}$ on voit alors que la somme (16) converge bien dans ce cas absolument. D'où ce théorème que j'ai obtenu précédemment [9]) par une autre voie:

Pour que le déterminant des A_{ik} et tous ses mineurs convergent absolument, il suffit que le produit des éléments diagonaux converge absolument et que les éléments non-diagonaux de chaque ligne soient moindres en valeur absolue que les termes d'une série donnée absolument convergente.

3. Dans des travaux précédents [10]), j'ai étudié des systèmes infinis d'équations linéaires

$$A_{i1}x_1 + A_{i2}x_2 + \cdots = C_i \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots) \tag{18}$$

dans l'hypothèse que le déterminant des A_{ik} converge absolument en même temps que tous ses mineurs.

Les résultats obtenus peuvent être résumés ainsi. Désignons par Δ le déterminant des A_{ik} et par

$$\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_r \\ k_1 & \ldots & k_r \end{pmatrix}$$

---

[8]) Cfr. *Déterminants*, nº 10, où ce théorème figure comme le premier dans une suite de critères de convergence. Par une méthode analogue à celle employée plus haut pour améliorer ce premier critère on pourra remplacer les critères (*Déterminants*, nº 12 suiv.) par des règles un peu plus précises. Nous ne nous y arrêterons pas dans le présent travail.

[9]) Loc. cit. [4]) *b*, p. 107.

[10]) Loc. cit. [4]) *a*, p. 245; VON KOCH, *Sur les intégrales régulières des équations différentielles linéaires* [Acta Mathematica, t. XVIII (1894), pp. 337-419]; loc. cit. [4]) *b*.

celui des mineurs de Δ d'ordre r qui s'obtient en remplaçant dans Δ les éléments

$$A_{i_1 k_1}\, A_{i_2 k_2} \ldots A_{i_r k_r}$$

par l'unité et les autres éléments des lignes $i_1 \ldots i_r$ (colonnes $k_1 \ldots k_r$) par zéro.

Si Δ est nul, il y a pourtant un mineur de Δ d'ordre fini:

$$\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_r \\ k_1 & \ldots & k_r \end{pmatrix} \tag{19}$$

qui n'est pas nul. En particulier, le mineur suivant est certainement différent de zéro:

$$\begin{pmatrix} 1 & \ldots & m \\ 1 & \ldots & m \end{pmatrix},$$

m désignant un nombre suffisamment grand.

Désignons par (X) et par (C) des conditions auxquelles on assujettit respectivement les inconnues x_i et les quantitées donnés C_i et que nous allons formuler plus loin pour certains systèmes (18).

Pour que le système homogène

$$A_{i1} x_1 + A_{i2} x_2 + \cdots = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{20}$$

ait une solution (distincte de la solution banale $x_1 = x_2 = \cdots = 0$) satisfaisant à la condition (X), il faut et il suffit que $\Delta = 0$. Si Δ s'annule avec tous ses mineurs d'ordre $1, 2, \ldots, r-1$ tandis qu'un déterminant d'ordre r

$$\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_r \\ k_1 & \ldots & k_r \end{pmatrix}$$

est différent de zéro, les équations

$$A_{i1} x_1 + A_{i2} x_2 + \cdots = 0 \qquad (i = i_1, i_2, \ldots, i_r)$$

sont une conséquence des autres équations (20) et la solution la plus générale de (20) satisfaisant à la condition (X) peut s'écrire sous la forme:

$$\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_r \\ k_1 & \ldots & k_r \end{pmatrix} x_k = \begin{pmatrix} i_1 i_2 & \ldots & i_r \\ k\, k_2 & \ldots & k_r \end{pmatrix} x_{k_1} + \cdots + \begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_{r-1} i_r \\ k_1 & \ldots & k_{r-1} k \end{pmatrix} x_{k_r} \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{21}$$

Pour que le système non-homogène

$$A_{i1} x_1 + A_{i2} x_2 + \cdots = C_i \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{22}$$

possède une solution unique satisfaisant à la condition (X), il faut et il suffit que $\Delta \neq 0$. Si cette condition est vérifiée, la solution est donnée par la formule

$$\Delta \,.\, x_k = \Delta_k \qquad (k = 1, 2, \ldots), \tag{23}$$

Δ_k désignant le déterminant qu'on obtient en remplaçant dans Δ la colonne k:

$$A_{1k}, \quad A_{2k}, \ldots$$

par les seconds membres du système donné:

$$C_1, \quad C_2, \ldots .$$

Si Δ s'annule avec tous ses mineurs d'ordre 1, 2, ..., $r - 1$, tandis que le mineur

$$\begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ k_1 \dots k_r \end{pmatrix}$$

ne s'annule pas, il faut et il suffit, pour que le système (22) *ait une solution satisfaisant à* (X), *que l'on ait*

$$\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_{\nu-1} & i_{\nu+1} & \dots & i_r \\ k_1 & \dots & k_{\nu-1} & k_{\nu+1} & \dots & k_r \end{pmatrix}_\nu = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \dots, r),$$

ce dernier symbole désignant le déterminant obtenu en remplaçant dans

$$\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_{\nu-1} & i_{\nu+1} & \dots & i_r \\ k_1 & \dots & k_{\nu-1} & k_{\nu+1} & \dots & k_r \end{pmatrix}$$

les éléments de la colonne k_ν:

$$A_{1k_\nu}, \quad A_{2k_\nu}, \dots$$

par

$$C_1, \quad C_2, \dots .$$

Ces conditions supposées remplies, la solution la plus générale de (22) *satisfaisant à la condition* (X) *s'exprime sous la forme*

$$(24) \quad \begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ k_1 \dots k_r \end{pmatrix} x_k = \begin{pmatrix} i_1 i_2 \dots i_r \\ k k_2 \dots k_r \end{pmatrix} x_{k_1} + \dots + \begin{pmatrix} i_1 \dots i_{r-1} i_r \\ k_1 \dots k_{r-1} k \end{pmatrix} x_{k_r} + \begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ k_1 \dots k_r \end{pmatrix}_k,$$

où $\begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ k_1 \dots k_r \end{pmatrix}_k$ *désigne ce que devient* $\begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ k_1 \dots k_r \end{pmatrix}$ *quand on y remplace les* $A_{ik} (i = 1, 2, \dots)$ par les $C_i (i = 1, 2, \dots)$.

Les conditions (X), (C) imposées aux x_i et aux C_i dépendent, en général, de la nature du déterminant des A_{ik} comme on voit par les exemples suivants.

Exemple I. — Supposons $\prod_i A_{ii}$ et $\sum_{i,k}' A_{ik}$ absolument convergents. Alors il suffit d'assujettir les x_i et les C_i aux conditions suivantes:

$$(X) \qquad |x_i| < X,$$

$$(C) \qquad |C_i| < C,$$

X et C désignant des constantes [loc. cit. [4]) a, [10])].

Exemple II. — Supposons $\prod_i A_{ii}$ et $\sum_{i,k}' A_{ik} \frac{S_i}{S_k}$ absolument convergents, les S_i étant des quantités positives données non nulles. Il suffira de supposer [loc. cit. [4]) a, [10])] :

$$(X) \qquad |x_i| < \frac{X}{S_i},$$

$$|C_i| < \frac{C}{S_i}.$$

Exemple III. — Supposons

$$|A_{ik} - \delta_{ik}| < \alpha_k \qquad (i, k = 1, 2, \dots),$$

les α_k étant des nombres positifs formant une série convergente. Dans ce cas les con-

ditions (X), (C) s'énoncent ainsi: les séries $\sum_k \alpha_k |x_k|$, $\sum_k \alpha_k |C_k|$ doivent être convergentes [loc. cit. [4]) b].

Supposons maintenant que le déterminant des A_{ik} converge absolument d'après la règle nouvelle que nous avons trouvée plus haut. Admettons donc que le produit des A_{ii} converge absolument et que la somme:

$$\sum_{i,k}' A_{ik}^2$$

converge absolument.

Les conditions (X), (C) pourront dans ce cas être formulées ainsi:

la somme des carrés des x_i doit converger absolument et la somme des carrés des C_i doit converger absolument.

On a, en effet

$$\sum_k |A_{ik} x_k| \leqq |x_i| + \sum_k |a_{ik} x_k|$$

$$(\sum_k |A_{ik} x_k|)^2 \leqq |x_i|^2 + \sum_k |a_{ik}|^2 \cdot \sum_k |x_k|^2 + 2|x_i| \sum_k |a_{ik} x_k|,$$

d'où l'on voit que la somme

$$\sum_i (\sum_k |A_{ik} x_k|)^2$$

est convergente.

D'après ce que nous avons vu plus haut, la convergence absolue de Δ (ou d'un mineur de Δ) ne sera donc pas altérée si l'on y remplace les éléments d'une colonne quelconque par les quantités

$$\sum_k |A_{ik} x_k| \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Et comme la série $\sum_i |C_i|^2$ est supposée convergente, la convergence absolue de Δ et de ses mineurs ne sera pas altérée si l'on y remplace une colonne quelconque par les C_i.

Mais on s'assure facilement que cela suffit pour pouvoir appliquer au système qui nous occupe le même mode de démonstration que nous avons employé dans les travaux cités plus haut.

M. HILBERT [11]) a exposé une nouvelle méthode pour la résolution des équations intégrales. Cette méthode est basée sur les propriétés d'un système de la forme (18) où l'on suppose convergentes les séries

$$\sum_{i,k} |A_{ik} - \delta_{ik}|^2, \qquad \sum_i |C_i|^2, \qquad \sum_i |x_i|^2,$$

propriétés que M. HILBERT avait établies précédemment [12]). Il n'est pas sans intérêt de

[11]) *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen* (Fünfte Mitteilung) [Nachrichten von der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1906, pp. 439-480].

[12]) *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen* (Vierte Mitteilung) [Nachrichten von der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1906, pp. 157-227].

remarquer que le système étudié par M. HILBERT [loc. cit. [12]), p. 219] se ramène facilement au type que nous venons de considérer et que, par conséquent, les résultats de M. HILBERT peuvent s'exprimer simplement par des déterminants infinis au moyen des formules (21), (23), (24).

4. Je terminerai par quelques remarques sur les déterminants intégraux de M. FREDHOLM [13]).

Soit

$$D_f = 1 + \int_0^1 f(x,\ x)\,dx + \frac{1}{2!}\int_0^1\int_0^1 \begin{vmatrix} f(xx) f(xy) \\ f(yx) f(yy) \end{vmatrix} dx\,dy + \cdots$$

et convenons de dire que D_f *converge absolument* si toutes les intégrales restent bien déterminées et si la convergence de la série subsiste même si l'on remplace, dans chaque déterminant

$$\begin{vmatrix} f(x_1 x_1) & \ldots & f(x_1 x_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f(x_n x_1) & \ldots & f(x_n x_n) \end{vmatrix} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

chaque terme par sa valeur absolue.

D_f pouvant être considéré comme la limite vers laquelle tend un déterminant infini ordinaire quand on fait tendre un certain paramètre vers zéro, à tout théorème obtenu sur les déterminants ordinaires correspondra un théorème sur les D_f.

Ainsi, à la règle générale énoncée au n° 1 correspond l'énoncé suivant:

Pour que D_f converge absolument, il faut et il suffit que les intégrales

$$\int_0^1 |\gamma(xx)|dx,\quad \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 |f(xy)f(yx)|dxdy,\quad \frac{1}{3}\int_0^1\int_0^1\int_0^1 |f(xy)f(yz)f(zx)|dxdydz, \ldots$$

soient finies et possèdent une somme finie.

Aux critères obtenus plus haut pour les déterminants infinis ordinaires correspond le théorème suivant sur D_f.

Pour que D_f et tous ses mineurs convergent absolument, il suffit que les deux intégrales

$$(25) \qquad \int_0^1 |f(xx)|\,dx, \qquad \int_0^1\int_0^1 |f(xy)|^2\,dx\,dy$$

soient finies ou bien qu'il existe une fonction $S(x)$ différente de zéro dans l'intervalle $0 \ldots 1$ telle que les intégrales

$$(25') \qquad \int_0^1 |f(xx)|\,dx, \qquad \int_0^1\int_0^1 |f(xy)|^2 \left|\frac{S(x)}{S(y)}\right|^2 dx\,dy$$

soient finies.

Aux résultats énoncés plus haut relatifs à la résolution du système (22) dans les conditions (X), (C) correspondent des résultats tout analogues pour la solution de

---

[13]) *Sur une classe d'équations fonctionnelles* [Acta Mathematica, t. XXVII (1903), pp. 365-390]. Nous supposerons $f(xy)$ définie et uniforme quand x, y appartiennent à l'intervalle $0 \ldots 1$ mais pouvant devenir infinie ou discontinue dans ce domaine.

l'équation intégrale de FREDHOLM

$$(26) \qquad \varphi(x) + \int_0^1 f(xy)\varphi(y)\,dy = \psi(x),$$

l'inconnue $\varphi(x)$ et la fonction connue $\psi(x)$ étant assujetties à rendre finies les intégrales suivantes:

$$(\varphi) \qquad \int_0^1 |\varphi(x)|^2\,dx,$$

$$(\psi) \qquad \int_0^1 |\psi(x)|^2\,dx.$$

En particulier, on pourra affirmer que l'équation (26) est résoluble *par des déterminants intégraux absolument convergents* si les intégrales (25) et (φ), (ψ) sont finies ou, plus généralement, si les intégrales (25') et

$$\int_0^1 |\varphi(x)S(x)|^2\,dx, \qquad \int_0^1 |\psi(x)S(x)|^2\,dx$$

sont finies, $S(x)$ étant une fonction convenablement choisie [14]).

Dans une note récente [15]), M. POINCARÉ introduit une nouvelle expression $D_f^{(p)}$ et en indique l'importance pour la résolution de l'équation (26). Pour définir $D_f^{(p)}$, il suffit de supprimer dans D_f, sous tous les signes $\int$, tous les termes qui contiennent en facteur $f(xx)$ ou un produit de la forme

$$f(x_1x_2)f(x_2x_3)\ldots f(x_\nu x_1) \qquad (\nu = 2, 3, \ldots, p).$$

Évidemment les règles de convergence énoncées plus haut se simplifient en passant de D_f à $D_f^{(p)}$. En particulier, on arrive aux énoncés suivants:

Pour que le déterminant $D_f^{(p)}$ de M. POINCARÉ *converge absolument, il faut et il suffit que les intégrales*

$$\frac{1}{\nu}\int_0^1 \cdots \int_0^1 |f(x_1x_2)\ldots f(x_\nu x_1)|\,dx_1\ldots dx_\nu \qquad (\nu = p+1, p+2, \ldots)$$

soient finies et aient une somme finie.

---

14) On sait que M. FREDHOLM [loc. cit. 13)] a résolu l'équation (26) par des déterminants intégraux en supposant $f(xy)$ finie et intégrable dans le domaine considéré. Sa démonstration suppose implicitement les fonctions $\varphi(x)$, $\psi(x)$ finies, ou du moins les intégrales

$$\int_0^1 |\varphi(x)|\,dx, \qquad \int_0^1 |\psi(x)|\,dx$$

finies, ce qui correspond aux conditions (X), (C) imposées au système (22) dans notre Exemple 3. Par certaines substitutions, M. FREDHOLM ramène au cas dont il s'agit celui où $f(x, y)$ devient infini d'une telle manière que $|x-y|^\alpha f(x, y)$ $(\alpha < 1)$ reste finie.

15) *Remarques sur l'équation de* FREDHOLM [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris), t. CXLVII (2e semestre 1908), pp. 1367-1371]. *Voir* aussi les recherches de M. HILBERT: *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen* (Erste und Zweite Mitteilungen) [Nachrichten von der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1904, pp. 49-91, 213-259].

Pour que $D_f^{(1)}$ converge absolument, il suffit que l'integrale

$$\int_0^1 \int_0^1 |f(x\,y)|^2\,dx\,dy$$

soit finie.

Djursholm, avril 1909.

HELGE VON KOCH.

ZUR THEORIE DER GEWÖHNLICHEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN UND DER PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ZWEITER ORDNUNG.

DIE LÖSUNGEN ALS FUNKTIONEN DER RANDWERTE UND DER PARAMETER.

Von **Leon Lichtenstein** (Charlottenburg).

Adunanza dell'11 aprile 1909.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Abhängigkeit der Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen und der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung von den End- oder Randwerten und den Parametern.

Nachdem Herr H. A. SCHWARZ in seiner Abhandlung zum siebzigsten Geburtstage von WEIERSTRASS [1]) die partielle Differentialgleichung $\Delta u + p(x, y) u = 0$ nach der Methode der successiven Approximationen behandelt hatte, ist dieses Verfahren von Herrn PICARD mit durchschlagendem Erfolge zur Integration der gewöhnlichen und der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung des elliptischen und des hyperbolischen Typus angewandt worden. Seit dem Erscheinen seiner beiden grundlegenden Abhandlungen in dem Journal de mathématiques [2]) ist dieses Verfahren Gegenstand einer langen Reihe von Arbeiten von Herrn PICARD selbst, von den Herren LINDELÖF, v. ESCHERICH, DINI, S. BERNSTEIN und anderen Mathematikern geworden. Herr NICOLETTI und Herr v. ESCHERICH zeigten, dass die unendlichen Reihen, die das Verfahren der successiven Approximationen für die Lösungen eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, \mu) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

[1]) *Über ein die Flächen kleinsten Flächeninhalts betreffendes Problem der Variationsrechnung* [Acta Societatis Scientiarum Fennicae, t. XV (1885), S. 315-362]; *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, Bd. II, S. 223-269.

[2]) PICARD: *a) Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives* [Journal de Mathématiques pures et appliquées, Ser. IV, Bd. VI (1890), S. 145-210]; *b) Sur l'application des méthodes d'approximations successives à l'étude de certaines équations différentielles* [Ibid., Ser. IV, Bd. IX (1893), S. 217-271].

liefert, nach den Anfangswerten und nach dem Parameter μ gliedweise differentiiert werden dürfen. Sie leiteten daraus Sätze über die Abhängigkeit dieser Lösungen von den Anfangswerten und den Parametern her, die übrigens zum Teil schon früher von den Herren POINCARÉ, BENDIXSON, LINDELÖF auf anderem Wege gefunden worden waren. Herr NICOLETTI macht hierbei die Voraussetzung, dass die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial y_k}, \frac{\partial f_i}{\partial \mu} (i, k = 1, \ldots, n)$ der LIPSCHITZ'schen Bedingung genügen. Die Betrachtungen von Herrn v. ESCHERICH gelten allgemein, sind aber sehr umständlich und beweisen nicht, dass die durch gliedweise Differentiation der PICARD'schen Reihen entstehenden Entwicklungen in gleichem Grade konvergieren.

Betrachten wir eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, \mu), \tag{1}$$

wo $f(x, y, \mu)$ eine der LIPSCHITZ'schen Bedingung $|f(x, y, \mu) - f(x, y_1, \mu)| < k|y - y_1|$ genügende Funktion bedeutet. Für die Lösung $y(x, \mu)$ dieser Differentialgleichung, die für $x = x_0$ den Wert y_0 erhält, gibt Herr PICARD folgende in einem gewissen Intervalle in gleichem Grade konvergente Reihe

$$y = y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \cdots, \tag{2}$$

$$\begin{cases} y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0, \mu)\,dx, \\ y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1, \mu)\,dx, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \tag{3}$$

Setzt man in den Formeln (3) für $f(x, y, \mu)$ entsprechend $f_1(x, y, \mu), f_2(x, y, \mu), \ldots$ wo $f_n(x, y, \mu) (n = 1, 2, \ldots)$ stetige Funktionen bedeuten, die mit wachsendem n gegen $f(x, y, \mu)$ in gleichem Grade konvergieren, bildet man also die Ausdrücke

$$\begin{cases} \bar{y}_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f_1(x, y_0, \mu)\,dx, \\ \bar{y}_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f_2(x, \bar{y}_1, \mu)\,dx, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \tag{4}$$

so konvergiert, wie in Kapitel I § 1 gezeigt wird, die unendliche Reihe

$$y_0 + (\bar{y}_1 - y_0) + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1) + \cdots \tag{5}$$

in gleichem Grade und hat y zur Summe.

Es seien jetzt die partiellen Ableitungen f_y und f_μ vorhanden und stetig. Wendet man das modifizierte Verfahren der successiven Approximationen auf die Differentialgleichungen $\frac{dt}{dx} = f_y(x, y, \mu)t$, $\frac{du}{dx} = f_y(x, y, \mu)u + f_\mu(x, y, \mu)$ an, so ergeben sich

fast ohne jede Rechnung die Sätze von Herrn NICOLETTI und von Herrn v. ESCHERICH über die gliedweise Differentiation der PICARD'schen Reihen nach den Anfangswerten der Lösung und den Parametern, wobei aber auch die Konvergenz in gleichem Grade der gewonnenen Entwicklungen mitbewiesen wird. Nebenbei ergibt sich ein neuer Beweis für die Eindeutigkeit der Lösung von (1).

Die analogen Sätze gelten für die Lösungen der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = f(x, y, y', \mu),$$

wenn der Anfangs- und der Endwert vorgeschrieben sind, sowie für die Lösungen der partiellen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \mu\right), \tag{6}$$

$$\Delta z = F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \mu\right), \tag{7}$$

wenn die Randwerte vorgegeben sind.

Es sei C ein von *einer* analytischen Linie [3]) begrenztes Gebiet. F sei für alle (x, y) im Innern und auf dem Rande von C und für alle

$$z, \qquad u = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial z}{\partial y}, \qquad \mu,$$

die den Ungleichheitsbedingungen

$$|z| \leqq L, \qquad |u| \leqq L', \qquad |v| \leqq L'; \qquad |\mu - \mu_0| \leqq c \tag{8}$$

genügen, stetig und besitze stetige partielle Ableitungen F_x, F_y, F_z, F_u, F_v. Gesucht wird eine Lösung der Differentialgleichung (7), die im Innern von C mit ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung sich stetig verhält und am Rande eine vorgeschriebene stetige Folge von Werten annimmt.

Für lineare Differentialgleichungen beweist Herr PICARD [4]), dass die gesuchte Lösung existiert, wenn der Flächeninhalt des Gebietes hinreichend klein ist und die Randwerte, als Funktion der Bogenlänge betrachtet, stetige Ableitungen der drei ersten Ordnungen haben. Die gesuchte Lösung kann nach dem Verfahren der successiven Approximationen ermittelt werden.

Dieses Verfahren gelingt nach Herrn DINI [5]) auch dann schon, wenn die Randwerte stetig sind und stetige Ableitungen der ersten und der zweiten Ordnung haben [6]).

---

[3]) Diese Beschränkung ist nicht notwendig [Vgl. die Fussnote [27])].

[4]) *Sur la détermination des intégrales de certaines équations linéaires du second ordre par leurs valeurs sur un contour fermé* [Journal de Mathématiques pures et appliquées, Ser. V, Bd. VI (1900), S. 129-140].

[5]) *Sur la méthode des approximations successives pour les équations aux dérivées partielles du deuxième ordre* [Acta Mathematica, Bd. XXV (1902), S. 185-230].

[6]) Wie ich in einer im Erscheinen begriffenen Arbeit nachgewiesen habe, ist auch diese Einschränkung überflüssig. Die Lösung existiert stets auch dann schon, wenn die vorgeschriebenen Randwerte einfach stetig sind.

Ist die Differentialgleichung (7) nicht linear, so liefert zwar die Methode der successiven Approximationen immer noch eine Funktion z, die sich mit ihren partiellen Ableitungen $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ in C stetig verhält und die vorgeschriebenen Randwerte annimmt, indessen scheinen hier die Methoden, deren sich die Herren PICARD und DINI bedienen, um nachzuweisen, dass die Reihen für $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ gliedweise differentiierbar sind, nicht zum Ziele zu führen. Dieser Nachweis gelingt, wie im Kapitel II § 3 gezeigt wird, wenn man die Voraussetzung hinzunimmt, dass F_x, F_y, F_z, F_u, F_v der LIPSCHITZ'schen Bedingung genügen. Im Kapitel II § 5 werden einige Sätze über die Eindeutigkeit der Lösungen unter Zuhilfenahme einer wertvollen Bemerkung von Herrn PARAF bewiesen.

In speciellen Fällen sind diese Sätze von den Herren LE ROY, LÜTKEMEYER, HOLMGREN, S. BERNSTEIN [7]) ausgesprochen und bewiesen worden. Der allgemeine Satz scheint bis jetzt in der Literatur nicht vorzukommen, trotzdem sein Beweis überaus einfach ist. In der Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften findet sich unter Hinweis auf Herrn PICARD sogar die Bemerkung: «Bei einer nicht-linearen Differentialgleichung lässt sich im allgemeinen *nicht einmal für ein hinreichend kleines Gebiet* behaupten, dass es nur *eine* Lösung der Randwertaufgabe geben könne [8])». Bemerkenswert ist, dass es für die Eindeutigkeit der Lösung der Differentialgleichung (7) genügt, wenn die Randwerte einfach stetig sind und die Funktion $F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \mu\right)$ sich stetig verhält und die LIPSCHITZ'sche Bedingung erfüllt. Über den Charakter der Begrenzungskurven und das Verhalten der Funktionen $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ am Rande werden keine beschränkende Voraussetzungen gemacht. Der Beweis der Existenz der Lösung gelingt dem gegenüber im allgemeinen nur unter weitgehenden beschränkenden Annahmen über die Gestalt des Gebietes und den Charakter der Randwerte.

Neu in dieser Arbeit sind voraussichtlich neben dem Existenzbeweise für die Lösung der Differentialgleichung $\Delta z = F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \mu\right)$ das modifizierte Verfahren der successiven Approximationen, die Sätze über die gliedweise Differentiation der PICARD'schen Reihen in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung und der partiellen Differentialgleichungen des elliptischen und des hyperbolischen Typus und die Sätze über die Abhängigkeit der Lösungen von den Randwerten und den Parametern.

---

[7]) Meist unter der im allgemeinen nicht zulässigen Voraussetzung, dass die partiellen Ableitungen erster Ordnung der gesuchten Lösungen sich bei der Annäherung an den Rand stetig ändern.

[8]) Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, II A 7 c, S. 522. Vergl. auch PICARD, l. c. [2]), *a*, S. 146.

KAPITEL I.

§ 1.

Betrachten wir eine Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{1}$$

wo x und y reelle Variable bedeuten. $f(x, y)$ sei definiert für

$$\begin{cases} 0 \leqq x - x_0 \leqq a, \\ |y - y_0| \leqq b, \end{cases} \tag{2}$$

verhalte sich in diesem Gebiete stetig und genüge der LIPSCHITZ'schen Bedingung

$$|f(x, y) - f(x, y')| < k|y - y'|.$$

M sei Max $|f(x, y)|$ in dem Gebiete (2),

$$\rho = \operatorname{Min}\left(a, \frac{b}{M}\right).$$

Um die stetige Lösung von (1) zu bestimmen, die für $x = x_0$ den Wert y_0 annimmt, verfährt Herrn PICARD [9] wie folgt:

Er bildet für

$$0 \leqq x - x_0 \leqq \rho$$

die unendliche Reihe von Funktionen

$$\begin{cases} y_0 = y_0, \\ y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\,dx, \\ y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1)\,dx, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})\,dx, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} \tag{3}$$

und beweist, dass

$$\lim_{n=\infty} y_n = y$$

die gesuchte Lösung von (1) ist.

Neben $f(x, y)$ betrachten wir jetzt eine unendliche Reihe stetiger Funktionen

$$f_n(x, y), \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

die in dem Rechteck (2) definiert sind und mit wachsendem n gegen $f(x, y)$ in gleichem

---

[9]) PICARD l. c. [2]), *a*, *b*. — PICARD, *Traité d'Analyse*, Bd. II (1905), S. 301; Bd. III (1896), S. 88.

Grade konvergieren

$$(4)\qquad \begin{cases} |f(x, y) - f_n(x, y)| < \varepsilon_{n-1} \\ \lim\limits_{n=\infty} \varepsilon_n = 0. \end{cases} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

Es sei N die obere Grenze der Werte

$$|f_n(x, y)|$$

im Gebiete (2).

Wir bilden die Ausdrücke:

$$(5)\qquad \begin{cases} y_0 = y_0, \\ y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f_1(x, y_0)\,dx, \\ y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f_2(x, y_1)\,dx, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f_n(x, y_{n-1})\,dx, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

$$\text{für} \quad 0 \leqq x - x_0 \leqq \rho^*$$

$$\rho^* = \text{Min}\left(a, \frac{b}{N}\right).$$

Ist y diejenige stetige Lösung der Differentialgleichung (1), die für $x = x_0$ den Wert y_0 annimmt, so wird nunmehr behauptet:

$$\lim_{n=\infty} y_n = y, \quad \lim_{n=\infty} \frac{dy_n}{dx} = \frac{dy}{dx}.$$

Beweis: Wir bemerken vor allem, dass für alle n

$$|y_n - y_0| \leqq b$$

ist. Die Argumente der Funktionen f_n treten aus dem Gebiete, indem diese Funktionen definiert sind, nicht heraus.

Wir nehmen eine unendliche Folge positiver, gegen Null konvergierender Zahlen

$$\delta > \delta_1 > \delta_2 > \cdots$$

$$\lim_{n=\infty} \delta_n = 0$$

an und betrachten die Differenz

$$y - y_{n+1} = \int_{x_0}^{x} f(x, y)\,dx - \int_{x_0}^{x} f_{n+1}(x, y_n)\,dx = \int_{x_0}^{x} [f(x, y) - f(x, y_n)]\,dx$$

$$+ \int_{x_0}^{x} [f(x, y_n) - f_{n+1}(x, y_n)]\,dx.$$

Es ist

$$(6)\quad \begin{cases} |y - y_{n+1}| < k\displaystyle\int_{x_0}^{x} |y - y_n|\,dx + \varepsilon_n(x - x_0) \\ \text{und analog} \\ |y - y_{n+2}| < k\displaystyle\int_{x_0}^{x} |y - y_{n+1}|\,dx + \varepsilon_{n+1}(x - x_0), \\ |y - y_{n+3}| < k\displaystyle\int_{x_0}^{x} |y - y_{n+2}|\,dx + \varepsilon_{n+2}(x - x_0), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ |y - y_{n+m}| < k\displaystyle\int_{x_0}^{x} |y - y_{n+m-1}|\,dx + \varepsilon_{n+m-1}(x - x_0). \end{cases}$$

Wir schreiben zur Abkürzung

$$\int_{x_0}^{x_0+\rho^*} |y - y_n|\,dx = A$$

und bemerken, dass dann für $0 \leqq x - x_0 \leqq \rho^*$

$$\int_{x_0}^{x} |y - y_n|\,dx \leqq A$$

ist.

Die successive Einsetzung ergibt:

$$(7)\quad \begin{cases} |y - y_{n+1}| < kA + \varepsilon_n(x - x_0), \\ |y - y_{n+2}| < k^2 A(x - x_0) + k\varepsilon_n\dfrac{(x - x_0)^2}{2!} + \varepsilon_{n+1}(x - x_0), \\ |y - y_{n+3}| < k^3 A\dfrac{(x - x_0)^2}{2!} + k^2\varepsilon_n\dfrac{(x - x_0)^3}{3!} + k\varepsilon_{n+1}\cdot\dfrac{(x - x_0)^2}{2!} + \varepsilon_{n+2}\cdot(x - x_0), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ |y - y_{n+m}| < k^m\cdot A\dfrac{(x - x_0)^{m-1}}{(m - 1)!} + k^{m-1}\varepsilon_n\dfrac{(x - x_0)^m}{m!} \\ \qquad + k^{m-2}\varepsilon_{n+1}\dfrac{(x - x_0)^{m-1}}{(m - 1)!} + \cdots + \varepsilon_{n+m-1}\cdot(x - x_0). \end{cases}$$

Für hinreichend grosse n

$$n > \lambda$$

ist

$$\varepsilon_{n+\nu} < \delta \qquad (\nu = 0, 1, 2, \dots)$$

und daher

$$(7^a)\quad \begin{cases} |y - y_{n+m}| < k^m A\dfrac{(x-x_0)^{m-1}}{(m-1)!} + \dfrac{\delta}{k}\left\{k(x-x_0) + \dfrac{k^2(x-x_0)^2}{2!} + \cdots + \dfrac{k_m(x-x_0)^m}{m!}\right\} \\ \qquad < k^m A\dfrac{(x-x_0)^{m-1}}{(m-1)!} + \dfrac{\delta}{k}[e^{k(x-x_0)} - 1] \leqq k^m A\dfrac{(x-x_0)^{m-1}}{(m-1)!} + \dfrac{\delta}{k}[e^{ka} - 1] \\ \leqq Ak\dfrac{(ka)^{m-1}}{(m - 1)!} + B\delta, \end{cases}$$

$$B = \frac{1}{k}[e^{ka} - 1].$$

Wir setzen

$$n + m = n_1$$

und wählen m so gross,

$$m > p,$$

dass

$$A k \frac{(k a)^{m-1}}{(m-1)!} < B \delta$$

und

$$\varepsilon_{n_1+\nu} < \delta_1 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

wird.

Wir finden für alle

$$n_1 = n + m > \lambda + p = \lambda_1$$

$$|y - y_{n_1}| = |y - y_{n+m}| < 2 B \delta$$

und

$$A_1 = \int_{x_0}^{x_0+\rho^*} |y - y_{n_1}| d x < 2 a B \delta.$$

Wenn wir dieselben Überlegungen für n_1 und $n_1 + m_1$ wiederholen, finden wir

$$|y - y_{n_1+m_1}| < A_1 k \frac{(k a)^{m_1-1}}{(m_1-1)!} + B \delta_1$$

und für

$$m_1 > p_1, \quad n_1 + m_1 = n_2, \quad n_2 > \lambda_1 + p_1 = \lambda_2$$

$$|y - y_{n_2}| < 2 B \delta_1.$$

So geht man weiter und findet nacheinander

$$|y - y_{n_3}| < 2 B \delta_2 \quad \text{für} \quad n_3 > \lambda_3,$$

$$|y - y_{n_4}| < 2 B \delta_3 \quad \text{für} \quad n_4 > \lambda_4,$$

u. s. w.

Da nun

$$\lim_{l=\infty} \delta_l = 0$$

ist, so hat man schliesslich

$$\lim_{n=\infty} y_n = y.$$

Die Funktionen y_n konvergieren in gleichem Grade gegen y. Hieraus folgt aber ohne weiteres, dass auch die Funktionen $\frac{d y_n}{d x}$ gegen $\frac{d y}{d x}$ in gleichem Grade konvergieren.

Die unendlichen Reihen

$$y = y_0 + (y_1 - y_0) + \cdots$$

$$\frac{d y}{d x} = \frac{d}{d x}(y_1 - y_0) + \frac{d}{d x}(y_2 - y_1) + \cdots$$

konvergieren in gleichem Grade für $0 \leqq x - x_0 \leqq \rho^*$.

Unsere Behauptung ist vollkommen bewiesen.

Unser Satz gilt unverändert für Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung.

Sind f und $f_n (n = 1, 2, \ldots)$ stetige Funktionen eines Parameters μ und gelten die

Ungleichheitsbedingungen (4) für alle $|\mu - \mu_0| \leqq c$, so konvergieren die zuletzt betrachteten unendlichen Reihen für

$$0 \leqq x - x_0 \leqq \rho^*, \qquad |\mu - \mu_0| \leqq c$$

in gleichem Grade.

Man sieht leicht ein, dass es für $x_0 \leqq x \leqq \rho$ nur *eine* stetige Lösung der Differentialgleichung (1) gibt, die für $x = x_0$ den Wert y_0 annimmt. Es sei $Y(x)$ irgend eine Lösung, die die Forderungen der Aufgabe erfüllt. Wie wir zuletzt bewiesen hatten, ist

$$Y(x) = y_0 + (y_1 - y_0) + \cdots = y.$$

§ 2.

Wir kehren zu der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

zurück und betrachten diejenige ihrer stetigen Lösungen, die für $x = x_0$ den Wert y_0^* annimmt

$$y_0 - b < y_0 - \delta \leqq y_0^* \leqq y_0 + \delta < y_0 + b.$$

Das Verfahren der successiven Approximationen (3) liefert sie in der Gestalt der unendlichen Reihe

$$y(x, y_0^*) = y_0^* + (y_1 - y_0^*) + (y_2 - y_1) + \cdots, \tag{8}$$

die für

$$\begin{cases} x_0 \leqq x \leqq x_0 + \rho', \\ y_0 - \delta \leqq y_0^* \leqq y_0 + \delta, \end{cases} \qquad \rho' = \operatorname{Min}\left(a, \frac{b-\delta}{M}\right) \tag{9}$$

in gleichem Grade konvergiert. Zugleich ist

$$\frac{\partial y(x, y_0^*)}{\partial x} = \frac{\partial y_0^*}{\partial x} + \frac{\partial (y_1 - y_0^*)}{\partial x} + \frac{\partial (y_2 - y_1)}{\partial x} + \cdots. \tag{10}$$

Auch diese Reihe konvergiert in gleichem Grade.

Wie man aus den Formeln (3) leicht sieht, sind die Glieder der Reihen (8) und (10) stetige Funktionen von x und y_0^*. Daher sind auch $y(x, y_0^*)$ und $\frac{\partial y(x, y_0^*)}{\partial x}$ stetige Funktionen von x und y_0^*.

Ist in dem Rechteck (2)

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = f_y(x, y)$$

vorhanden und stetig, so existieren die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial y(x, y_0^*)}{\partial y_0^*}, \qquad \frac{\partial^2 y(x, y_0^*)}{\partial y_0^* \partial x} \tag{11}$$

und sind für alle Werte von x und y_0^* in (9) stetig [10]).

---

[10]) Vergl. z. B. E. LINDELÖF, *Démonstration de quelques théorèmes sur les équations différentielles* [Journal de Mathématiques pures et appliquées, Ser. V, Bd. VI (1900), S. 423-441].

Die partiellen Ableitungen (11) *lassen sich durch die für alle Werte von x und y_0^* in* (9) *in gleichem Grade konvergenten Reihen*

$$(12) \qquad \frac{\partial y(x, y_0^*)}{\partial y_0^*} = \frac{\partial y_0^*}{\partial y_0^*} + \frac{\partial (y_1 - y_0^*)}{\partial y_0^*} + \frac{\partial (y_2 - y_1)}{\partial y_0^*} + \cdots,$$

$$\frac{\partial^2 y(x, y_0^*)}{\partial y_0^* \partial x} = \frac{\partial^2 y_0^*}{\partial y_0^* \partial x} + \frac{\partial^2 (y_1 - y_0^*)}{\partial y_0^* \partial x} + \frac{\partial^2 (y_2 - y_1)}{\partial y_0^* \partial x} + \cdots$$

darstellen.

Die unendlichen Reihen (8) *und* (10), *die das Verfahren der successiven Approximationen liefert, lassen sich nach dem Anfangswert y_0^* gliedweise differentiieren.*

Diesen Satz hatte zuerst Herr NICOLETTI [11]) bewiesen. Er machte hierbei die Annahme, dass die Funktion $f_y(x, y)$ der LIPSCHITZ'schen Bedingung genügt. Später hat Herr v. ESCHERICH [12]) die Konvergenz der Reihe

$$s = \frac{\partial y_0^*}{\partial y_0^*} + \frac{\partial (y_1 - y_0^*)}{\partial y_0^*} + \frac{\partial (y_2 - y_1)}{\partial y_0^*} + \cdots$$

und die Gültigkeit der Beziehung $s = \frac{\partial y(x, y_0^*)}{\partial y_0^*}$ ohne jede beschränkende Voraussetzungen dargetan. Sein Beweis ist sehr umständlich und gilt für das Gebiet

$$x_0 \leqq x \leqq x_0 + \rho_1,$$
$$y_0 - \delta \leqq y_0^* \leqq y_0 + \delta,$$

$$\rho_1 = \mathrm{Min}\left(a, \frac{b - \delta}{M_1}\right), \qquad M_1 = \mathrm{Max}\left(f(x, y), \ f_y(x, y)\right) \text{ in } (2).$$

Im allgemeinen ist ρ_1 kleiner als ρ'. Ueberdies beweist Herr VON ESCHERICH nicht, dass die Reihe für s in gleichem Grade konvergiert.

Die im § 1 durchgeführten Betrachtungen geben nun ein Mittel, den Satz, um den es sich hier handelt, leicht zu beweisen.

Wir gehen von der Differentialgleichung

$$(13) \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \cdot z = f_y(x, y) \cdot z$$

aus und suchen diejenige ihrer stetigen Lösungen zu bestimmen, die für $x = x_0$ den Wert $z = 1$ annimmt. In $f_y(x, y)$ ist hierbei für y der Ausdruck $y(x, y_0^*)$ einzusetzen. $f_y(x, y)$ wird so eine stetige Funktion von x und y_0^* in (9). Die gesuchte Lösung z ist für alle x und y_0^* in (9) eine stetige Funktion dieser beiden Argumente.

Aus der Stetigkeit von $f_y(x, y)$ und dem Umstande, dass die Funktionen y_0^*, y_1, y_2, y_3, ... gegen $y(x, y_0^*)$ in gleichem Grade konvergieren, folgt, dass auch die

[11]) *Sugli integrali delle equazioni differenziali ordinarie considerati come funzioni dei loro valori iniziali* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, Bd. IV (1895), 2. Semester, S. 316-324].

[12]) *Über Systeme von Differentialgleichungen der I. Ordnung* [Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, Bd. CVIII (1899), Abtheilung II a., S. 621-676].

Funktionen

$$f_y(x,\ y_1),\qquad f_y(x,\ y_2),\qquad f_y(x,\ y_3),\ \ldots$$

gegen $f_y(x,\ y)$ in gleichem Grade konvergieren.

Wir lösen die Differentialgleichung (13) nach dem im § 1 auseinandergesetzten verallgemeinerten Verfahren der successiven Approximationen auf. Für die Funktion, die wir im § 1 mit $f_n(x,\ y)$ bezeichnet hatten, tritt jetzt die Funktion

$$f_y(x,\ y_{n-1})z$$

ein. Für

$$f_n(x,\ y_{n-1})$$

haben wir

$$f_y(x,\ y_{n-1})z_{n-1}$$

zu setzen.

Die successiven Approximationen sind:

$$z_0 = 1 = \frac{\partial y_0^\bullet}{\partial y_0^\bullet},$$

$$z_1 = 1 + \int_{x_0}^{x} f_y(x,\ y_0^\bullet)z_0 dx = 1 + \int_{x_0}^{x} f_y(x,\ y_0^\bullet)\frac{\partial y_0^\bullet}{\partial y_0^\bullet}dx = \frac{\partial}{\partial y_0^\bullet}\left[y_0^\bullet + \int_{x_0}^{x} f(x,\ y_0^\bullet)dx\right] = \frac{\partial y_1}{\partial y_0^\bullet},$$

$$z_2 = 1 + \int_{x_0}^{x} f_y(x,\ y_1)z_1 dx = 1 + \int_{x_0}^{x} f_y(x,\ y_1)\frac{\partial y_1}{\partial y_0^\bullet}dx = \frac{\partial}{\partial y_0^\bullet}\left[y_0^\bullet + \int_{x_0}^{x} f(x,\ y_1)dx\right] = \frac{\partial y_2}{\partial y_0^\bullet},$$

$$z_3 = 1 + \int_{x_0}^{x} f_y(x,\ y_2)z_2 dx = 1 + \int_{x_0}^{x} f_y(x,\ y_2)\frac{\partial y_2}{\partial y_0^\bullet}dx = \frac{\partial}{\partial y_0^\bullet}\left[y_0^\bullet + \int_{x_0}^{x} f(x,\ y_2)dx\right] = \frac{\partial y_3}{\partial y_0^\bullet},$$

. . . .

Der allgemeine Satz des § 1 gibt die Entwicklungen

$$z = z_0 + (z_1 - z_0) + (z_2 - z_1) + \cdots,\qquad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z_0}{\partial x} + \frac{\partial (z_1 - z_0)}{\partial x} + \cdots$$

oder

$$z = \frac{\partial y_0^\bullet}{\partial y_0^\bullet} + \frac{\partial (y_1 - y_0^\bullet)}{\partial y_0^\bullet} + \frac{\partial (y_2 - y_1)}{\partial y_0^\bullet} + \cdots,\qquad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^2 y_0^\bullet}{\partial x \partial y_0^\bullet} + \frac{\partial^2 (y_1 - y_0^\bullet)}{\partial x \partial y_0^\bullet} + \cdots.$$

Diese unendlichen Reihen konvergieren in gleichem Grade für

$$x_0 \leqq x \leqq x_0 + \rho',$$
$$y_0 - \delta \leqq y_0^\bullet \leqq y_0 + \delta,$$

können daher in bezug auf $y_0^\bullet$ gliedweise integriert werden.

Wir finden so

$$\int_{y_0}^{y_0^\bullet} z\, dy_0^\bullet = [y_0^\bullet + (y_1 - y_0^\bullet) + (y_2 - y_1) + \cdots]_{y_0}^{y_0^\bullet} = y(x,\ y_0^\bullet) - y(x,\ y_0)$$

und daher

$$z = \frac{\partial y(x,\ y_0^\bullet)}{\partial y_0^\bullet},\qquad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^2 y(x,\ y_0^\bullet)}{\partial x \partial y_0^\bullet},$$

$$(12)\qquad \frac{\partial y(x,\ y_0^\bullet)}{\partial y_0^\bullet} = \frac{\partial y_0^\bullet}{\partial y_0^\bullet} + \frac{\partial (y_1 - y_0^\bullet)}{\partial y_0^\bullet} + \frac{\partial (y_2 - y_1)}{\partial y_0^\bullet} + \cdots,$$

$$\frac{\partial^2 y(x,\ y_0^\bullet)}{\partial x \partial y_0^\bullet} = \frac{\partial^2 y_0^\bullet}{\partial x \partial y_0^\bullet} + \frac{\partial^2 (y_1 - y_0^\bullet)}{\partial x \partial y_0^\bullet} + \frac{\partial^2 (y_2 - y_1)}{\partial x \partial y_0^\bullet} + \cdots.$$

Unsere Behauptung ist hiermit vollständig bewiesen.

Wir erkennen zugleich, dass

$$z = \frac{\partial y(x, y_0^*)}{\partial y_0^*}$$

der Differentialgleichung

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_y(x, y) z, \tag{13}$$

aus der durch Auflösung die Formel [13])

$$z = \frac{\partial y(x, y_0^*)}{\partial y_0^*} = e^{\int_{x_0}^x f_y(x, y) dx} \tag{14}$$

folgt, Genüge leistet.

Der zuletzt bewiesene Satz gilt auch für Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung und kann in ähnlicher Weise bewiesen werden.

Herr VON ESCHERICH hat in seiner oben zitierten Arbeit auch Sätze über die wiederholte Differentiation der PICARD'schen Reihen (8) entwickelt. Auch diese Sätze lassen sich nach dem in diesem Abschnitt befolgten Verfahren leicht beweisen.

In analoger Weise lässt sich ein Satz über Differentialgleichungen, die von einem Parameter abhängen, ableiten.

Betrachten wir die Differentialgleichung

$$\frac{\partial y}{\partial x} = f(x, y, \mu). \tag{15}$$

$f(x, y, \mu)$ sei definiert für

$$\begin{aligned} x_0 &\leqq x \leqq x_0 + a, \\ |y - y_0| &\leqq b, \\ |\mu - \mu_0| &\leqq c, \end{aligned} \tag{16}$$

verhalte sich in diesem Gebiete stetig und genüge der LIPSCHITZ'schen Bedingung.

Wir bezeichnen diejenige stetige Lösung der Differentialgleichung (15), die dem Werte μ des Parameters entspricht und für $x = x_0$ gleich y_0 wird, mit $y(x, \mu)$.

Es sei wieder $M = \text{Max}\, |f(x, y, \mu)|$ im Gebiete (16),

$$\rho = \text{Min}\left(a, \frac{b}{M}\right).$$

Das Verfahren der successiven Annäherungen (3) liefert für diese Lösung und ihren ersten Differentialquotienten für

$$\left\{ \begin{aligned} x_0 &\leqq x \leqq x_0 + \rho, \\ |\mu - \mu_0| &\leqq c \end{aligned} \right. \tag{17}$$

die in gleichem Grade konvergenten unendlichen Reihen

$$\left\{ \begin{aligned} y(x, \mu) &= y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \cdots, \\ \frac{\partial y(x, \mu)}{\partial x} &= \frac{\partial y_0}{\partial x} + \frac{\partial (y_1 - y_0)}{\partial x} + \frac{\partial (y_2 - y_1)}{\partial x} + \cdots \end{aligned} \right. \tag{18}$$

[13]) Diese Formel findet sich in den Arbeiten der Herren PEANO und BENDIXSON.

$y_0, y_1, y_2, \ldots$ sind, wie aus dem Bildungsgesetz (3) ersichtlich ist, stetige Funktionen von x und μ. Die Reihen (18) konvergieren in gleichem Grade. Daher sind $y(x, \mu)$ und $\frac{\partial y(x, \mu)}{\partial x}$ stetige Funktionen von x und μ in (17).

Sind in dem Gebiete (16)

$$f_y(x, y, \mu) = \frac{\partial f(x, y, \mu)}{\partial y}$$

und

$$f_\mu(x, y, \mu) = \frac{\partial f(x, y, \mu)}{\partial \mu}$$

vorhanden und stetig, so existieren die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial y(x, \mu)}{\partial \mu}, \qquad \frac{\partial^2 y(x, \mu)}{\partial x \partial \mu},$$

sind für alle Werte von x und μ in (17) *stetig* [14]) *und lassen sich in die in gleichem Grade konvergenten Reihen*

$$(19) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial y(x, \mu)}{\partial \mu} = \dfrac{\partial y_0}{\partial \mu} + \dfrac{\partial (y_1 - y_0)}{\partial \mu} + \dfrac{\partial (y_2 - y_1)}{\partial \mu} + \cdots, \\[2ex] \dfrac{\partial^2 y(x, \mu)}{\partial x \partial \mu} = \dfrac{\partial^2 y_0}{\partial x \partial \mu} + \dfrac{\partial^2 (y_1 - y_0)}{\partial x \partial \mu} + \cdots \end{cases}$$

entwickeln [15]).

Die unendlichen Reihen (18) *lassen sich nach dem Parameter der Differentialgleichung gliedweise differentiieren.*

Zum Beweise hat man von der Differentialgleichung

$$(20) \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = f_y(x, y, \mu) z + f_\mu(x, y, \mu)$$

auszugehen und diejenige ihrer stetigen Lösungen nach dem verallgemeinerten Verfahren der successiven Approximationen darzustellen, die für $x = x_0$ den Wert $z_0 = 0$ annimmt.

Für die Funktionen, die wir im § 1 mit $f_n(x, y)$ bezeichnet hatten, tritt jetzt die Funktion

$$f_y\big(x, y_{n-1}(x, \mu), \mu\big) z + f_\mu\big(x, y_{n-1}(x, \mu), \mu\big)$$

ein.

Für $f_n(x, y_{n-1})$ haben wir

$$f_y\big(x, y_{n-1}(x, \mu), \mu\big) z_{n-1} + f_\mu\big(x, y_{n-1}(x, \mu), \mu\big)$$

zu setzen.

Wir erkennen so zugleich, dass

$$z = \frac{\partial y(x, \mu)}{\partial \mu}$$

---

[14]) Vergl. z. B. E. LINDELÖF, l. c. [10]).

[15]) Vergl. v. ESCHERICH, l. c. [12]). Herr v. ESCHERICH beweist übrigens nur, dass die Reihe (19) konvergiert und die Summe $\frac{\partial y(x, \mu)}{\partial \mu}$ hat.

der Differentialgleichung

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_y(x, y, \mu) z + f_\mu(x, y, \mu) \tag{20}$$

Genüge leistet [16]).

Aus (20) folgt durch Auflösung

$$z = \frac{\partial y(x, \mu)}{\partial \mu} = e^{\int_{x_0}^x f_y dx} \cdot \int_{x_0}^x f_\mu \cdot e^{-\int_{x_0}^x f_y dx} dx. \tag{21}$$

Diese Formel ist der früher abgeleiteten Formel (14) analog. Wir machen jetzt noch eine Bemerkung. Die PICARD'schen Reihen konvergieren sicher für $0 \leqq x - x_0 \leqq \rho$. Ist $\frac{b}{M} < a$, so können sie noch darüber hinaus in gleichem Grade konvergieren. Dies treffe für

$$\left\{\begin{array}{c} 0 \leqq x - x_0 \leqq r > \rho, \\ r \leqq a, \\ |\mu - \mu_0| \leqq c_1 \leqq c \end{array}\right. \tag{22}$$

zu.

Man überzeugt sich leicht durch Wiederholung des Beweisverfahrens, dass die Sätze über die gliedweise Differentiation der Reihen (18) und die Existenz der in Bezug auf y_0^* und μ genommenen partiellen Ableitungen in dem ganzen Gebiete (22) gelten.

§ 3.

In dem dritten Bande seines Lehrbuches der Analysis [17]) beweist Herr PICARD folgenden wichtigen Satz:

Gegeben sei eine Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = f(x, y, y', \mu), \tag{23}$$

wo $f(x, y, y', \mu)$ eine in dem Gebiete

$$\left\{\begin{array}{l} 0 \leqq x \leqq b, \\ |y| \leqq L, \\ |y'| \leqq L', \quad |\mu - \mu_0| \leqq c \end{array}\right. \tag{24}$$

definierte stetige reelle Funktion der reellen Veränderlichen x, y, y', μ bedeutet.

Es sei ferner für alle im Gebiete (24) enthaltenen Werte von x, y, y', y_1, y'_1, μ

$$|f(x, y, y', \mu) - f(x, y_1, y'_1, \mu)| < \alpha |y - y_1| + \beta |y' - y'_1|, \tag{25}$$
$$M = \operatorname{Max} |f(x, y, y', \mu)|.$$

---

[16]) Vergl. z. B. E. LINDELÖF, l. c. [10]).

[17]) PICARD, *Traité d'Analyse*, Bd. III (1896), S. 94-100. — Vergl. auch PICARD, l. c. [2]) *a*, S. 197-210; *b*, S. 229-236.

b und B mögen zwei Grössen bedeuten, die folgenden Ungleichheitsbedingungen genügen:

$$(26)\qquad \begin{cases} |B| \leqq L, \\ \dfrac{M b^2}{8} + |B| \leqq L, \\ \dfrac{M b}{2} + \left|\dfrac{B}{b}\right| \leqq L', \\ \dfrac{\alpha b^2}{8} + \beta \dfrac{b}{2} < 1. \end{cases}$$

Diese Ungleichheitsbedingungen lassen sich stets erfüllen, wenn b, B, $\left|\frac{B}{b}\right|$ hinreichend klein sind.

Es gibt stets eine und nur eine Lösung der Differentialgleichung (23), die mit ihrer ersten Ableitung sich in dem Intervalle $0 \leqq x \leqq a$ stetig verhält, für $x = 0$ den Wert 0, für $x = b$ den Wert B annimmt. Diese Lösung und ihre Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung lassen sich in der Form der in gleichem Grade konvergenten unendlichen Reihen

$$(27)\qquad \begin{cases} y = y_1 + (y_2 - y_1) + (y_3 - y_2) + \cdots, \quad \dfrac{dy}{dx} = y_1' + (y_2' - y_1') + (y_3' - y_2') + \cdots, \\ \dfrac{d^2 y}{dx^2} = y_1'' + (y_2'' - y_1'') + \cdots \end{cases}$$

darstellen, worin

$$y_1, \quad y_2, \quad y_3, \cdots$$

diejenigen Lösungen der Differentialgleichungen

$$(28)\qquad \begin{cases} y_1'' = f(x, y_0, y_0', \mu), \\ y_2'' = f(x, y_1, y_1', \mu), \\ y_3'' = f(x, y_2, y_2', \mu), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n'' = f(x, y_{n-1}, y_{n-1}', \mu), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

bedeuten, die mit ihren ersten Ableitungen für $0 \leqq x \leqq a$ stetig sind, für $x = 0$ den Wert 0, für $x = b$ den Wert B annehmen. y_0 ist eine beliebige stetige Funktion mit stetiger Ableitung,

$$|y_0| \leqq L, \quad |y_0'| \leqq L'.$$

Das von Herrn PICARD *eingeschlagene Verfahren führt auch dann noch zum Ziele, wenn in den Gleichungen* (28) *für* $f(x, y, y', \mu)$ *stetige Funktionen eingesetzt werden, die gegen* $f(x, y, y', \mu)$ *in gleichem Grade konvergieren.* Dieser Satz ist dem im § 1 gegebenen Satze über Differentialgleichungen erster Ordnung an die Seite zu stellen; er gestattet wie dort Sätze über gliedweise Differentiation der Reihen (27) nach dem Anfangs- und dem Endwerte der Lösung und nach dem Parameter der Differentialgleichung und im Zusammenhange damit Sätze über die Differentiation der Lösung der Differentialgleichung (23) selbst nach den Endwerten und dem Parameter abzuleiten.

Der Beweis ist wie im § 1 zu führen.

Wir nehmen jetzt an, dass die partiellen Ableitungen

$$(29) \qquad f_y, \quad f_{y'}, \quad f_\mu$$

existieren und sich stetig verhalten.

Wie aus dem Bildungsgesetze ersichtlich ist, sind die Glieder der Reihen (27) stetige Funktionen von x und μ. Die Funktionen $y(x, \mu)$, $\frac{\partial y(x, \mu)}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y(x, \mu)}{\partial x^2}$ sind daher ebenfalls stetige Funktionen von x und μ.

Die Lösung $y(x, \mu)$ besitzt für

$$(30) \qquad 0 \leqq x \leqq b, \qquad |\mu - \mu_0| \leqq c$$

stetige partielle Ableitungen

$$(31) \qquad \frac{\partial y}{\partial \mu}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \mu}, \quad \frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial \mu}.$$

Die Ableitung

$$t = \frac{\partial y}{\partial \mu}$$

genügt der Differentialgleichung

$$(32) \qquad \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = f_{y'}(x, y, y', \mu)\frac{\partial t}{\partial x} + f_y(x, y, y', \mu)t + f_\mu(x, y, y', \mu)$$

und kann durch die für alle Werte von x und μ in (30) in gleichem Grade konvergente Reihe

$$(33) \qquad \frac{\partial y}{\partial \mu} = \frac{\partial y_1}{\partial \mu} + \frac{\partial (y_2 - y_1)}{\partial \mu} + \frac{\partial (y_3 - y_2)}{\partial \mu} + \cdots$$

dargestellt werden.

Gleichzeitig gelten die Beziehungen

$$(34) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial x \partial \mu} = \dfrac{\partial^2 y_1}{\partial x \partial \mu} + \dfrac{\partial^2 (y_2 - y_1)}{\partial x \partial \mu} + \cdots, \\ \dfrac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial \mu} = \dfrac{\partial^3 y_1}{\partial x^2 \partial \mu} + \dfrac{\partial^3 (y_2 - y_1)}{\partial x^2 \partial \mu} + \cdots. \end{cases}$$

Auch diese Reihen konvergieren in gleichem Grade für x und μ in (30). *Die* PICARD*'schen Reihen* (27) *lassen sich in Bezug auf den Parameter der Differentialgleichung gliedweise differentiieren* [18].

Der Beweis ist dem im § 2 gegebenen ganz analog.

---

[18]) Herr PICARD beweist folgenden Satz: Ist $f(x, y, y', \mu)$ stetige Funktion von x und analytische Funktion von y, y' und μ, so ist die in diesem Abschnitt betrachtete Lösung der Differentialgleichung $y'' = f(x, y, y', \mu)$ analytische Funktion von μ. Vergl. PICARD, *Sur les équations différentielles renfermant un paramètre arbitraire* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris), Bd. CXVIII (1. Semester 1894), S. 760-764] und *Traité d'Analyse*, Bd. III (Paris, Gauthier-Villars, 1896), S. 164.

Man hat von der Differentialgleichung

$$(32)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 t}{\partial x^2} = f_{y'}(x, y(x, \mu), y'(x, \mu), \mu)\dfrac{\partial t}{\partial x} + f_y(x, y(x, \mu), y'(x, \mu), \mu)t \\ \qquad + f_\mu(x, y(x, \mu), y'(x, \mu), \mu) \end{cases}$$

auszugehen und diejenige ihrer Lösungen nach dem verallgemeinerten Verfahren der successiven Approximationen zu bestimmen, die sich mit ihrer ersten Ableitung für $0 \leqq x \leqq b$ stetig verhält und für $x = 0$ und $x = b$ verschwindet.

Die beiden Sätze dieses Paragraphen lassen sich ohne Aenderung auf Systeme von Differentialgleichungen zweiter Ordnung ausdehnen. Ebenso lassen sich Sätze über die Differentiation der Lösung nach ihren Endwerten, die den im § 2 bewiesenen Sätzen analog sind, ableiten.

§ 4.

Das im § 1 und 2 dargestellte Verfahren lässt sich auf die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung des hyperbolischen Typus

$$(35)\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \mu\right)$$

übertragen. x, y, z, μ sind reelle Variable.

$$F(x, y, z, u, v, \mu)$$

ist eine in dem Gebiete

$$(36)\quad \begin{cases} x_0 \leqq x \leqq x_0 + \alpha, \\ y_0 \leqq y \leqq y_0 + \beta, \\ |z| \leqq a, \quad |u| \leqq b, \quad |v| \leqq b, \quad |\mu - \mu_0| \leqq c \end{cases}$$

stetige reelle Funktion ihrer sechs Argumente.

Für alle $x, y, z, z_1, u, u_1, v, v_1, \mu$ in (36) besteht die Beziehung

$$(37)\quad |F(x, y, z, u, v, \mu) - F(x, y, z_1, u_1, v_1, \mu)| < k \cdot \{|z - z_1| + |u - u_1| + |v - v_1|\}.$$

Es sei

$$M = \operatorname{Max}|F| \text{ in } (36), \quad \rho = \operatorname{Min}\left(\alpha, \frac{b}{M}\right), \quad \rho' = \operatorname{Min}\left(\beta, \frac{b}{M}\right).$$

Wie Herr Picard zuerst gezeigt hatte, gibt es stets eine Lösung z der Differentialgleichung (35), die für $x = x_0$ und $y_0 \leqq y \leqq y_0 + \rho'$ sowie $y = y_0$ und $x_0 \leqq x \leqq x_0 + \rho$ verschwindet und im Innern und auf dem Rande des von den Geraden

$$x = x_0, \quad x = x_0 + \rho, \quad y = y_0, \quad y = y_0 + \rho'$$

und der Hyperbel

$$(39)\quad (x - x_0)(y - y_0) = \frac{a}{M}$$

begrenzten Gebietes D sich mit ihren Differentialquotienten

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

stetig verhält.

Herr PICARD verfährt so [19]. Er löst nacheinander die Differentialgleichungen

$$(40) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y} = F(x, y, 0, 0, 0, \mu), \\ \dfrac{\partial^2 z_2}{\partial x \partial y} = F\left(x, y, z_1, \dfrac{\partial z_1}{\partial x}, \dfrac{\partial z_1}{\partial y}, \mu\right), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

den Grenzbedingungen

$$z_n = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

für alle (x_0, y) und (y_0, x) gemäss auf und beweist, dass die Reihen

$$(41) \quad \begin{cases} z = z_1 + (z_2 - z_1) + (z_3 - z_2) + \cdots \\ \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z_1}{\partial x} + \dfrac{\partial (z_2 - z_1)}{\partial x} + \cdots \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial z_1}{\partial y} + \dfrac{\partial (z_2 - z_1)}{\partial y} + \cdots \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 (z_2 - z_1)}{\partial x \partial y} + \cdots \end{cases}$$

in gleichem Grade konvergieren.

z ist die gesuchte Lösung der Differentialgleichung (35). Um die Konvergenz der Reihen (41) nachzuweisen, führt Herr PICARD eine Vergleichsfunktion ein. Denselben Zweck kann man, wie Herr MASON [20] zeigte, durch eine Abschätzung des Ausdruckes

$$|z_{n+1} - z_n| + \left|\frac{\partial (z_{n+1} - z_n)}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial (z_{n+1} - z_n)}{\partial y}\right|$$

erreichen.

Neben der Funktion $F(x, y, z, u, v, \mu)$ betrachten wir jetzt eine unendliche Reihe stetiger Funktionen

$$(42) \qquad F_n(x, y, z, u, v, \mu) \ldots \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

die für alle x, y, z, u, v, μ im Gebiete (36) definiert sind und mit wachsendem n gegen $F(x, y, z, u, v, \mu)$ in gleichem Grade konvergieren.

Es sei

$$|F(x, y, z, u, v, \mu) - F_n(x, y, z, u, v, \mu)| < \varepsilon_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$\lim \varepsilon_n = 0.$$

Es sei N die obere Grenze der Werte $|F_n|$ in (36), z_0 eine stetige Funktion von x

[19]) Vergl. die Note I in G. DARBOUX, *Théorie générale des surfaces*, Bd. IV (1896), S. 353.

[20]) Vergl. M. MASON, *On the linear differential equation of hyperbolic type* [Mathematische Annalen, Bd. LXV (1908), S. 570-575].

und y, die für

$$x_0 \leqq x \leqq x_0 + \alpha \quad \text{und} \quad y_0 \leqq y \leqq y_0 + \beta$$

stetige partielle Ableitungen erster Ordnung hat und den Ungleichheitsbedingungen

$$|z_0| \leqq a, \qquad \left|\frac{\partial z_0}{\partial x}\right| \leqq b, \qquad \left|\frac{\partial z_0}{\partial y}\right| \leqq b$$

genügt.

Wir lösen nacheinander die partiellen Differentialgleichungen

$$(43) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y} = F_1\left(x, y, z_0, \dfrac{\partial z_0}{\partial x}, \dfrac{\partial z_0}{\partial y}, \mu\right), \\ \dfrac{\partial^2 z_2}{\partial x \partial y} = F_2\left(x, y, z_1, \dfrac{\partial z_1}{\partial x}, \dfrac{\partial z_1}{\partial y}, \mu\right), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial^2 z_n}{\partial x \partial y} = F_n\left(x, y, z_{n-1}, \dfrac{\partial z_{n-1}}{\partial x}, \dfrac{\partial z_{n-1}}{\partial y}, \mu\right), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

den Grenzbedingungen

$$z_n = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

für

$$x = x_0, \qquad y_0 \leqq y \leqq y_0 + \rho_1'$$

und

$$y = y_0, \qquad x_0 \leqq x \leqq x_0 + \rho_1$$

gemäss auf.

Hierin ist

$$\rho_1 = \mathrm{Min}\left(\alpha, \frac{b}{N}\right), \qquad \rho_1' = \mathrm{Min}\left(\beta, \frac{b}{N}\right).$$

Wir bezeichnen mit D_1 das von den Geraden $x = x_0$, $x = x_0 + \rho_1$, $y = y_0$, $y = y_0 + \rho_1'$ und der Hyperbel $(x - x_0)(y - y_0) = \frac{a}{N}$ begrenzte Gebiet. D_1 ist in D enthalten. Man überzeugt sich leicht, dass für alle (x, y) in D_1

$$|z_n| < a, \qquad \left|\frac{\partial z_n}{\partial x}\right| < b, \qquad \left|\frac{\partial z_n}{\partial y}\right| < b$$

ist. Die Argumente von F_n verlassen das Gebiet (36) nicht.

Es wird nunmehr behauptet, dass für $n = \infty$

$$(44) \quad \begin{cases} \lim z_n = z, & \lim \dfrac{\partial z_n}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial x}, \\ \lim \dfrac{\partial z_n}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial y}, & \lim \dfrac{\partial^2 z_n}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}. \end{cases}$$

Die Funktionen

$$z_n, \qquad \frac{\partial z_n}{\partial x}, \qquad \frac{\partial z_n}{\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 z_n}{\partial x \partial y}$$

nähern sich ihren Grenzwerten für alle x, y in D_1 in gleichem Grade.

Wir nehmen eine unendliche Reihe positiver, gegen Null konvergierender Zahlen

$$\delta > \delta_1 > \delta_2 > \cdots, \qquad \lim \delta_n = 0$$

an, wählen λ so gross, dass für

$$n > \lambda, \qquad \varepsilon_{n+\nu} < \delta \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

wird, und bilden den Ausdruck

$$|z - z_{n+1}| + \left|\frac{\partial(z - z_{n+1})}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial(z - z_{n+1})}{\partial y}\right|.$$

Es ist:

$$\frac{\partial^2(z - z_{n+1})}{\partial x \partial y} = F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \mu\right) - F_{n+1}\left(x, y, z_n, \frac{\partial z_n}{\partial x}, \frac{\partial z_n}{\partial y}, \mu\right)$$
$$= F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \mu\right) - F\left(x, y, z_n, \frac{\partial z_n}{\partial x}, \frac{\partial z_n}{\partial y}, \mu\right)$$
$$+ F\left(x, y, z_n, \frac{\partial z_n}{\partial x}, \frac{\partial z_n}{\partial y}, \mu\right) - F_{n+1}\left(x, y, z_n, \frac{\partial z_n}{\partial x}, \frac{\partial z_n}{\partial y}, \mu\right)$$

und daher

$$(45) \qquad \left|\frac{\partial^2(z - z_{n+1})}{\partial x \partial y}\right| < k\left\{|z - z_n| + \left|\frac{\partial(z - z_n)}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial(z - z_n)}{\partial y}\right|\right\} + \delta.$$

Hieraus folgt, wenn wir zur Abkürzung

$$s_x(u) = \int_{x_0}^{x} u\, dx, \qquad s_y(u) = \int_{x_0}^{x} u\, dy, \qquad s_x^p s_y^q(u) = \int_{x_0}^{x} \cdots \int_{y_0}^{y} \cdots u (dx)^p (dy)^q$$

setzen,

$$(46) \begin{cases} |z - z_{n+1}| < s_x s_y\left[k\left\{|z - z_n| + \left|\frac{\partial(z - z_n)}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial(z - z_n)}{\partial y}\right|\right\} + \delta\right], \\ \left|\frac{\partial(z - z_{n+1})}{\partial x}\right| < s_y\left[k\left\{|z - z_n| + \left|\frac{\partial(z - z_n)}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial(z - z_n)}{\partial y}\right|\right\} + \delta\right], \\ \left|\frac{\partial(z - z_{n+1})}{\partial y}\right| < s_x\left[k\left\{|z - z_n| + \left|\frac{\partial(z - z_n)}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial(z - z_n)}{\partial y}\right|\right\} + \delta\right]. \end{cases}$$

Setzt man

$$|z - z_n| + \left|\frac{\partial(z - z_n)}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial(z - z_n)}{\partial y}\right| = W_n,$$

so ergibt sich aus (46) leicht

$$W_{n+1} < (s_x s_y + s_x + s_y)(k W_n + \delta),$$
$$W_{n+2} < (s_x s_y + s_x + s_y)(k W_{n+1} + \delta),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Die successive Einsetzung ergibt folgende symbolische Ungleichheitsbedingung:

$$(47) \begin{cases} W_{n+m} < k^m (s_x s_y + s_x + s_y)^{(m)}(W_n) \\ + \delta\{k^{m-1}(s_x s_y + s_x + s_y)^{(m)}(1) + k^{m-2}(s_x s_y + s_x + s_y)^{(m-1)}(1) + \cdots \\ + k^2(s_x s_y + s_x + s_y)^{(3)}(1) + k(s_x s_y + s_x + s_y)^{(2)}(1) + (s_x s_y + s_x + s_y)(1)\}, \end{cases}$$

oder, wenn der Höchstwert von W_n in D_1 mit A bezeichnet wird,

$$(48) \begin{cases} W_{n+m} < k^m (s_x s_y + s_x + s_y)^{(m)}(A) \\ + \delta\{(s_x s_y + s_x + s_y)(1) + k(s_x s_y + s_x + s_y)^{(2)}(1) + \cdots + k^{m-1}(s_x s_y + s_x + s_y)^{(m)}(1)\}. \end{cases}$$

Das erste Glied rechterhand konvergiert mit wachsendem m in gleichem Grade gegen Null. Wie sich leicht zeigen lässt, ist z. B. für

$$m = 4p, \quad U_m = [k^m (s_x s_y + s_x + s_y)^{(m)}(A)] < A(kg^2)^m \frac{2^{\frac{m}{2}+5}}{\left[\left(\frac{m}{4} - 1\right)!\right]^2 \left(\frac{m}{2} - 1\right)!},$$

wo g eine feste Zahl grösser als α, β und 1 bedeutet. Da ferner $\lim\limits_{m=\infty} \sqrt[m]{U_m} = 0$ ist, so konvergiert die unendliche Reihe

$$(49) \quad (s_x s_y + s_x + s_y)(1) + k(s_x s_y + s_x + s_y)^{(2)}(1) + k^2 (s_x s_y + s_x + s_y)^{(3)}(1) + \cdots$$

in gleichem Grade in dem ganzen Gebiete D_1.

Der Höchstwert ihrer Summe möge mit B bezeichnet werden. Da alle Glieder der Reihe (49) positiv sind, so können wir für (48) auch schreiben

$$(50) \qquad W_{n+m} < \gamma_m + \delta B,$$

wo γ_m eine mit wachsendem m gegen Null konvergierende Grösse bedeutet. Diese Ungleichheitsbedingung ist der Ungleichheitsbedingung (7^a) völlig analog. Wie dort, ziehen wir aus ihr den Schluss

$$\lim_{n=\infty} W_n = 0, \quad \text{d. h.} \quad \lim_{n=\infty} z_n = z, \qquad \lim_{n=\infty} \frac{\partial z_n}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x}, \ \lim_{n=\infty} \frac{\partial z_n}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Offenbar ist dann auch

$$\lim_{n=\infty} \frac{\partial^2 z_n}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

Alle hier betrachteten Funktionen nähern sich ihren Grenzwerten in gleichem Grade. Unsere Behauptung ist hiermit vollständig bewiesen.

Durch diese Betrachtungen ist, wie man leicht sieht, noch folgender wichtiger Satz bewiesen:

In dem Gebiete D gibt es nur eine den Ungleichheitsbedingungen

$$(51) \qquad |z| \leqq a, \qquad \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| \leqq b, \qquad \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| \leqq b$$

genügende Funktion, die im Innern und an dem Rande sich mit ihren partiellen Ableitungen $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ stetig verhält, die Differentialgleichung (35) erfüllt und für

$$x = x_0, \quad y_0 \leqq y \leqq y_0 + \rho' \qquad \text{und} \qquad y = y_0, \quad x_0 \leqq x \leqq x_0 + \rho$$

verschwindet.

Denn, ist $z'(x, y)$ irgend eine Lösung, die die Forderungen der Aufgabe erfüllt, so ist, wie wir zuletzt bewiesen haben,

$$z'(x, y) = z_1 + (z_2 - z_1) + (z_3 - z_2) + \cdots = z(x, y).$$

Wie leicht ersichtlich ist, ist jedes Glied der Reihen (41) stetige Funktion von x, y, μ. Diese Reihen konvergieren in gleichem Grade. Die Funktionen

$$z(x, y, \mu), \qquad \frac{\partial z(x, y, \mu)}{\partial x}, \qquad \frac{\partial z(x, y, \mu)}{\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 z(x, y, \mu)}{\partial x \partial y}$$

sind stetige Funktionen ihrer 3 Argumente für alle x, y im Innern und auf dem Rande von D und für $|\mu - \mu_0| \leqq c$.

LEHRSATZ. — *Sind für x, y, z, u, v, μ in (36)*

$$\frac{\partial F}{\partial z} = F_z, \qquad \frac{\partial F}{\partial u} = F_u, \qquad \frac{\partial F}{\partial v} = F_v, \qquad \frac{\partial F}{\partial \mu} = F_\mu$$

vorhanden und stetig, so lassen sich die Reihen (41) nach μ gliedweise differentiieren. Die durch gliedweise Differentiation erhaltenen Reihen konvergieren für alle x, y im Innern und auf dem Rande von D und für $|\mu - \mu_0| \leqq c$ in gleichem Grade. Für alle diese Werte von x, y, μ sind die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial z}{\partial \mu}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial \mu}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial \mu}, \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial \mu}$$

vorhanden und stetig. Die Ableitung $t = \frac{\partial z}{\partial \mu}$ genügt der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y} = F_z . t + F_u . \frac{\partial t}{\partial x} + F_v . \frac{\partial t}{\partial y} + F_\mu . \tag{52}$$

Wir gehen von der Differentialgleichung (52) aus. Es sei T diejenige Lösung von (52), die in allen Punkten

$$x = x_0, \quad y_0 \leqq y \leqq y_0 + \rho' \quad \text{und} \quad y = y_0, \quad x_0 \leqq x \leqq x_0 + \rho$$

verschwindet und im Innern und auf dem Rande von D sich mit ihren partiellen Ableitungen $\frac{\partial T}{\partial x}$, $\frac{\partial T}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y}$ stetig verhält. Zur Bestimmung von T bedienen wir uns des am Anfang dieses Abschnittes auseinandergesetzten Verfahrens. Für die Funktion, die wir früher mit

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \mu\right)$$

bezeichnet hatten, tritt jetzt die Funktion

$$F_z . t + F_u . \frac{\partial t}{\partial x} + F_v . \frac{\partial t}{\partial y} + F_\mu \tag{53}$$

ein.

Für

$$F_u\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \mu\right)$$

haben wir

$$F_z\left(x, y, z_n, \frac{\partial z_n}{\partial x}, \frac{\partial z_n}{\partial y}, \mu\right) t + F_u\left(x, y, z_n, \frac{\partial z_n}{\partial x}, \frac{\partial z_n}{\partial y}, \mu\right) \frac{\partial t}{\partial x}$$
$$+ F_v\left(x, y, z_n, \frac{\partial z_n}{\partial x}, \frac{\partial z_n}{\partial y}, \mu\right) \frac{\partial t}{\partial y} + F_\mu\left(x, y, z_n, \frac{\partial z_n}{\partial x}, \frac{\partial z_n}{\partial y}, \mu\right)$$

zu setzen. z_n bedeutet hier die nach (40) ermittelte n-te Approximation der Lösung z, also eine wohl bestimmte stetige Funktion von x, y und μ. Zur Abkürzung setzen wir

für den zuletzt hingeschriebenen Ausdruck einfach

$$(54) \qquad F_{\zeta,n}\cdot t + F_{u,n}\frac{\partial t}{\partial x} + F_{v,n}\frac{\partial t}{\partial y} + F_{\mu,n}.$$

Man überzeugt sich leicht, dass die Funktionen (54) für alle x, y im Innern und auf dem Rande von D und für alle $|t|$, $\left|\frac{\partial t}{\partial x}\right|$, $\left|\frac{\partial t}{\partial y}\right|$ kleiner, als eine feste Zahl, mit wachsendem n gegen (53) in gleichem Grade konvergieren.

Wir nehmen $t_0 = \frac{\partial \zeta_1}{\partial \mu}$ an und finden für die successiven Approximationen der Lösung T nach (43) die Formeln

$$(55) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 t_1}{\partial x \partial y} = F_{\zeta 1}\cdot t_0 + F_{u1}\cdot\dfrac{\partial t_0}{\partial x} + F_{v1}\dfrac{\partial t_0}{\partial y} + F_{\mu 1}, \\ \dfrac{\partial^2 t_2}{\partial x \partial y} = F_{\zeta 2}\cdot t_1 + F_{u2}\dfrac{\partial t_1}{\partial x} + F_{v2}\dfrac{\partial t_1}{\partial y} + F_{\mu 2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial^2 t_n}{\partial x \partial y} = F_{\zeta n}\cdot t_{n-1} + F_{un}\dfrac{\partial t_{n-1}}{\partial x} + F_{vn}\dfrac{\partial t_{n-1}}{\partial y} + F_{\mu n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Hieraus ergibt sich durch Integration

$$t_1 = \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\left(F_{\zeta 1}\cdot\frac{\partial \zeta_1}{\partial \mu} + F_{u1}\frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial x \partial \mu} + F_{v1}\frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial y \partial \mu} + F_{\mu 1}\right)dx\,dy$$
$$= \frac{\partial}{\partial \mu}\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} F\left(x, y, \zeta_1, \frac{\partial \zeta_1}{\partial x}, \frac{\partial \zeta_1}{\partial y}, \mu\right)dx\,dy = \frac{\partial \zeta_2}{\partial \mu},$$

$$t_2 = \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\left(F_{\zeta 2}\cdot\frac{\partial \zeta_2}{\partial \mu} + F_{u2}\frac{\partial^2 \zeta_2}{\partial \mu\, \partial x} + F_{v2}\frac{\partial^2 \zeta_2}{\partial \mu\, \partial y} + F_{\mu 2}\right)dx\,dy$$
$$= \frac{\partial}{\partial \mu}\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} F\left(x, y, \zeta_2, \frac{\partial \zeta_2}{\partial x}, \frac{\partial \zeta_2}{\partial y}, \mu\right)dx\,dy = \frac{\partial \zeta_3}{\partial \mu}.$$

In gleicher Weise findet man

$$t_3 = \frac{\partial \zeta_4}{\partial \mu}, \ \ldots, \qquad t_n = \frac{\partial \zeta_{n+1}}{\partial \mu}, \ \ldots.$$

Nach dem allgemeinen Satze konvergieren die Entwicklungen

$$T = t_0 + (t_1 - t_0) + (t_2 - t_1) + \cdots = \frac{\partial \zeta_1}{\partial \mu} + \frac{\partial(\zeta_2 - \zeta_1)}{\partial \mu} + \frac{\partial(\zeta_3 - \zeta_2)}{\partial \mu} + \cdots$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial t_0}{\partial x} + \frac{\partial(t_1 - t_0)}{\partial x} + \frac{\partial(t_2 - t_1)}{\partial x} + \cdots = \frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial \mu\, \partial x} + \frac{\partial^2(\zeta_2 - \zeta_1)}{\partial \mu\, \partial x} + \cdots$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial t_0}{\partial y} + \frac{\partial(t_1 - t_0)}{\partial y} + \frac{\partial(t_2 - t_1)}{\partial y} + \cdots = \frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial \mu\, \partial y} + \frac{\partial^2(\zeta_2 - \zeta_1)}{\partial \mu\, \partial y} + \cdots$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 \zeta_1}{\partial \mu\, \partial x \partial y} + \frac{\partial^3(\zeta_2 - \zeta_1)}{\partial \mu\, \partial x \partial y} + \frac{\partial^3(\zeta_3 - \zeta_2)}{\partial \mu\, \partial x \partial y} + \cdots$$

in gleichem Grade für alle x, y im Innern und auf dem Rande von D und für $|\mu-\mu_0|\leqq c$. Sie können daher in Bezug auf μ gliedweise integriert werden. Wir finden so:

$$\int_{\mu_0}^{\mu} T d\mu = [z_1 + (z_2 - z_1) + (z_3 - z_2) + \cdots]_{\mu_0}^{\mu} = z(x, y, \mu) - z(x, y, \mu_0)$$

und folglich

$$(56)\quad \begin{cases} T = \dfrac{\partial z}{\partial \mu} = \dfrac{\partial z_1}{\partial \mu} + \dfrac{\partial (z_2 - z_1)}{\partial \mu} + \cdots \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial \mu} = \dfrac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial \mu} + \dfrac{\partial^2 (z_2 - z_1)}{\partial x \partial \mu} + \cdots \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial \mu \partial y} = \dfrac{\partial^2 z_1}{\partial \mu \partial y} + \dfrac{\partial^2 (z_2 - z_1)}{\partial \mu \partial y} + \cdots \\ \dfrac{\partial^3 z}{\partial \mu \partial x \partial y} = \dfrac{\partial^3 (z_1)}{\partial \mu \partial x \partial y} + \dfrac{\partial^3 (z_2 - z_1)}{\partial \mu \partial x \partial y} + \cdots . \end{cases}$$

Die unendlichen Reihen (56) konvergieren in gleichem Grade. Daher sind die partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial z}{\partial \mu}, \ldots, \dfrac{\partial^3 z}{\partial \mu \partial x \partial y}$ stetig.

Unsere Behauptungen sind hiermit vollständig bewiesen. Wir haben die Randfunktionen $f(x)$ und $\psi(y)$ gleich Null vorausgesetzt. Den Fall, in welchem sie von Null verschieden sind, kann man durch passende Substitution auf den vorerwähnten zurückführen.

Wir betrachten zum Schluss die Differentialgleichung

$$(57)\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

und suchen diejenige ihrer Lösungen $z(x, y, \mu)$ zu bestimmen, die sich mit ihren partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ stetig verhält, für $x = x_0$ den Wert $\psi(y, \mu)$ und für $y = y_0$ den Wert $f(x, \mu)$ annimmt. $f(x_0, \mu) = \psi(y_0, \mu)$.

Wir setzen die Existenz und Stetigkeit der partiellen Ableitungen

$$(58)\quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial \mu}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \mu}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial \mu}, \quad F_z, \quad F_u, \quad F_v$$

für alle Werte von x, y, μ, die den Ungleichheitsbedingungen

$$x_0 \leqq x \leqq x_0 + \alpha,$$
$$y_0 \leqq y \leqq y_0 + \beta,$$
$$|\mu - \mu_0| \leqq c$$

genügen, voraus und behaupten:

In einem gewissen Gebiete D_2 sind die partiellen Ableitungen

$$(59)\quad \frac{\partial z}{\partial \mu}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial \mu}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial \mu}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial \mu}$$

vorhanden und stetig.

Setzt man nämlich

$$(60)\quad z = f(x, \mu) + \psi(y, \mu) - f(x_0, \mu) + w,$$

so hat man zur Bestimmung von w die Differentialgleichung

$$(61)\begin{cases}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = F\left(x, y, f(x, \mu) + \psi(y, \mu) - f(x_0, \mu) + w, \dfrac{\partial f(x, \mu)}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial \psi(y, \mu)}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \qquad = \Psi\left(x, y, w, \dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial w}{\partial y}, \mu\right).\end{cases}$$

Die Funktion Ψ erfüllt sämtliche Bedingungen, denen die Funktion

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \mu\right)$$

am Anfang dieses Abschnittes zu genügen hatte. Nach dem an jener Stelle bewiesenen Satze existieren die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial w}{\partial \mu}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \mu}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial \mu}, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y \partial \mu}$$

und daher nach (60) auch die partiellen Ableitungen (59). Alle Funktionen (59) und (60) verhalten sich stetig.

Kapitel II.

§ 1.

Wir gehen jetzt zur Betrachtung der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung des elliptischen Typus

$$(1) \qquad \Delta z = F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \mu\right)$$

über und machen zunächst folgende einleitende Bemerkungen:

In der grundlegenden Abhandlung vom Jahre 1890 zeigt Herr Picard [21]), ohne auf die Voraussetzungen, unter welchen seine Resultate gelten, näher einzugehen, dass, wenn der Flächeninhalt des Integrationsgebietes C hinreichend klein ist, die Differentialgleichung (1) eine Lösung besitzt, die im Innern von C mit ihren partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

sich stetig verhält [22]) und an der Begrenzung die vorgeschriebenen Randwerte annimmt. Diese Lösung kann nach dem Verfahren der successiven Approximationen ermittelt werden.

In einer Reihe späterer Veröffentlichungen behandelt Herr Picard des näheren die Frage, unter welchen Bedingungen dieses Verfahren konvergiert, beschränkt sich

[21]) l. c. [2]) *a*.

[22]) Zur Vereinfachung sagen wir von einer solchen Lösung, sie genüge den Bedingungen (P).

aber ausschliesslich auf die Betrachtung der linearen Differentialgleichungen. In einer Arbeit im Journal de mathématiques [23]) spricht Herr PICARD folgenden Satz aus:

Es sei C ein von *einer* analytischen Linie S begrenztes Gebiet.

Die Koeffizienten a, b, c, h der Differentialgleichung

$$(2) \qquad \Delta z = a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz + h$$

und ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung sind in C und auf S stetige Funktionen von x und y. Sind die Randwerte, als Funktion der Bogenlänge betrachtet, stetig und haben sie stetige Ableitungen der drei ersten Ordnungen, so konvergiert das Verfahren der successiven Approximationen, wenn der Flächeninhalt des Gebietes C hinreichend klein ist.

In einer späteren Abhandlung [24]) nimmt Herr PICARD noch specieller an, die Koeffizienten a, b, c, h seien analytische Funktionen von x und y. Alsdann ist jede den Bedingungen (P) genügende Lösung der Differentialgleichung (2) eine analytische Funktion von x und y.

In einem hinreichend kleinen von *einer* analytischen Linie begrenzten Gebiete C gibt es auch dann schon eine den Bedingungen (P) genügende Lösung z der Differentialgleichung (1), die am Rande vorgeschriebene Werte annimmt, wenn diese Werte einfach stetig sind.

Mit der Frage nach den hinreichenden Bedingungen für die Konvergenz des Verfahrens der successiven Approximationen hat sich ausser Herrn PICARD noch Herr DINI [25]) beschäftigt. Herr DINI untersucht die Differentialgleichung (2) in einem hinreichend kleinen, von *einer* analytischen Linie begrenzten Gebiete C und findet, dass es bereits genügt, wenn die vorgeschriebenen Randwerte stetig sind und stetige Ableitungen der ersten und der zweiten Ordnung haben [26]).

---

[23]) l. c. [4]).

[24]) PICARD, *Sur les équations linéaires aux dérivées partielles et la généralisation du problème de* DIRICHLET [Acta Mathematica, Bd. XXV (1902), S. 121-137]. Vergl. auch PICARD, *Sur la détermination des intégrales de certaines équations aux dérivées partielles du second ordre par leurs valeurs le long d'un contour fermé* [Journal de l'École Polytechnique, LX^e Cahier (1890), S. 89-105].

[25]) l. c. [5]).

[26]) Die Ergebnisse von Herrn DINI reichen übrigens weiter. Wir haben zuletzt angenommen, dass die Funktionen a, b, c, h stetige partielle Differentialquotienten erster Ordnung haben. Es genügt aber schon, wenn sie die «Normalbedingungen» erfüllen. Die Existenz der Ableitung zweiter Ordnung der Randwerte ist gleichfalls nicht erforderlich; sie kann durch gewisse Integrabilitätsbedingungen der Ableitung erster Ordnung ersetzt werden. Das Verfahren der successiven Approximationen gelingt in jedem «Normalgebiete», d. h. in jedem Gebiete, das durch gewisse Eigenschaften der in diesem Gebiete zu beliebigen stetigen Randwerten gehörigen Potentialfunktion charakterisiert ist. Allerdings beweist Herr DINI nur von dem Kreise, dass er ein Normalgebiet darstellt. Die Existenz der Ableitungen der Randwerte ist übrigens für die Existenz der Lösung der Differentialgleichung (2) nicht erforderlich. Die Lösung existiert stets dann schon, wenn die vorgeschriebenen Randwerte einfach stetig sind. Vergl. die Fussnote [6]).

Wir betrachten ein von *einer* analytischen Linie S [27]) begrenztes Gebiet C und suchen eine den Bedingungen (P) genügende Lösung der Differentialgleichung (1) zu bestimmen, die am Rande eine vorgeschriebene stetige Folge von Werten annimmt. Diese Werte sollen, als Funktion der Bogenlänge betrachtet, stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung haben. Die Funktion $F(x, y, z, u, v, \mu)$ sei für alle (x, y) im Innern und auf dem Rande von C und für alle z, u, v, μ, die den Ungleichheitsbedingungen

$$(3) \qquad |z| \leqq L, \qquad |u| \leqq L', \qquad |v| \leqq L', \qquad |\mu - \mu_0| \leqq c$$

genügen, stetig und besitze stetige partielle Ableitungen

$$F_x, \quad F_y, \quad F_z, \quad F_u, \quad F_v.$$

Man löse nacheinander die Differentialgleichungen

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} \Delta z_1 = 0, \\ \Delta u_2 = \Delta(z_2 - z_1) = F\left(x, y, z_1, \dfrac{\partial z_1}{\partial x}, \dfrac{\partial z_1}{\partial y}, \mu\right), \\ \Delta u_3 = \Delta(z_3 - z_2) = F\left(x, y, z_2, \dfrac{\partial z_2}{\partial x}, \dfrac{\partial z_2}{\partial y}, \mu\right) - F\left(x, y, z_1, \dfrac{\partial z_1}{\partial x}, \dfrac{\partial z_1}{\partial y}, \mu\right) \end{array} \right.$$

den folgenden Grenzbedingungen gemäss auf: die Funktionen $z_1, u_2, u_3, \ldots$ sollen den Bedigungen (P) genügen. z_1 nimmt am Rande die vorgeschriebenen Werte an, $u_2, u_3, \ldots$ verschwinden am Rande. Da die Randwerte nach der Voraussetzung stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung haben, so sind die partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial z_1}{\partial x}, \dfrac{\partial z_1}{\partial y}$ in C und auf S stetig [28]). Selbstverständlich müssen die Randwerte so gewählt sein, dass

$$|z_1| < L, \qquad \left|\frac{\partial z_1}{\partial x}\right| < L', \qquad \left|\frac{\partial z_1}{\partial y}\right| < L'$$

wird. Es genügt hierzu, wenn die Randwerte und ihre zwei ersten Ableitungen dem absoluten Betrage nach bestimmte von C, L, L' abhängige Höchstwerte nicht übersteigen [29]). Man überzeugt sich leicht, dass die Funktionen $\dfrac{\partial u_n}{\partial x}, \dfrac{\partial u_n}{\partial y}$ sich überall in C und auf dem Rande von C stetig verhalten.

Ist $G(x, y; \xi, \eta)$ die zu dem gegebenen Gebiete gehörige GREEN'sche Funktion,

---

[27]) Auch diese Einschränkung ist nicht notwendig. Es genügt vielmehr, wenn die Begrenzung des Gebietes C aus stetig gekrümmten Kurven besteht.

[28]) Diesen Satz beweist Herr DINI durch die Betrachtung des POISSON'schen Integrales [l. c. [5]), S. 221 u. ff.]. Einen anderen sehr eleganten Beweis gibt Herr S. BERNSTEIN in der Abhandlung: *Sur la nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles du second ordre* [Mathematische Annalen, Bd. LIX (1904), S. 20-76], S. 23 u. ff., gestützt auf den Fundamentalsatz von Herrn DE LA VALLÉE POUSSIN über die FOURIER'schen Koeffizienten integrierbarer Funktionen.

[29]) Vergl. DINI, l. c. [5]), S. 221-229.

so findet man aus (4) zunächst rein formell

$$(5)\quad \begin{cases} u_{n+1} = -\frac{1}{2\pi}\int\int G(x, y; \xi, \eta)\Big[F\Big(\xi, \eta, \zeta_n, \frac{\partial \zeta_n}{\partial \xi}, \frac{\partial \zeta_n}{\partial \eta}, \mu\Big) \\ \qquad - F\Big(\xi, \eta, \zeta_{n-1}, \frac{\partial \zeta_{n-1}}{\partial \xi}, \frac{\partial \zeta_{n-1}}{\partial \eta}, \mu\Big)\Big] d\xi\, d\eta, \\ \frac{\partial u_{n+1}}{\partial x} = -\frac{1}{2\pi}\int\int \frac{\partial G}{\partial x}\cdot\Big[F\Big(\xi, \eta, \zeta_n, \frac{\partial \zeta_n}{\partial \xi}, \frac{\partial \zeta_n}{\partial \eta}, \mu\Big) \\ \qquad - F\Big(\xi, \eta, \zeta_{n-1}, \frac{\partial \zeta_{n-1}}{\partial \xi}, \frac{\partial \zeta_{n-1}}{\partial \eta}, \mu\Big)\Big] d\xi\, d\eta, \\ \frac{\partial u_{n+1}}{\partial y} = -\frac{1}{2\pi}\int\int \frac{\partial G}{\partial y}\cdot\Big[F\Big(\xi, \eta, \zeta_n, \frac{\partial \zeta_n}{\partial \xi}, \frac{\partial \zeta_n}{\partial \eta}, \mu\Big) \\ \qquad - F\Big(\xi, \eta, \zeta_{n-1}, \frac{\partial \zeta_{n-1}}{\partial \xi}, \frac{\partial \zeta_{n-1}}{\partial \eta}, \mu\Big)\Big] d\xi\, d\eta. \end{cases}$$

Da nun offenbar

$$(6)\quad \begin{cases} \Big|F\Big(\xi, \eta, \zeta_n, \frac{\partial \zeta_n}{\partial \xi}, \frac{\partial \zeta_n}{\partial \eta}, \mu\Big) - F\Big(\xi, \eta, \zeta_{n-1}, \frac{\partial \zeta_{n-1}}{\partial \xi}, \frac{\partial \zeta_{n-1}}{\partial \eta}, \mu\Big)\Big| \\ \qquad < A_1 |u_n| + A_2 \Big|\frac{\partial u_n}{\partial \xi}\Big| + A_3 \Big|\frac{\partial u_n}{\partial \eta}\Big| \end{cases}$$

ist, wo A_1, A_2, A_3 bestimmte Konstanten bedeuten, so hat man

$$(7)\quad \begin{cases} |u_{n+1}| < \frac{1}{2\pi}\int\int G.\Big\{A_1 |u_n| + A_2 \Big|\frac{\partial u_n}{\partial \xi}\Big| + A_3 \Big|\frac{\partial u_n}{\partial \eta}\Big|\Big\} d\xi\, d\eta, \\ \Big|\frac{\partial u_{n+1}}{\partial x}\Big| < \frac{1}{2\pi}\int\int \Big|\frac{\partial G}{\partial x}\Big| \Big\{A_1 |u_n| + A_2 \Big|\frac{\partial u_n}{\partial \xi}\Big| + A_3 \Big|\frac{\partial u_n}{\partial \eta}\Big|\Big\} d\xi\, d\eta, \\ \Big|\frac{\partial u_{n+1}}{\partial y}\Big| < \frac{1}{2\pi}\int\int \Big|\frac{\partial G}{\partial y}\Big| \Big\{A_1 |u_n| + A_2 \Big|\frac{\partial u_n}{\partial \xi}\Big| + A_3 \Big|\frac{\partial u_n}{\partial \eta}\Big|\Big\} d\xi\, d\eta. \end{cases}$$

Ist nun H der Maximalwert von $|F(x, y, \zeta, u, v, \mu)|$ für alle in Betracht kommenden Werte der Argumente, ist M die obere Grenze von

$$\frac{1}{2\pi}\int\int G(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

N die obere Grenze von

$$\frac{1}{2\pi}\int\int \Big|\frac{\partial G}{\partial x}\Big| d\xi\, d\eta$$

und

$$\frac{1}{2\pi}\int\int \Big|\frac{\partial G}{\partial y}\Big| d\xi\, d\eta$$

für alle (x, y) im Innern von C, so folgen aus (7) für alle (x, y) in C und auf S

die weiteren Ungleichheitsbedingungen

$$(8)\qquad \begin{cases} |u_n| < M(A_1 M + A_2 N + A_3 N)^{n-2} H, \\ \left|\dfrac{\partial u_n}{\partial x}\right| < N(A_1 M + A_2 N + A_3 N)^{n-2} H, \qquad n \geqq 2 \end{cases}$$

und die analogen Beziehungen für die Differentialquotienten in Bezug auf y.

Die Grössen M und N nehmen mit abnehmendem Flächeninhalt des Gebietes gegen Null ab. Dieser sei so klein, dass M und N den Ungleichheitsbedingungen

$$(9)\qquad \begin{cases} A_1 M + A_2 N + A_3 N < 1, \qquad \dfrac{MH}{1-(A_1 M + A_2 N + A_3 N)} < L - \operatorname{Max} |z_1|, \\ \dfrac{NH}{1-(A_1 M + A_2 N + A_3 N)} < L' - \operatorname{Max}\left(\left|\dfrac{\partial z_1}{\partial x}\right|, \left|\dfrac{\partial z_1}{\partial y}\right|\right) \end{cases}$$

genügen.

Aus den Relationen (8) und (9) folgen die weiteren Beziehungen

$$(9^a)\qquad |z_n| < L, \qquad \left|\frac{\partial z_n}{\partial x}\right| < L', \qquad \left|\frac{\partial z_n}{\partial y}\right| < L'$$

für alle n.

Die Argumente der Funktion F verlassen nicht das Gebiet, in dem diese Funktion definiert war. Zugleich überzeugt man sich leicht, dass die unendlichen Reihen

$$(10)\qquad \begin{cases} z = z_1 + u_2 + u_3 + \cdots = z_1 + (z_2 - z_1) + (z_3 - z_2) + \cdots, \\ \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z_1}{\partial x} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x} + \cdots = \dfrac{\partial z_1}{\partial x} + \dfrac{\partial (z_2 - z_1)}{\partial x} + \cdots, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial z_1}{\partial y} + \dfrac{\partial u_2}{\partial y} + \dfrac{\partial u_3}{\partial y} + \cdots = \dfrac{\partial z_1}{\partial y} + \dfrac{\partial (z_2 - z_1)}{\partial y} + \cdots \end{cases}$$

für alle (x, y) in C und auf S unbedingt und in gleichem Grade konvergieren. Man sieht ohne weiteres ein, dass z der Funktionalgleichung

$$(11)\qquad z = -\frac{1}{2\pi}\int\!\!\int F\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}, \mu\right) G(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + z_1(x, y)$$

genügt und am Rande die vorgeschriebenen Werte annimmt.

Sind

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

im Innern von C vorhanden und stetig, so folgt aus (11) die weitere Beziehung

$$(1)\qquad \Delta z = F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \mu\right).$$

Ist $F(x, y, z, u, v, \mu)$ von u und v unabhängig, handelt es sich also um die Auflösung der Differentialgleichung $\Delta z = F(x, y, z, \mu)$, so folgt die Existenz und Stetigkeit der partiellen Ableitungen zweiter Ordnung direkt aus der Relation (11). In diesem Falle gelingt das Verfahren der successiven Approximationen schon, wenn die vorgeschriebenen Randwerte einfach stetig sind. Ist $F(x, y, z, u, v, \mu)$ eine

analytische Funktion ihrer ersten 5 Argumente, so genügt, wie Herr S. BERNSTEIN nachgewiesen hat, die Funktion $z = z_1 + (z_2 - z_1) + \cdots$ wirklich der Differentialgleichung (1). Im Innern von C ist z übrigens eine analytische Funktion von x und y [30]).

Für lineare Differentialgleichungen (2) führt Herr DINI den Beweis mit Hilfe eines vom ihm herrührenden Satzes über gliedweise Differentiation unendlicher Reihen.

Im allgemeinen Falle gelingt der Nachweis, dass z der Differentialgleichung (1) genügt und die Reihen für $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ gliedweise differentiierbar sind, wenn man die weitere Voraussetzung hinzunimmt, dass die Funktionen F_x, F_y, F_z, F_u, F_v der LIPSCHITZ'schen Bedingung genügen [31]). Es ist also z. B.

$$(12)\quad |F_x(x, y, z, u, v, \mu) - F_x(x, y, \bar{z}, \bar{u}, \bar{v}; \mu)| < A_4\{|z-\bar{z}| + |u-\bar{u}| + |v-\bar{v}|\}.$$

§ 2.

$f(x, y)$ sei in C und auf S stetig und besitze in C stetige partielle Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Betrachten wir das Integral

$$(13)\qquad z = -\frac{1}{2\pi}\int\int G(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta;\ G(x, y; \xi, \eta) = -\log r + g(x, y; \xi, \eta),$$

wo x, y die Koordinaten eines Punktes im Innern von C bedeuten.

---

[30]) Vergl. S. BERNSTEIN, l. c. [28]).

[31]) Den an dieser Stelle gegebenen Beweis (Siehe § 3) habe ich in der Literatur nicht gefunden. Herr PICARD macht die zuletzt eingeführte beschränkende Voraussetzung nicht und sagt, dass der von ihm für lineare Differentialgleichungen gegebene Beweis [l. c. [4])], der übrigens die Existenz und Stetigkeit der dritten Ableitung der Randwerte voraussetzt, sich auf die allgemeine Differentialgleichung (1) direkt übertragen lässt [l. c. [2]) *a*, S. 164]. Mir ist diese Uebertragung ohne Hinzunahme der obigen weiteren Beschränkung nicht gelungen.

Es ist übrigens leicht einzusehen, dass der Übergang von der Gleichung (11) zu der Gleichung (1) jedesmal dann gestattet ist, wenn die Funktion F die LIPSCHITZ'sche Bedingung

$$|F(x_1, y_1, z_1, u_1, v_1, \mu) - F(x_2, y_2, z_2, u_2, v_2, \mu)| < \text{Const.}\{|x_1-x_2| + |y_1-y_2| + |z_1-z_2| + |u_1-u_2| + |v_1-v_2|\}$$

erfüllt. In der Tat, folgt aus der Gleichung (11) nach einem bekannten Hülfssatze der Potentialtheorie (vergl. DINI, l. c. [5]), S. 192-196), dass die partiellen Ableitungen $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ der HÖLDER'schen Bedingung genügen. Die Funktion $F\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}, \mu\right)$ hat, als Funktion von ξ und η betrachtet, dieselbe Eigenschaft. Damit ist die soeben ausgesprochene Behauptung bewiesen. Ob die Reihen für $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ ohne Zuhülfenahme der Voraussetzung (12) gliedweise differentiierbar sind, ist noch unentschieden.

Nach einer Formel von Herrn DINI ist [32])

$$
(14)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{2\pi}\int\!\!\int_C [f(\xi, \eta) - f(x, y)]\frac{\partial^2 \log r}{\partial \xi^2} d\xi\, d\eta \\
&-\frac{1}{2\pi}\int\!\!\int_C f(\xi, \eta)\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} d\xi\, d\eta - \frac{f(x, y)}{2\pi}\int_S \frac{\partial \log r}{\partial \xi}\cos\alpha\, ds.
\end{aligned}\right.
$$

Hierin bedeutet ds das Bogenelement der Begrenzungskurve von C, α den Winkel der Innennormale mit der X-Achse.

Es sei C'' ein Gebiet ganz im Innern von C, C''' ein Gebiet im Innern von C''. Ihre Begrenzungskurven bezeichnen wir mit S, S'', S'''. Die Entfernung der Kurven S'' und S''' sei r^*. Es sei (x, y) ein Punkt in C''' oder auf S'''. Um (x, y) beschreiben wir einen Kreis C'. Seinen Halbmesser bezeichnen wir mit r_0 und wählen $r_0 < r^*$. Es ist dann

$$
(15)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\int\!\!\int_C [f(\xi, \eta) - f(x, y)]\frac{\partial^2 \log r}{\partial \xi^2} d\xi\, d\eta = \int\!\!\int_{C'} + \int\!\!\int_{C-C'} \\
&= -\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}\frac{f(\xi, \eta) - f(x, y)}{r}\cos 2\varphi\, dr\, d\varphi + \int\!\!\int_{C-C'}[f(\xi, \eta) - f(x, y)]\frac{\partial^2 \log r}{\partial \xi^2} d\xi\, d\eta.
\end{aligned}\right.
$$

Ist $\mathrm{Max}\left(\left|\frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial \xi}\right|, \left|\frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial \eta}\right|\right)$ in C'' und auf S'' gleich K_1, $\mathrm{Max}\,|f(\xi, \eta)|$ in C gleich K, so findet man aus (15)

$$
\begin{aligned}
&\left|\int\!\!\int_C [f(\xi, \eta) - f(x, y)]\frac{\partial^2 \log r}{\partial \xi^2} d\xi\, d\eta\right| \\
&< 2K_1\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}|\cos 2\varphi|\, dr\, d\varphi + 2K\int\!\!\int_{C-C'}\left|\frac{\partial^2 \log r}{\partial \xi^2}\right| d\xi\, d\eta \\
&= 8K_1 r_0 + 2K\int\!\!\int_{C-C'}\left|\frac{\partial^2 \log r}{\partial \xi^2}\right| d\xi\, d\eta.
\end{aligned}
$$

Die Formel (14) gibt daher

$$
\left|\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right| < \frac{4r_0K_1}{\pi} + K\left\{\frac{1}{\pi}\int\!\!\int_{C-C'}\left|\frac{\partial^2 \log r}{\partial \xi^2}\right| d\xi\, d\eta + \frac{1}{2\pi}\int\!\!\int_C\left|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right| d\xi\, d\eta + \frac{1}{2\pi}\left|\int_S\frac{\partial \log r}{\partial \xi}.\cos\alpha\, ds\right|\right\}.
$$

Wir wählen r_0 so klein, dass $\frac{4r_0}{\pi} = \mu_0$ einen später anzugebenden Wert nicht überschreitet, und bezeichnen den Höchstwert des Faktors von K für alle (x, y) in C''' und auf S''' mit λ. Es ist daher für alle (x, y) in C''' und auf S'''

$$
(16)\qquad \left|\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right| < \lambda_1 K + \mu_0 K_1
$$

[32]) Vergl. DINI, l. c. [5]), S. 209. Herr DINI setzt $G = -\log r - g$.

und ebenso

$$\left|\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right| < \lambda_2 K + \mu_0 K_1, \qquad \left|\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\right| < \lambda_3 K + \mu_0 K_1.$$

μ_0 kann beliebig klein gemacht werden.

Es sei

$$\lambda_0 = \mathrm{Max}\,(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3).$$

Wir schreiben

$$(16^a) \qquad \left\{\begin{array}{l} \left|\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right| \\ \left|\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right| \\ \left|\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right| \end{array}\right\} < \lambda_0 K + \mu_0 K_1.$$

§ 3.

Diesen Hülfssatz wenden wir jetzt auf die Differentialgleichung

$$(17) \qquad \Delta u_{n+1} = F\left(x, y, z_n, \frac{\partial z_n}{\partial x}, \frac{\partial z_n}{\partial y}, \mu\right) - F\left(x, y, z_{n-1}, \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x}, \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y}, \mu\right)$$

an. Hier ist zunächst

$$K = \mathrm{Max}\left|F\left(x, y, z_n, \frac{\partial z_n}{\partial x}, \frac{\partial z_n}{\partial y}, \mu\right) - F\left(x, y, z_{n-1}, \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x}, \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y}, \mu\right)\right|$$
$$< A_1 . \mathrm{Max}\,|z_n - z_{n-1}| + A_2 . \mathrm{Max}\left|\frac{\partial z_n}{\partial x} - \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x}\right| + A_3 . \mathrm{Max}\left|\frac{\partial z_n}{\partial y} - \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y}\right|$$
$$< (A_1 M + A_2 N + A_3 N)^{n-1} H = \alpha^{n-1} H.$$

Nach (9) ist $\alpha < 1$.

Den Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung (17) bezeichnen wir mit **Π**. **Π** ist eine Funktion von x und y. Ihren Differentialquotienten nach x bezeichnen wir mit $\frac{d\Pi}{dx}$. In allen Punkten im Innern von C ist $\frac{d\Pi}{dx}$ vorhanden und stetig. Für

$$F_x\left(x, y, z_n, \frac{\partial z_n}{\partial x}, \frac{\partial z_n}{\partial y}, \mu\right), \qquad F_y\left(x, y, z_n, \frac{\partial z_n}{\partial x}, \frac{\partial z_n}{\partial y}, \mu\right)$$

u. s. w. schreiben wir zur Abkürzung

$$F_{x,n}, \qquad F_{y,n} \qquad \text{u. s. w.}$$

$$(18) \qquad \left\{\begin{array}{l} \frac{d\Pi}{dx} = \frac{d}{dx}[F_n - F_{n-1}] = F_{x,n} - F_{x,n-1} + F_{z,n} . \frac{\partial z_n}{\partial x} - F_{z,n-1} . \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} \\ \quad + F_{u,n} . \frac{\partial^2 z_n}{\partial x^2} - F_{u,n-1} . \frac{\partial^2 z_{n-1}}{\partial x^2} + F_{v,n} \frac{\partial^2 z_n}{\partial x \partial y} - F_{v,n-1} \frac{\partial^2 z_{n-1}}{\partial x \partial y} \end{array}\right.$$

und daher

$$(19)\quad \begin{cases} \left|\frac{d\Pi}{dx}\right| < |F_{x,n} - F_{x,n-1}| + |F_{\zeta,n}|\left|\frac{\partial u_n}{\partial x}\right| + |F_{\zeta,n} - F_{\zeta,n-1}|\left|\frac{\partial \zeta_{n-1}}{\partial x}\right| + |F_{u,n}|\left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\right| \\ \quad + |F_{u,n} - F_{u,n-1}|\left|\frac{\partial^2 \zeta_{n-1}}{\partial x^2}\right| + |F_{v,n}|\left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial x \partial y}\right| + |F_{v,n} - F_{v,n-1}|\left|\frac{\partial^2 \zeta_{n-1}}{\partial x \partial y}\right|. \end{cases}$$

Wir bezeichnen den Höchstwert von $|F_\zeta|$, $|F_u|$, $|F_v|$ für alle (x, y) in C und auf S und alle ζ, u, v, μ im Gebiete (3) mit E. Aus (12), (19), (9^a) ergibt sich

$$\left|\frac{d\Pi}{dx}\right| < \left\{|u_n| + \left|\frac{\partial u_n}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial u_n}{\partial y}\right|\right\}(A_4 + L' A_4 + E) + E\left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\right| + E\left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial x \partial y}\right|$$
$$+ \left\{\left|\frac{\partial^2 \zeta_{n-1}}{\partial x^2}\right| + \left|\frac{\partial^2 \zeta_{n-1}}{\partial x \partial y}\right|\right\}\left(|u_n| + \left|\frac{\partial u_n}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial u_n}{\partial y}\right|\right) A_4,$$

oder nach (8)

$$\left|\frac{d\Pi}{dx}\right| < (M + 2N)\alpha^{n-2} H(A_4 + L' A_4 + E) + E\left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\right| + E\left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial x \partial y}\right|$$
$$+ (M + 2N)\alpha^{n-2}.H.A_4\left(\left|\frac{\partial^2 \zeta_{n-1}}{\partial x^2}\right| + \left|\frac{\partial^2 \zeta_{n-1}}{\partial x \partial y}\right|\right).$$

Einen ganz analogen Ausdruck erhalten wir für $\frac{d}{dy}(F_n - F_{n-1}) = \frac{d\Pi}{dy}$.

Für $\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 \zeta_{n-1}}{\partial x^2}$ treten hierbei $\frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 \zeta_{n-1}}{\partial y^2}$.

Wir führen jetzt noch folgende Bezeichnungen ein:

$$\text{Für } n \geqq 2, \quad V_n = \operatorname{Max}\left(\left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\right|, \quad \left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial x \partial y}\right|, \quad \left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2}\right|\right) \quad \text{im Gebiete } C'',$$
$$V_1 = \operatorname{Max}\left(\left|\frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial x^2}\right|, \quad \left|\frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial x \partial y}\right|, \quad \left|\frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial y^2}\right|\right) \quad \text{im Gebiete } C''.$$

Offenbar ist für alle (x, y) im Innern und auf dem Rande von C''

$$\left|\frac{\partial^2 \zeta_{n-1}}{\partial x^2}\right|, \quad \left|\frac{\partial^2 \zeta_{n-1}}{\partial x \partial y}\right|, \quad \left|\frac{\partial^2 \zeta_{n-1}}{\partial y^2}\right| \leqq V_1 + V_2 + \cdots + V_{n-1}.$$

Für die Grösse, die wir vorhin mit K_1 bezeichnet hatten, erhalten wir daher die Beziehung

$$(20)\quad K_1 < (M+2N)H(A_4+L'A_4+E)\alpha^{n-2} + 2EV_n + 2(M+2N)HA_4\alpha^{n-2}(V_1+\cdots+V_{n-1}).$$

Die Ungleichheitsbedingungen (16^a), (17), (20) geben jetzt

$$V_{n+1} < \lambda_0 \alpha^{n-1} H + \mu_0(M + 2N)H(A_4 + L' A_4 + E)\alpha^{n-2} + 2E\mu_0 V_n$$
$$+ \mu_0 \cdot 2(M + 2N)HA_4\alpha^{n-2}(V_1 + V_2 + \cdots + V_{n-1}),$$

oder kürzer schliesslich:

$$(21)\quad V_{n+1} < \alpha^{n-2} P + \beta V_n + Q\alpha^{n-2}(V_1 + V_2 + \cdots + V_{n-1}), \qquad n \geqq 2$$

Wir wählen r_0, den Halbmesser des Kreises C', so klein, dass β, das μ_0 proportional ist, ein echter Bruch wird, und beweisen die Konvergenz der unendlichen Reihe

$$(22)\qquad V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_n + \cdots.$$

Diese Reihe konvergiert, wenn die unendliche Reihe

$$V'_1 + V'_2 + V'_3 + \cdots,$$

worin

(23) $$V'_1 = V_1, \qquad V'_2 = V_2, \qquad V'_{n+1} = \alpha^{n-2}.P + \beta V'_n + Q\alpha^{n-2}(V'_1 + \cdots + V'_{n-1})$$

für $n \geqq 2$ ist, konvergiert.

Wir setzen

$$t_n = \frac{V'_n}{V'_1 + V'_2 + \cdots + V'_{n-1}}, \qquad n \geqq 2$$

und zeigen zunächst, dass

$$\lim_{n=\infty} t_n = 0$$

ist.

Aus (23) folgt für $n \geqq 2$

$$t_{n+1} = \frac{V'_{n+1}}{V'_1 + \cdots + V'_n} < \frac{V'_{n+1}}{V'_1 + \cdots + V'_{n-1}} = Q\alpha^{n-2} + \frac{P\alpha^{n-2}}{V'_1 + \cdots + V'_{n-1}}$$
$$+ \beta t_n < Q\alpha^{n-2} + \frac{P\alpha^{n-2}}{V'_1} + \beta t_n$$

oder, wenn für

$$Q + \frac{P}{V'_1} = Q + \frac{P}{V_1}$$

einfach R gesetzt wird,

(24) $$t_{n+1} < R\alpha^{n-2} + \beta t_n,$$

daher

$$t_3 < R + \beta t_2,$$
$$t_4 < R\alpha + \beta R + \beta^2 t_2,$$
$$t_5 < R\alpha^2 + R\alpha\beta + R\beta^2 + \beta^3 t_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$t_n < R(\alpha^{n-3} + \alpha^{n-4}\beta + \cdots + \alpha\beta^{n-4} + \beta^{n-3}) + \beta^{n-2} t_2.$$

Offenbar ist

$$\lim_{n=\infty} t_n = 0.$$

Aus der Gleichung (23) und der analogen Gleichung für V'_n folgt

(25) $$\left\{ \frac{V'_{n+1} - \beta V'_n}{V'_n - \beta V'_{n-1}} = \alpha \frac{P + Q(V'_1 + \cdots + V'_{n-1})}{P + Q(V'_1 + \cdots + V'_{n-2})} = \alpha \frac{Q + \dfrac{P}{V'_1 + \cdots + V'_{n-1}}}{\dfrac{Q}{1 + t_{n-1}} + \dfrac{P}{V'_1 + \cdots + V'_{n-1}}}. \right.$$

Gesetzt, die Reihe $V'_1 + V'_2 + \cdots$, deren Glieder positiv sind, divergiere. Aus (25) folgt alsdann

$$\lim_{n=\infty} \frac{V'_{n+1} - \beta V'_n}{V'_n - \beta V'_{n-1}} = \alpha < 1.$$

Die Reihe

(26) $$(V'_2 - \beta V'_1) + (V'_3 - \beta V'_2) + \cdots$$

konvergiert. Ihre Summe sei mit S bezeichnet. Die Summe der n ersten Glieder von

(26) ist gleich

$$(1-\beta)(V'_1+V'_2+\cdots+V'_{n+1})+\beta V'_{n+1}-V'_1=S-\delta_n,\quad \lim_{n=\infty}\delta_n=0.$$

Hieraus folgt

$$1-\beta+\frac{\beta V'_{n+1}-V'_1}{V'_1+V'_2+\cdots+V'_{n+1}}=\frac{S-\delta_n}{V'_1+V'_2+\cdots+V'_{n+1}}$$

und für

$$n=\infty,\qquad 1-\beta=0,$$

was der Voraussetzung widerspricht.

Damit ist die Konvergenz der Reihe (22) im Gebiete C''' bewiesen. Die Reihen

$$(27)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+\cdots, \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z_1}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x\partial y}+\cdots, \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 z_1}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}+\cdots \end{cases}$$

konvergieren unbedingt und in gleichem Grade in jedem ganz im Innern von C enthaltenen Gebiete $\bar{C}$.

Die Funktion

$$z=z_1+u_2+u_3+\cdots$$

genügt der Differentialgleichung

$$\Delta z=F\left(x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

§ 4.

Nachdem wir so den Existenzbeweis geführt haben, ist es nicht schwer die Betrachtungen des ersten Kapitels auf die Differentialgleichung (1) auszudehnen. Um Wiederholungen zu vermeiden, begnügen wir uns damit, die Sätze aufzuzählen. Die Beweise sind den an jener Stelle gegebenen analog.

Das Verfahren der successiven Approximationen (4) führt auch dann noch zum Ziele, wenn in den Formeln (4) die Funktion $F\left(x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y},\ \mu\right)$ entsprechend durch die Funktionen $F_1\left(x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y},\ \mu\right)$, F_2, F_3, ... ersetzt wird. F_1, F_2, ... haben dieselben Stetigkeitseigenschaften wie die Funktion $F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \mu\right)$ und nähern sich mit wachsendem n dieser in gleichem Grade.

Sind für alle in Frage kommenden Werte der Argumente die ersten partiellen Ableitungen der Funktionen F_z, F_u, F_v, F_μ nach x, y, z, u, v vorhanden und stetig, so gilt der Satz:

Die unendlichen Reihen (10) und (27) lassen sich in Bezug auf den Parameter μ gliedweise differentiieren. Die so entstandenen Reihen konvergieren in gleichem Grade. Die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial z}{\partial \mu}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial \mu \partial x}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial \mu \partial y}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial \mu \partial x^2}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial \mu \partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial \mu \partial y^2}$$

sind vorhanden und stetig. Die partielle Ableitung $t = \frac{\partial z}{\partial \mu}$ *genügt der Differentialgleichung*

$$\Delta t = F_z . t + F_u . \frac{\partial t}{\partial x} + F_v . \frac{\partial t}{\partial y} + F_\mu . \tag{28}$$

Zum Beweise hat man von der Differentialgleichung (28) auszugehen und diejenige ihrer den Bedingungen (P) genügenden Lösungen T, die am Rande verschwindet, nach dem modifizierten Verfahren der successiven Approximationen darzustellen.

§ 5.

Zum Schluss wollen wir einige Sätze, welche die Eindeutigkeit der Lösungen der partiellen Differentialgleichung (1) betreffen, ableiten.

Zunächst einige bekannte Sätze aus der Theorie der Differentialgleichung

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu = 0 \tag{29}$$

$a, b, \ldots, f$ seien wohl definierte, endliche Funktionen von x und y.

I) In einem Punkte, in dem $ac - b^2 > 0$, $af < 0$ ist, kann eine in diesem Punkte und in seiner Umgebung den Bedingungen (P) genügende Lösung u der Differentialgleichung (29) weder positives Maximum noch negatives Minimum haben [33].

Im Folgenden sei in allen Punkten des untersuchten Gebietes stets

$$ac - b^2 > 0.$$

Wir betrachten jetzt in der Ebene xy ein von beliebigen Kurven S begrenztes zusammenhängendes Gebiet C, in dessen Innerem $af < 0$ ist.

II) Die Differentialgleichung (29) hat höchstens eine im Innern von C den Bedingungen (P) genügende Lösung, die auf den Randkurven eine vorgeschriebene stetige Folge von Werten annimmt [34].

Das Vorzeichen von af sei jetzt beliebig.

III) In jedem Gebiete G, das ganz im Innern eines zur y-Achse parallelen Streifens von einer gewissen angebbaren Breite enthalten ist, kann die Differentialgleichung (29)

---

[33]) Vergl. A. PARAF, *Sur le problème de* DIRICHLET *et son extension au cas de l'équation linéaire générale du second ordre* [Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, Bd. VI (1892), *H*, S. 1-75].

[34]) Vergl. A. PARAF, l. c. [33]), S. 50. Herr PARAF macht die Voraussetzung, dass $a, \ldots, f$ stetig sind und stetige partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung haben.

nicht mehr, als *eine* im Innern dieses Gebietes den Bedingungen (P) genügende Lösung haben, die auf der Begrenzung eine beliebige stetige Folge von Werten annimmt [35]).

Um jeden Punkt von C kann man daher ein Gebiet G abgrenzen, in dem die Lösung der Differentialgleichung (29) eindeutig ist. Durch die Bedingung, dass das Gebiet G in dem Streifen P enthalten sein muss, ist dieses in seiner Grösse beschränkt [36]).

IV) Wie Herr PARAF gezeigt hatte, gilt der Satz II noch im vollen Umfange, wenn in dem Gebiete C $af \leqq 0$ ist [37]).

Wir bemerken ausdrücklich, dass in den Sätzen I bis IV die Stetigkeit der Koeffizienten $a, \ldots, f$ nicht vorausgesetzt wird.

Von der Differentialgleichung (29) gehen wir zu der allgemeinen Differentialgleichung des elliptischen Typus

$$\Delta u = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{30}$$

über.

V) *Ist in allen Punkten in C und auf S und für alle u, v, w in dem Gebiete*

$$|u| \leqq L, \qquad |v| \leqq L', \qquad |w| \leqq L' \tag{31}$$

die Funktion $F(x, y, u, v, w)$ wohl definiert und endlich und genügt sie den beiden Ungleichheitsbedingungen

$$|F(x, y, u_1, v_1, w_1) - F(x, y, u_2, v_2, w_2)| < \text{Const.}\{|u_1 - u_2| + |v_1 - v_2| + |w_1 - w_2|\}, \tag{32}$$

$$\frac{F(x, y, u_1, v, w) - F(x, y, u_2, v, w)}{u_1 - u_2} \geqq 0, \tag{33}$$

wenn $u_1 - u_2 \neq 0$ ist, so kann es nicht mehr als eine im Innern von C den Bedingungen (P) genügende Lösung u der Differentialgleichung (30) *geben, die auf dem Rande beliebige stetige Folge von Werten annimmt, wenn überdies verlangt wird, dass u, $\frac{\partial u}{\partial x} = v$, $\frac{\partial x}{\partial y} = w$ durchweg den Ungleichheitsbedingungen* (31) *genügen.* Sind die Ungleichheitsbedingungen (32) und (33) für alle u, v, w erfüllt, so fällt die letzte Beschränkung fort. $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ dürfen bei der Annäherung an den Rand sogar unendlich gross werden.

Sind u_1 und u_2 zwei die Forderungen der Aufgabe erfüllende Lösungen von (30), so genügt ihre Differenz

$$U = u_1 - u_2$$

---

35) Vergl. A. PARAF, l. c. 33), S. 51 und 52.

36) Der Abstand der Punkte des Gebietes G von den Begrenzungskurven ist kleiner als eine bestimmte angebbare Grösse. Diese hängt nur von der oberen Grenze von $\left|\frac{d}{a}\right|$ und $\left|\frac{f}{a}\right|$ in C ab.

37) Vergl. PICARD, *Traité d'Analyse,* Bd. II (1905), S. 35 und 36.

in allen Punkten im Innern von C der Differentialgleichung

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned}\Delta U = & \frac{F\left(x, y, u_1, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) - F\left(x, y, u_2, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)}{u_1 - u_2} . U \\ & + \frac{F\left(x, y, u_2, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) - F\left(x, y, u_2, \frac{\partial u_2}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)}{\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial x}} . \frac{\partial U}{\partial x} \\ & + \frac{F\left(x, y, u_2, \frac{\partial u_2}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) - F\left(x, y, u_2, \frac{\partial u_2}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial y}\right)}{\frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial y}} . \frac{\partial U}{\partial y} .\end{aligned}\right.$$

Auf dem Rande von C verschwindet U.

Die Koeffizienten von $U, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}$ sind der Ungleichheitsbedingung (32) zufolge in allen Punkten im Innern von C wohl definierte, endliche Funktionen von x und y. Da nach der Voraussetzung der Koeffizient von U für alle in Frage kommenden Werte von $x, y, u_1, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}, u_2$ nicht negativ ist, so verschwindet nach dem Satze (IV) U identisch.

Wir bemerken, dass wir die Stetigkeit der partiellen Ableitungen bei der Annäherung an den Rand bei diesem Eindeutigkeitsbeweise nicht vorausgesetzt hatten. Wir haben nur die selbstverständliche Annahme gemacht, dass die Funktionen $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ auch bei der Annäherung an den Rand das Gebiet, in dem die Funktion

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

definiert war, nicht verlassen.

Der Satz V bildet eine Verallgemeinerung eines Satzes von Herrn Ed. Le Roy. Herr Le Roy beweist für die partielle Differentialgleichung

$$\Delta V = F\left(x, y, z, V, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

die Eindeutigkeit der Lösung, wenn für alle in Betracht kommenden Werte der in F vorkommenden Variabeln:

$$F_v > 0$$

ist [38]).

---

38) Éd. Le Roy, *Sur l'intégration des équations de la chaleur* [Annales scientifiques de l'École Normale supérieure, Ser. III, Bd. XIV (1897), S. 379-465]. Vergl. auch Picard, l. c. [2]) *a*, S. 173.

Wir machen jetzt über das Vorzeichen des Differenzenquotienten

$$\frac{F(x, y, u_1, v, w) - F(x, y, u_2, v, w)}{u_1 - u_2} \quad \text{für} \quad u_1 - u_2 \neq 0$$

keine Voraussetzungen mehr.

VI) *Ist in allen Punkten im Innern und auf dem Rande von C und für alle u, v, w in dem Gebiete*

$$(31) \qquad |u| \leqq L, \qquad |v| \leqq L', \qquad |w| \leqq L'$$

die Funktion F wohl definiert und endlich, genügt sie ferner der Ungleichheitsbedingung

$$(35) \quad |F(x, y, u_1, v_1, w_1) - F(x, y, u_2, v_2, w_2)| < B\{|u_1 - u_2| + |v_1 - v_2| + |w_1 - w_2|\},$$

so lässt sich um jeden Punkt von C ein Gebiet D abgrenzen, sodass es für jedes ganz in D gelegene Gebiet G nicht mehr als eine im Innern von G den Bedingungen (P) genügende Lösung von (30) geben kann, die auf dem Rande eine beliebige stetige Wertfolge annimmt, wenn überdies verlangt wird, dass u, $\frac{\partial u}{\partial x} = v$, $\frac{\partial u}{\partial y} = w$ durchweg die Ungleichheitsbedingungen (31) erfüllen. Zum Beweise genügt es, den Satz III auf die Differentialgleichung (34) anzuwenden und die Fussnote [36]) zu beachten. Die auf der rechten Seite der Gleichung (34) vorkommenden Differenzenquotienten sind dem absoluten Betrage nach kleiner als die feste Zahl B. Dieses folgt zum Beispiel für den ersten Differenzenquotienten, wenn $u_1 - u_2 \neq 0$ ist, aus (35). Ist aber $u_1 - u_2 = 0$, so setzen wir ausdrücklich für den Koeffizienten von U eine Zahl kleiner als B.

Wir betrachten zum Schluss die allgemeine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(36) \qquad \Phi\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0.$$

$$\Phi(x, y, u, v, w, r, s, t)$$

ist für alle Werte von x und y im Innern und am Rande von C und für alle u, v, w, r, s, t, die den Ungleichheitsbedingungen

$$(37) \quad |u| \leqq L, \quad |v| \leqq L', \quad |w| \leqq L', \quad |r| \leqq L'', \quad |s| \leqq L'', \quad |t| \leqq L''$$

genügen, eine stetige Funktion ihrer 8 Argumente. In dem bezeichneten Gebiete existieren die partiellen Ableitungen Φ_r, Φ_s, Φ_t und verhalten sich stetig. Ueberdies erfüllt Φ folgende zwei Ungleichheitsbedingungen:

$$(38) \qquad 4\Phi_r \Phi_t - (\Phi_s)^2 > 0,$$

$$(39) \quad \begin{cases} |\Phi(x, y, u, v, w, r, s, t) - \Phi(x, y, u', v', w', r', s', t')| \\ < \text{Const.}\{|u - u'| + |v - v'| + |w - w'| + |r - r'| + |s - s'| + |t - t'|\}. \end{cases}$$

Alsdann gilt der Satz:

VII) *Um jeden Punkt von C lässt sich ein Gebiet D abgrenzen, sodass es für jedes ganz in D enthaltene Gebiet G nicht mehr als eine in S den Bedingungen (P) genügende Lösung u der Differentialgleichung (36) geben kann, die auf dem Rande von G beliebige*

stetige Wertfolge annimmt, wenn überdies verlangt wird, dass u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, ..., $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ *durchweg die Ungleichheitsbedingungen* (37) *erfüllen.*

Der Beweis ist dem Beweise der Sätze V und VI ganz analog.

Ist der Quotient $\frac{\Phi_u}{\Phi_r}$ in dem betrachteten Gebiete positiv oder Null, so ist die Beschränkung auf ein Gebiet von hinreichend kleinen Abmessungen [39]) überflüssig.

Charlottenburg, 15 Mai 1908.

LEON LICHTENSTEIN.

39) Vergl. die Fussnote [36]).

SUL MOTO DI UN SOLIDO IN UN CANALE.

Memoria di **Umberto Cisotti** (Padova).

Adunanza dell'11 aprile 1909.

INTRODUZIONE.

Un corpo, dotato di moto traslatorio uniforme, e immerso in un fluido (perfetto e non sollecitato da forze), non incontra alcuna resistenza diretta, quando si suppone ovunque continuo il moto subordinato della massa fluida.

Tale proposizione, in manifesta contraddizione coll'esperienza, è nota col nome di paradosso di d'ALEMBERT.

La sua constatazione venne raggiunta in modo generale e sotto forma rigorosa nell'ipotesi che il fluido occupi tutto lo spazio [1]).

Si può estenderla, come mi propongo di mostrare, al caso in cui il liquido, in seno al quale si muove il solido, occupi lo spazio interno di un tubo cilindrico a sezione qualsiasi.

Mentre la resistenza diretta è sempre nulla, non si può dire altrettanto, in generale, delle azioni deviatrici. Riguardo a queste si perviene anzi ai seguenti notevoli risultati:

I. Se la indefinita traslazione uniforme del solido avviene in un liquido parallelamente ed in prossimità ad una parete rigida piana, il solido subisce da parte della massa fluida un complesso di azioni tendente ad allontanarlo dalla parete.

II. Se il liquido è esteso indefinitamente, in tutti i sensi, le azioni deviatrici si riducono ad una sola coppia.

Dopo ciò il problema di cui intendo occuparmi riguarda il moto traslatorio uniforme di un solido in un canale molto profondo, ammesso, beninteso, che il moto avvenga parallelamente alle sponde.

Applicando al problema la trattazione che viene ordinariamente seguita nelle questioni idrodinamiche (la quale implica la continuità del moto fluido) si inceppa, come abbiamo accennato, nel paradosso di d'ALEMBERT.

---

[1]) Cfr. CISOTTI, *Sul paradosso di d'*ALEMBERT [Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, t. LXV (1906), pp. 1291-1295].

Per rimuoverlo converrà rinunciare all'ipotesi della continuità del moto fluido, e, come già fece il prof. LEVI-CIVITA nello studio del moto di un solido in un liquido indefinito [a]), seguire la via indicata da STOKES e da HELMHOLTZ, introducendo l'ipotesi della *scia*.

Si ammette cioè che il solido trascini dietro a sè, nel suo movimento, una colonna liquida, indefinita, solidale con esso.

Data la difficoltà della questione ci limitiamo a studiarla a due dimensioni, senza che per questo, manchi l'interesse pratico.

Infatti nel caso di una nave in un canale tranquillo il movimento avverrà, sensibilmente, in piani orizzontali, almeno per sezioni non troppo vicine al piano di galleggiamento.

Si è così condotti al seguente problema piano: un profilo rigido (sezione del solido) si muove nel proprio piano fra due pareti rigide rettilinee, parallele, indefinite (sezioni delle sponde del canale).

Limitandoci al caso (praticamente più interessante) della simmetria, il problema si può far dipendere in modo notevolmente semplice da quello delle vene fluenti. Si riesce ad assegnare così l'integrale corrispondente a profili poligonali qualsiansi. Ma in generale tale metodo non consente, disgraziatamente, di mettere bene in evidenza il grado di arbitrarietà della questione; l'intento si raggiunge invece riprendendo la questione *ab initio*.

Coll'impiego delle funzioni ellittiche e col valido aiuto della rappresentazione conforme si riesce ad assegnare l'integrale generale dei moti in questione, e ad esprimere mediante esso tutti gli elementi del moto, nonchè la resistenza.

Il grado di arbitrarietà è quello di una funzione analitica

$$T(\zeta)=\sum_{0}^{\infty}{}_{n}\, c_n\left(\zeta^{2n+1}-\frac{q^{2n+1}}{\zeta^{2n+1}}\right),$$

a coefficienti reali c_n, regolare nella corona circolare $q \leqq |\zeta| \leqq 1$.

La resistenza incontrata dal profilo rigido è misurata dal rapporto tra il quadrato della semilarghezza assintotica della *scia* e la semilarghezza del canale.

Approfondisco in fine il caso di un profilo rigido costituito da due segmenti di eguale lunghezza, formanti un angolo 2α (RÉTHY-BOBYLEFF), particolarmente interessante poichè rispecchia la forma rudimentale della prora di una nave.

Si ottiene l'espressione della resistenza unitaria (per unità di larghezza del profilo investito) in funzione di α e della larghezza del canale. In particolare, quando il canale diviene infinitamente largo si ritrovano, nel modo più spontaneo, i risultati già direttamente ricavati dal BOBYLEFF e da HELMHOLTZ (per la lamina rettilinea).

---

[a]) Cfr. LEVI-CIVITA, *Scie e leggi di resistenza* [questi Rendiconti, t. XXIII (1° semestre 1907), pp. 1-37].

§ 1.

Il paradosso di d'Alembert. — Osservazioni.

Sia C un solido di forma qualsiasi, dotato di moto traslatorio uniforme con velocità costante V, ed immerso in un fluido S (perfetto e non sollecitato da forze). — Il fluido S sia a sua volta contenuto in un tubo T rettilineo, indefinito (praticamente molto lungo), limitato da una superficie cilindrica τ, le cui generatrici sono parallele alla direzione del moto di C, ed avente una sezione trasversale semplicemente connessa e del resto qualunque.

Diciamo σ la superficie che limita C. Sia (x, y, z) una terna di assi rigidamente collegata a C e coll'asse z diretto nel verso del moto di C.

Sia ρ la densità di una generica particella fluida.

Il moto permanente di C mantiene il fluido S in uno stato (di moto) stazionario (rispetto al solido).

Il moto subordinato della massa fluida si rende tanto meno sensibile quanto più ci si discosta dal corpo in movimento, dimodochè all'∞ (praticamente verso l'estremità del tubo T) le particelle fluide si devono ritenere in quiete.

Sieno u, v, w le componenti della velocità di una generica molecola fluida; pel fatto che il moto fluido ha carattere stazionario rispetto a C, ρ, u, v, w non dipendono esplicitamente da t, e precisamente la loro dipendenza da t (rispetto ad una terna di assi *fissi*) viene espressa nel modo seguente:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -V\frac{\partial \rho}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -V\frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -V\frac{\partial v}{\partial z}, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = -V\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Ciò posto, chiamando p la pressione specifica in un generico punto di S, le funzioni u, v, w, ρ, p devono soddisfare in S

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{all'equazione di continuità} \\ \dfrac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \dfrac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \dfrac{\partial(\rho w)}{\partial z} = V\dfrac{\partial \rho}{\partial z}; \\ \text{e alle equazioni di EULERO} \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} = V\dfrac{\partial u}{\partial z} - \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}u + \dfrac{\partial u}{\partial y}v + \dfrac{\partial u}{\partial z}w\right), \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} = V\dfrac{\partial v}{\partial z} - \left(\dfrac{\partial v}{\partial x}u + \dfrac{\partial v}{\partial y}v + \dfrac{\partial v}{\partial z}w\right), \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} = V\dfrac{\partial w}{\partial z} - \left(\dfrac{\partial w}{\partial x}u + \dfrac{\partial w}{\partial y}v + \dfrac{\partial w}{\partial z}w\right). \end{array} \right.$$

Designino α, β, γ i coseni direttori della normale in un generico punto del contorno $\sigma + \tau$ di S, volta verso l'esterno di S. Manifestamente α, β, γ sono costanti rispetto al tempo, mantenendo direzione costante gli assi di riferimento.

Dacchè, su ogni parete rigida, la velocità *relativa* delle particelle liquide è tangenziale, e si ha $\gamma = 0$ su τ, le componenti u, v, w dovranno complessivamente soddisfare

alle seguenti condizioni ai limiti e di comportamento all'infinito:

$$(2)\qquad \begin{cases} u\alpha + v\beta + w\gamma = V\gamma & \text{(sopra } \sigma\text{)},\\ u\alpha + v\beta = 0 & \text{(sopra } \tau\text{)},\\ u = v = w = 0 & \text{(all' } \infty\text{)}. \end{cases}$$

È facile constatare che

$$(3)\qquad \int_S \frac{\partial p}{\partial x} dS = \int_S \frac{\partial p}{\partial y} dS = \int_S \frac{\partial p}{\partial z} dS = 0.$$

Infatti, prendendo a considerare ad es. l'$\int_S \frac{\partial p}{\partial x} dS$, osserviamo che, per le (1), esso può scriversi

$$V\int_S \rho \frac{\partial u}{\partial z} - \int_S \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w\right) dS;$$

tenendo conto della prima delle (1) e delle (2), trasformiamo questo secondo integrale a mezzo del lemma di GREEN nel modo seguente

$$\begin{aligned} \int_S \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w\right) dS &= \int_S \left\{\frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u w)}{\partial z}\right\} dS \\ &\quad - \int_S u \left\{\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right\} dS \\ &= V\int_\sigma \rho u \gamma d\sigma - V\int_S u \frac{\partial \rho}{\partial z} dS \\ &= V\left[\int_S \frac{\partial(\rho u)}{\partial z} dS - \int_S u \frac{\partial \rho}{\partial z} dS\right] \\ &= V\int_S \rho \frac{\partial u}{\partial z} dS. \end{aligned}$$

Avremo pertanto

$$\int_S \frac{\partial p}{\partial x} dS = 0, \qquad \text{C. D. D.}$$

In modo analogo si dimostra che si annullano gli altri integrali.

L'azione complessiva della massa fluida sul corpo immerso è caratterizzata, al solito, dalla risultante R e dal momento risultante M, delle pressioni che il fluido esercita sui singoli elementi $d\sigma$ della superficie che limita il corpo. Le loro componenti rispetto alla terna (x, y, z) sono rispettivamente

$$R_x = \int_\sigma p\alpha d\sigma, \qquad R_y = \int_\sigma p\beta d\sigma, \qquad R_z = \int_\sigma p\gamma d\sigma,$$

$$M_x = \int_\sigma p(\gamma y - \beta z) d\sigma, \quad M_y = \int_\sigma p(\alpha z - \gamma x) d\sigma, \quad M_z = \int_\sigma p(\beta x - \alpha y) d\sigma.$$

Occupiamoci della risultante R.

Chiamiamo τ'_∞ e τ''_∞ due sezioni normali del tubo T, infinitamente lontane da C una a prora, l'altra a poppa di C. I coseni direttori della normale in un generico punto di τ'_∞, volta verso l'esterno di S, sono 0, 0, 1; quelli della normale a τ''_∞ sono invece 0, 0, — 1.

Ciò posto, applicando il lemma di GREEN alle espressioni delle componenti di R e tenendo presenti le (3), avremo

$$(4)\qquad \begin{cases} R_x = -\int_\tau p\alpha\, d\tau, \\ R_y = -\int_\tau p\beta\, d\tau, \\ R_z = -\int_{\tau'_\infty} p\, d\tau' + \int_{\tau''_\infty} p\, d\tau'' = p_\infty(\tau''_\infty - \tau'_\infty) = 0 \text{ [3]}. \end{cases}$$

R_z misura la resistenza *diretta,* opposta al moto di C da parte della massa fluida. R_x, R_y; M_x, M_y, M_z sono *azioni deviatrici* e precisamente le due prime tendono a spingere il solido contro la parete del tubo, e le rimanenti hanno tendenza a farlo ruotare attorno agli assi coordinati.

Dall'ultima delle (4) scende che la resistenza diretta è nulla.

Con ciò resta dimostrato il paradosso di d'ALEMBERT.

OSSERVAZIONE I^a. — I risultati precedenti si possono ovviamente applicare al caso in cui il tubo, entro cui si muove il solido, abbia per sezione trasversale una circonferenza di centro arbitrario e raggio comunque grande. Con ciò si può far degenerare il tubo in una parete rigida piana τ, alla quale il solido si muove parallelamente.

Supposto che $x =$ costante sia l'equazione di τ, avremo su essa

$$\alpha = -1, \qquad \beta = \gamma = 0;$$

tenendo conto di ciò dalle (4) ovviamente si deducono le

$$R_x = \int_\tau p\, d\tau, \qquad R_y = R_z = 0.$$

Notando che $R_x > 0$ possiamo enunciare la seguente notevole proposizione:

Un solido che si muove, in un fluido indefinito, parallelamente ad una parete rigida piana, di moto traslatorio uniforme, subisce da parte della massa fluida un complesso di azioni, tendente ad allontanarlo dalla parete.

Sotto forma espressiva, un battello che naviga parallelamente alla riva, con velocità di regime, subisce una repulsione dalla riva: per conservare la rotta deve avere il timone manovrato costantemente in modo opportuno, ciò che non sarebbe necessario in alto mare, supposto questo perfettamente tranquillo [4].

---

[3]) Essendo il fluido, per ipotesi, in riposo all'infinito, ivi regna una pressione costante p_∞.

[4]) LORD KELVIN ha dimostrato che se una sfera, immersa in un liquido preventivamente in quiete, in prossimità di una parete rigida piana, subisce un impulso parallelamente alla parete, essa tende ad avvicinarsele. [Cfr. LORD KELVIN and TAIT, *Treatise on Natural Philosophy,* Vol. I (Cambridge, edizione stereotipa, 1896), p. 329].

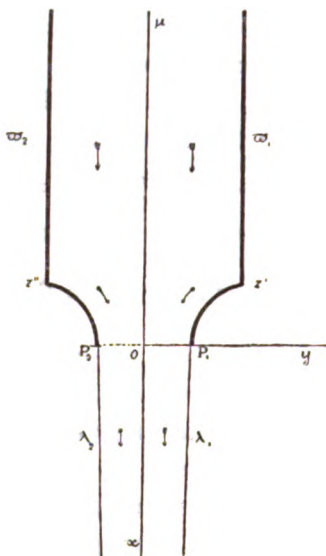
Il nostro risultato sembra, a prima vista, in contraddizione con quello di LORD KELVIN. Basta notare però che le condizioni di moto sono essenzialmente diverse; infatti nel caso di LORD KELVIN prima dell'istante iniziale è in quiete non solamente il solido ma pur anco il liquido, mentre noi ammettiamo che tanto il solido che il fluido abbiano raggiunto un regime stazionario.

Osservazione IIª. — È interessante notare che se, in particolare, la parete piana τ è indefinitamente lontana dal solido, *le azioni deviatrici si riducono ad una sola coppia.*

Tale proposizione scende facilmente dalle (4), qualora si risguardi (come è lecito) la superficie limite di S costituita da σ e da una sfera τ_∞ di raggio grandissimo e si noti che la pressione è costante su essa e che sono nulli gli integrali di $\alpha\, d\tau$ e $\beta\, d\tau$ estesi ad una generica superficie chiusa. Le (4) dànno allora $\boldsymbol{R} = 0$, donde la proposizione sopra enunciata.

§ 2.

Problema piano. — Dipendenza dal problema delle vene fluenti.

Prendiamo a considerare l'efflusso di un liquido da un recipiente, in condizioni di moto permanente e di simmetria rispetto ad un asse μ.

(Fig. 1).

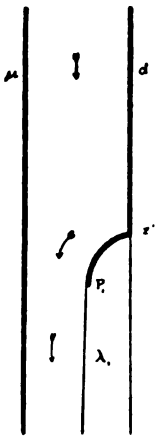
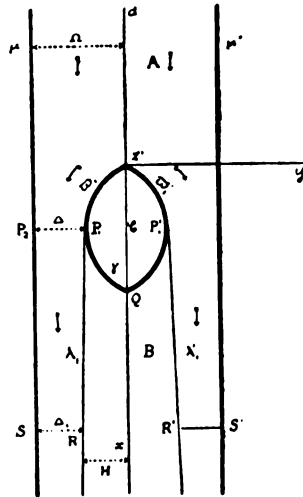
Immaginiamo il profilo rigido (sezione del recipiente) costituito da due pareti procedenti parallelamente all'asse di simmetria μ dall'infinito a monte dell'orifizio fino a due punti z' e z'', in cui cambiando bruscamente direzione (verso l'interno come mostra la Fig. 1) assumono una forma arbitraria (colla convessità rivolta verso l'interno) fino ad arrestarsi a due punti P_1 e P_2. Questi punti limitano l'orifizio del profilo.

Il liquido fluisce attraverso l'orifizio $P_1 P_2$ formando una vena che si estende indefinitamente e si mantiene simmetrica rispetto all'asse μ.

La simmetria del contorno e del moto delle particelle liquide rispetto all'asse μ implica che in punti simmetrici rispetto a μ le velocità debbano essere simmetriche; in

particolare nei punti di μ le velocità (vettori) devono essere situate su μ stesso e dirette nel verso della vena. In altre parole *l'asse μ si comporta come se fosse una parete rigida.*

Nulla ci vieta perciò di riguardare μ come una effettiva parete rigida, senza che per questo venga minimamente alterato il moto delle particelle liquide, e con esso il problema dell'efflusso.

Si può adunque ritenere risoluto il problema delle vene ad un'unica linea libera λ_1 e con una parete rigida μ rettilinea, indefinita (nei due sensi; vedi Fig. 2), quando lo sia quello delle vene ordinarie a due linee libere λ_1, λ_2 (vedi Fig. 1).

(Fig. 2). (Fig. 3).

Riferendoci al primo, immaginiamo di operare la riflessione del campo del moto rispetto all'asse d parallelo alla parete μ e contenente il tratto rettilineo dell'altra parete rigida. Si ottengono così (Fig. 3) due pareti rigide, rettilinee, indefinite μ e μ' ed un profilo rigido $P_1 \zeta' P'_1$, simmetrici rispetto all'asse d; il liquido che occupa lo spazio A scorre tra le pareti rigide μ e μ' fino a che incontra il profilo rigido $P_1 \zeta' P'_1$, indi procede fra $\varpi_1 + \lambda_1$ e μ da una parte e fra $\varpi'_1 + \lambda'_1$ e μ' dall'altra, fino all'infinito; nello spazio B limitato dal profilo rigido $P_1 \zeta' P'_1$ e dalle linee libere λ_1 e λ'_1, regna la quiete.

Il filetto liquido che scorre su d (a monte del profilo rigido) arrivato in ζ' si arresta, indi si bipartisce: un ramo segue il tratto ϖ_1 del profilo e l'altro ramo il tratto ϖ'_1; gli altri filetti accostandosi al profilo rigido vengono più o meno deviati, ma nessuno subisce arresti. In conclusione si ha la corrente di un canale, modificata dalla presenza di un profilo rigido.

È manifesto che l'andamento della corrente non viene alterato se al profilo rigido $P_1 \zeta' P'_1$ si sostituisce un'area rigida C, chiusa, semplicemente connessa, limitata da un contorno γ, costituito dal profilo rigido $P_1 \zeta' P'_1$ stesso e da una linea rigida $P_1 Q P'_1$ qualsiasi, purchè tutta contenuta in B e non avente alcun tratto comune colle linee libere λ_1 e λ'_1 all'infuori dei punti P_1 e P'_1 (vedi Fig. 3).

Supporremo che lo spazio $B - C$ sia occupato dallo stesso liquido che si muove in A.

Allontanandosi da C (a valle di C stesso) le particelle liquide tendono ad assumere una velocità la cui direzione è parallela alle pareti del canale ed il cui valore assoluto si può assumere come unità.

Ricorriamo ora al noto artifizio di imprimere a tutto il sistema $A + B$ una traslazione uniforme di insieme, con che manifestamente non vengono alterate le condizioni dinamiche relative delle singole parti. Immaginiamo, in particolare, di imprimere una traslazione uniforme di velocità unitaria nel verso opposto a quello della direzione generale del moto della corrente. Allora il profilo rigido C, e con esso le molecole fluide che occupano lo spazio $B - C$ si trovano animate da un movimento traslatorio con velocità unitaria, mentre le particelle di A sufficientemente lontane da C rimangono in quiete.

Si è così condotti al problema del moto simmetrico, con scia, di un profilo rigido in un canale.

Per quanto precede possiamo ritenere risoluto questo problema quando lo sia quello relativo alle vene liquide.

§ 3.

Dipendenza analitica. — Integrale corrispondente a profili poligonali.

Sia $\omega(\zeta)$ funzione *dispari* della variabile complessa $\zeta = \xi + i\eta$, convergente entro e sopra la circonferenza $|\zeta| = 1$.

Poniamo

$$\omega(\zeta) = \zeta \sum_{0}^{\infty}{}_n b_n \zeta^{2n}, \tag{5}$$

dove le b_n sono costanti reali qualsiansi, purchè tali da rendere la serie convergente per tutti i valori di ζ per cui $|\zeta| \leqq 1$.

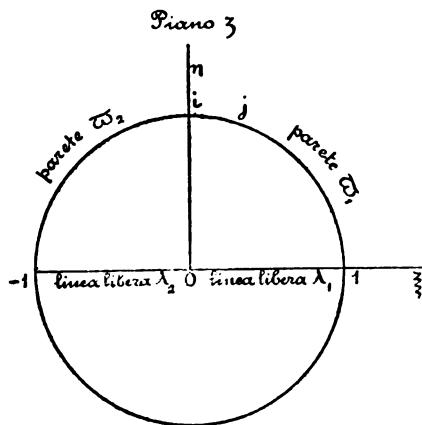
La (5) costituisce l'integrale generale dei moti fluidi irrotazionali simmetrici attraverso un orifizio [5]).

L'integrale generale della nostra questione si otterrà discriminando dalla (5) quella classe di integrali la quale corrisponde al problema d'efflusso da pareti rigide che abbiano il comportamento accennato nel § precedente (Fig. 1).

Giova a tal uopo ricordare [6]) che nel piano $\zeta = \xi + i\eta$ il campo del moto fluido è rappresentato dal semicerchio $|\zeta| \leqq 1$ di ordinate positive, in modo che alle pareti rigide ϖ_1 e ϖ_2 (Fig. 1) corrispondono i quadranti $(1, i)$ e $(-1, i)$ rispettivamente, ed

[5]) Cfr. CISOTTI, *Vene fluenti* [questi Rendiconti, t. XXV (1° semestre 1908), pp. 145-179], § 11.

[6]) Cfr. CISOTTI, loc. cit. [5]), § 6.

alle linee libere λ_1 e λ_2 i raggi 0, 1 e 0, — 1 rispettivamente (Fig. 4); sull'altro semicerchio si ha il comportamento che risulta per riflessione.

(Fig. 4).

Ricordiamo ancora il significato della parte reale e del coefficiente dell'immaginario dell'integrale ω.

Posto

$$\omega = \vartheta + i\tau, \tag{6}$$

ϑ rappresenta l'angolo che la direzione della velocità di una generica particella liquida, forma colla direzione della vena, e τ è il logaritmo naturale del valore assoluto della velocità del liquido in un punto generico [7]).

Ciò posto ai due punti angolosi z' e z'' delle pareti rigide nel piano del moto (Fig. 1) fanno riscontro nel piano ζ due punti j' e j'' rispettivamente, situati sulla circonferenza $|\zeta| = 1$ e simmetrici rispetto all'asse immaginario. — Al tratto $P_1 z'$ di parete ϖ_1 fa riscontro l'arco $(1, j')$, alla porzione rimanente di ϖ_1 l'arco $(j' i)$.

Sull'arco $(-1, i)$ abbiamo il comportamento simmetrico rispetto all'asse immaginario.

L'integrale generale del moto con scia di un profilo rigido nel canale sarà l'espressione più generale di $\omega(\zeta)$, che rientri nella (5) e tale che la sua parte reale ϑ si mantenga diversa da zero sull'arco $(1 j')$ e passi bruscamente a zero in j' mantenendosi quindi nulla sull'arco $(j' i)$.

In tal modo si viene a caratterizzare analiticamente la questione, ma non ne viene messo bene in evidenza il grado di arbitrarietà. Gioverà a tal uopo, come vedremo in seguito, riprendere la questione *ab initio* e sostituire al cerchio $|\zeta| \leq 1$, quale campo di variabilità della $\omega(\zeta)$, una corona circolare.

Va notato tuttavia che, nel caso di profili poligonali, è ancora utile riferirsi al cerchio $|\zeta| \leq 1$.

---

[7]) Cfr. CISOTTI, loc. cit. [5]), § 7, oppure anche la presente memoria al § 14.

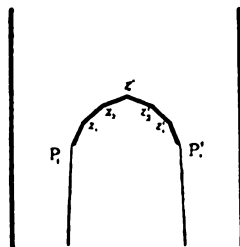
Decomponiamo l'arco $(1, j')$ in m parti, mediante $m-1$ punti di divisione ζ_1, $\zeta_2, \ldots, \zeta_{m-1}$.

Poniamo quindi

$$(7)\qquad \omega(\zeta)=\frac{i}{\pi}\left[-\vartheta_m \log\frac{(j'-\zeta)(1+j'\zeta)}{(j'+\zeta)(1-j'\zeta)}+\sum_1^{m-1}{}_h(\vartheta_{h+1}-\vartheta_h)\log\frac{(\zeta_h-\zeta)(1+\zeta_h\zeta)}{(\zeta_h+\zeta)(1-\zeta_h\zeta)}\right],$$

dove $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_m$ sono m costanti reali qualsiansi.

La funzione $\omega(\zeta)$ definita dalla precedente rientra [8]) nella (5), e di più è tale che la sua parte reale ϑ ha il valore costante ϑ_1 sull'arco $(1, \zeta_1)$, il valore costante ϑ_2 sull'arco (ζ_1, ζ_2), ... il valore costante ϑ_m sull'arco (ζ_{m-1}, j'), ed il valore zero sull'arco (j', i), sull'arco $(-1, i)$ ha il comportamento simmetrico rispetto all'asse immaginario.— Sulla semicirconferenza $1, -i, -1$ si ha il comportamento che risulta per riflessione rispetto all'asse reale.

Ricordando il significato della parte reale ϑ di ω, e notando che sulle pareti rigide la velocità è tangenziale, possiamo concludere che all'integrale (7) corrispondono delle pareti rigide simmetriche, costituite da tratti rettilinei $\overline{P_1 z_1}$, $\overline{z_1 z_2}$, ... $\overline{z_{m-1} z'}$ ($\overline{P'_1 z'_1}$, etc.) corrispondenti agli archi $(1, \zeta_1)$, (ζ_1, ζ_2), ..., (ζ_{m-1}, j') (agli archi simmetrici rispetto all'asse immaginario) ed inclinati sull'asse di simmetria rispettivamente di un angolo ϑ_1, $\vartheta_2, \ldots, \vartheta_m$, $(-\vartheta_1, -\vartheta_2, \ldots, -\vartheta_m)$.

(*Fig. 5*).

Per quanto precede possiamo concludere che la (7) permette di risolvere il problema del moto, in un canale, di qualunque profilo rigido poligonale, simmetrico.

Mi riservo di approfondire nell'ultimo § qualche caso particolare interessante.

Ora ritornando al caso generale, riprenderemo la questione dal principio.

---

[8]) Cfr. CISOTTI, loc. cit. [5]), § 12. La (7) si ricava dalla (37') della citata Memoria, ponendo $n = 2m+1$ e tenendo conto, per la simmetria, delle (43).

§ 4.

Corrente di un canale modificata dalla presenza di un solido immobile. Ipotesi preliminari. — Potenziale di velocità e funzione di corrente. Condizioni ai limiti. — Portata. — Pressione.

Assumiamo come sistema di riferimento, nel piano del moto, una coppia di assi cartesiani ortogonali coll'origine in ζ' (Fig. 3) e coll'asse delle ascisse parallelo alle pareti del canale nella direzione del moto.

Introduciamo le seguenti ipotesi [9]):

a) Il campo B è semplicemente connesso e separato da A mediante il contorno $\lambda_1 + \varpi_1 + \varpi'_1 + \lambda'_1$, formato dalle pareti rigide ϖ_1 e ϖ'_1 e dalle linee libere λ_1 e λ'_1, quest'ultime estendentesi indefinitamente a valle.

Detto contorno ammette, generalmente, la tangente variabile con continuità, tranne nell'origine delle coordinate, se può anche essere un punto angoloso.

b) Chiamiamo $\boldsymbol{V}_P$ la velocità di una generica particella liquida P di A; il vettore $\boldsymbol{V}_P$ quando P si allontana indefinitamente da C tenda a divenire parallelo alle pareti μ e μ', e riguardo al valore assoluto V_P, sia tale che

$$\lim_{OP=\infty} V_P = 1.$$

Indicando con u_P e v_P le componenti di $\boldsymbol{V}_P$ rispetto agli assi (x, y), l'ipotesi fatta equivale alle relazioni

$$\text{(8)} \qquad \begin{cases} \lim\limits_{OP=\infty} u_P = 1, \\ \lim\limits_{OP=\infty} v_P = 0. \end{cases}$$

La velocità è nulla in ζ', e, in valore assoluto, maggiore di zero ogni altro punto di A. In particolare sulle pareti μ e μ' il limite inferiore dei valori di V_P sia > 0.

c) In A il liquido (fluido incompressibile ed omogeneo, la cui densità prendiamo $= 1$) è dotato di moto permanente ed irrotazionale; in B regna la quiete.

Essendo in A il moto irrotazionale, esiste una funzione uniforme $\varphi(x, y)$ (potenziale di velocità), regolare in A e tale che

$$\text{(9)} \qquad d\varphi = u\,dx + v\,dy,$$

dove u e v rappresentano le componenti della velocità di una generica particella fluida (x, y).

La (9) definisce la φ a meno di una costante additiva: converremo di fissare tale costante in modo che sia $\varphi = 0$ nell'origine delle coordinate.

Per l'incompressibilità del liquido, sarà φ armonica in A; esisterà allora la funzione associata ψ (funzione di corrente), uniforme (essendo il campo A semplicemente con-

[9]) Le ipotesi che seguono discendono ragionevolmente dalle considerazioni svolte nel § 2.

nesso), regolare e definita dalla relazione differenziale

$$d\psi = -v\,dx + u\,dy, \tag{10}$$

colla determinazione $\psi = 0$ per $x = y = 0$.

Posto

$$\begin{cases} x + iy = z, \\ u - iv = w, \\ \varphi + i\psi = f, \end{cases} \tag{11}$$

in virtù delle (9) e (10), w ed f risultano manifestamente funzioni della variabile complessa z, e le (9) e (10) stesse vengono riassunte nell'unica relazione

$$\frac{df}{dz} = w. \tag{12}$$

Quando z varia entro A, w si mantiene regolare, finita all'infinito e tale che $|w| > 0$ tranne che in z' [ipotesi b)].

La f è pure regolare (al finito) e, per la (12) $\left|\frac{df}{dz}\right| \neq 0$ entro A, escluso il punto z'.

Sul contorno $s = \mu + \lambda_1 + \varpi_1 + \varpi_1' + \lambda_1' + \mu'$ di A potremo avere soltanto una velocità tangenziale, cioè detta n la normale in un generico punto di detto contorno, volta verso l'interno di A, sarà

$$\frac{d\varphi}{dn} = 0,$$

ovvero, designando $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ i coseni direttori della tangente in un generico punto di s,

$$-v\frac{dx}{ds} + u\frac{dy}{ds} = \frac{d\psi}{ds} = 0 \qquad \text{(lungo } s\text{)};$$

da questa scende che la ψ deve avere valore costante su ciascuno dei tre rami del contorno, μ, μ' e $\lambda_1 + \varpi_1 + \varpi_1' + \lambda_1'$.

Intanto, notando che in z' è $\psi = 0$, potremo scrivere

$$\psi = 0 \qquad (\text{sopra } \lambda_1 + \varpi_1 + \varpi_1' + \lambda_1'). \tag{13}$$

Sopra μ e sopra μ' la ψ deve assumere valori costanti necessariamente diversi da zero e diversi tra loro.

Infatti prendiamo a considerare le portate Q e Q' delle porzioni di corrente, comprese tra λ_1 e μ e tra λ_1' e μ' rispettivamente, in due sezioni RS e $R'S'$ normali al canale, cioè all'asse x e sufficientemente lontane da C (Fig. 3).

Pel carattere permanente del moto del liquido, la quantità di liquido che esce all'infinito a valle è uguale a quella che proviene dall'infinito a monte; se ne deduce che $Q + Q'$ dev'essere eguale alla portata del canale all'∞ a monte.

Ciò posto, ricordando che la densità del liquido si è presa $= 1$ [ipotesi c)], avremo

$$Q = \int_{y_S}^{y_R} u\,dy, \qquad Q' = \int_{y_{R'}}^{y_{S'}} u\,dy,$$

avendo designato y_R, $y_{R'}$, y_S, $y_{S'}$ le ordinate dei punti R, R', S, S'.

Per la (10) si avrà

$$Q = \int_{y_S}^{y_R} \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = \psi_R - \psi_S,$$

$$Q' = \int_{y_{R'}}^{y_{S'}} \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = \psi_{S'} - \psi_{R'};$$

ma è, per la (13),

$$\psi_R = \psi_{R'} = 0,$$

rimangono quindi le

$$(14) \qquad Q = -\psi_S, \qquad Q' = \psi_{S'}.$$

Da queste si deduce appunto che su μ e μ' la ψ deve assumere valori costanti differenti, altrimenti sarebbe $Q + Q' = 0$, il che è assurdo per l'osservazione fatta poc'anzi; dunque dev'essere $\psi_{S'} \neq \psi_S$.

Così pure è manifesto che non può essere $\psi_S = 0$ (oppure $\psi_{S'} = 0$) altrimenti sarebbe $Q = 0$ (oppure $Q' = 0$), il che è contro le nostre ipotesi.

Tenendo conto della simmetria, poniamo

$$(14') \qquad Q = Q' = \pi \quad ^{10)},$$

dimodochè è allora, per le (14),

$$(15) \qquad \begin{cases} \psi = -\pi & \text{(sopra } \mu\text{)}, \\ \psi = \pi & \text{(sopra } \mu'\text{)}. \end{cases}$$

Per le (14') la portata del canale a monte di C a distanza molto grande da C stesso è $Q + Q' = 2\pi$.

Indicando con V_∞ il valore assoluto della velocità delle particelle liquide a monte, e chiamando 2Ω la larghezza del canale, avremo

$$(16) \qquad \Omega . V_\infty = \pi.$$

Indichiamo con p e V la pressione ed il valore assoluto della velocità di una generica particella fluida.

In $B - C$ abbiamo la quiete, vi è quindi una pressione costante p_0, sui punti delle linee libere λ_1 e λ'_1 si deve avere pertanto

$$p = p_0;$$

d'altra parte le equazioni idrodinamiche di EULERO si compendiano nella relazione

$$p = -\tfrac{1}{2} V^2 + \text{costante},$$

dalla quale si deduce, in particolare, che sopra λ_1 e λ'_1 è V costante, e precisamente per le ipotesi *a*) e *b*) dev'essere

$$(17) \qquad V = 1 \qquad \text{sopra } \lambda_1 \text{ e } \lambda'_1.$$

Dalla relazione

$$p_0 = -\tfrac{1}{2} V^2 + \text{costante} = -\tfrac{1}{2} + \text{costante},$$

---

[10]) Si sono già fissate l'unità di velocità e l'unità di densità.

Se si nota che la portata Q ha le dimensioni 1 e -1 rispetto alle masse ed ai tempi, fissata Q risultano determinate tutte le unità di misura.

si ricava per la costante del secondo membro l'espressione $p_0 + \frac{1}{2}$ che portata in p permette di porre questa sotto la forma

$$p = p_0 + \tfrac{1}{2}(1 - V^2), \tag{18}$$

la quale definisce la pressione in ogni punto di A.

§ 5.

Corrispondenza fra i piani complessi
$z = x + iy, \quad f = \varphi + i\psi.$

Consideriamo un piano complesso rappresentativo della variabile $f = \varphi + i\psi$, e determiniamo i valori che assume la $f(z)$ quando z varia nel piano del moto.

Quando si fa percorrere all'affissa z la linea $\lambda_1 + \varpi_1 + \varpi'_1 + \lambda'_1$, la f, per la (13), descrive la retta $\psi = 0$.

E precisamente, immaginiamo che z percorra $\varpi_1 + \lambda_1$, oppure $\varpi'_1 + \lambda'_1$, partendo da z' nel senso della corrente. È facile constatare che tanto nel primo caso, che nel secondo, φ cresce da 0 a $+\infty$.

Infatti, sopra $\varpi_1 + \lambda_1$ (oppure sopra $\varpi'_1 + \lambda'_1$), trattandosi di linea di flusso, abbiamo

$$\frac{dx}{ds} = \frac{u}{V}, \qquad \frac{dy}{ds} = \frac{v}{V},$$

intendendosi presi gli incrementi dx e dy nella direzione del flusso e riguardando l'elemento ds positivo.

Sarà quindi

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{ds} = V. \tag{19}$$

Ora ricordiamo che $V > 0$, in ogni punto di A, e quindi, in particolare di $\varpi_1 + \lambda_1$ (oppure di $\varpi'_1 + \lambda'_1$), escluso il solo punto z' [§ 4, b)], e che $\varphi = 0$ in z'; si conclude quindi che φ va crescendo a partire dal valore zero, quando si procede nel senso del flusso sia su $\varpi_1 + \lambda_1$ che su $\varpi'_1 + \lambda'_1$.

Se si tiene, inoltre, presente la (17), si può concludere che quando ci si allontana da z' su λ_1 oppure su λ'_1, φ cresce indefinitamente. C. D. D.

Dunque tanto a $\varpi_1 + \lambda_1$ quanto a $\varpi'_1 + \lambda'_1$ corrispondono valori reali e positivi di f: esiste cioè una corrispondenza (1, 2) fra la linea $\varpi_1 + \lambda_1 + \lambda'_1 + \varpi'_1$ del piano z ed il semiasse reale positivo del piano f. Tale corrispondenza si può rendere biunivoca immaginando di praticare nel piano f un taglio lungo il semiasse positivo delle φ (Fig. 6).

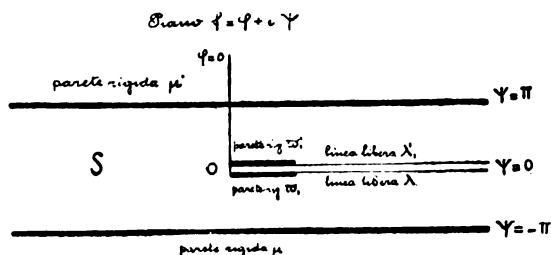
Per la biunivocità della corrispondenza converremo che il bordo superiore del taglio (quello rivolto verso il semipiano di ordinate positive) corrisponda al ramo $\varpi'_1 + \lambda'_1$, ed il bordo inferiore al ramo $\varpi_1 + \lambda_1$.

Quando la z percorre la parete rigida μ la f, per le (15), descrive la retta $\psi = -\pi$, mentre quando z si muove sopra μ' la f descriva la retta $\psi = \pi$.

E precisamente immaginiamo che la z descrive μ oppure μ' seguendo il senso della corrente da $-\infty$ a $+\infty$. È facile verificare che allora φ varia da $-\infty$ a $+\infty$.

Infatti notando che μ e μ' sono linee di flusso, possiamo applicare la (19), e allora se si tiene presente [§ 4, b)] che $V > 0$ su μ e μ' e che per $z = \infty$ è $V = 1$ ed infine che il limite inferiore dei valori di V su μ e μ' è > 0, si deduce quanto avevamo asserito.

Riconosciuto il comportamento di $f(z)$ al contorno, ricordiamo (§ 4) che essa è regolare in A per valori finiti di z, inoltre, da quanto siamo venuti dicendo, risulta che al punto $z = \infty$ corrisponde $f = \infty$.

Ciò posto siamo autorizzati ad assumere la $f = f(z)$ per una rappresentazione conforme del piano del moto sulla striscia tagliata S (Fig. 6).

(Fig. 6).

Infatti, per ogni funzione armonica, regolare in un dato campo, i valori nei punti interni sono compresi tra il limite superiore ed il limite inferiore di quelli che assume sul contorno. La funzione ψ è appunto armonica e regolare in A e assume sul contorno di A i valori $-\pi$, 0, π; possiamo adunque dire che la ψ varia in A tra $-\pi$ e π. Se si tiene conto di ciò, che $\left|\frac{df}{dz}\right|$ non si annulla mai, il punto z' escluso (§ 4), e inoltre che vi è corrispondenza biunivoca fra i contorni, si può concludere che ad ogni punto f della striscia tagliata S corrisponde un solo punto del piano z [11]).

Considerando pertanto la z come funzione dell'argomento f nella striscia tagliata S, la z si mantiene regolare al finito, e diviene infinita per f infinita.

Esaminiamo a quali conclusioni, relativamente al piano f, porta l'ipotesi della simmetria del moto rispetto all'asse x.

In punti simmetrici rispetto all'asse x, la $z = x + iy$ assume valori coniugati; le velocità pure devono essere simmetriche, il che implica che a valori coniugati di z corrispondano valori coniugati della $w = u - iv$.

Ora dalla (12)

$$df = w\,dz,$$

[11]) Cfr. OSGOOD, *Lehrbuch der Funktionentheorie* (Leipzig, Teubner, 1907), Cap. VIII, § 5.

tenendo presente che per $w = 0$ è $f = 0$, si deduce che a valori coniugati di z, corrispondono ancora valori coniugati della $f = \varphi + i\psi$, ed all'asse di simmetria del piano z (asse reale) corrisponde nel piano f la $\psi = 0$.

A punti di f simmetrici rispetto alla $\psi = 0$, corrispondono valori coniugati della f; si può adunque concludere che a coppie di punti z simmetrici rispetto all'asse reale, corrispondono coppie di punti f simmetrici rispetto all'asse reale.

In particolare ai punti P_1 e P'_1, di raccordo delle pareti rigide ϖ_1 e ϖ'_1 con λ_1 e λ'_1, simmetrici rispetto all'asse reale, fanno riscontro nel piano f due punti f_1 e f'_1 situati sull'asse reale e coincidenti, di cui il primo va attribuito al bordo inferiore del taglio e l'altro al superiore.

§ 6.

La funzione $w(f)$ ed il suo logaritmo $-it$.

Abbiamo già visto (§ 4) che la

$$w = u - iv$$

è funzione della variabile complessa $z = x + iy$, regolare in A, compreso il punto all'∞ in cui è $|w| = 1$.

Ma per quanto si è visto al § precedente, la z si può considerare come funzione di f finita e continua in tutti i punti della striscia tagliata S. Ne viene che la w si può riguardare come funzione di f regolare in S.

Dalla (17) si deduce che

$$|w| = 1 \qquad \text{per } f \text{ reale e } \geq f_1. \tag{17'}$$

Si osservi che essendo sulle pareti rigide μ e μ' la velocità parallela all'asse reale è necessariamente w reale su μ e μ'; quindi w oltre alla (17') deve soddisfare in S alla condizione seguente

$$w \text{ è reale per } \psi = \pm \pi. \tag{20}$$

Poniamo ancora

$$w = e^{-it}, \tag{21}$$

facendo la convenzione che per $f = \infty$ ($|w| = 1$) sia $t = 0$; rimane così definita una funzione uniforme nella striscia tagliata S, finita e continua anche sul contorno, eccezione fatta per $f = 0$ in cui it diviene $= +\infty$.

Dalle (17') e (20) si deduce che sulle parti del contorno di S, che corrispondono alle linee libere λ_1 e λ'_1, la t assume valori puramente reali, mentre sulle rette limiti $\psi = \pm \pi$ (corrispondenti alle pareti μ e μ' del canale) la t assume valori puramente immaginari.

§ 7.

Rappresentazione conforme della striscia tagliata *S* sopra un rettangolo.

Vogliamo eseguire un cambiamento di variabile che sostituisca alla striscia tagliata S un rettangolo.

A tal uopo cominciamo a porre

$$a^2 e^{-f} = a^2 - Z^2, \tag{22}$$

dove a designa una costante reale, positiva, che ci riserviamo di determinare in modo opportuno.

La (22) riferisce biunivocamente la striscia tagliata S al semipiano Z di ordinate positive: al contorno di S corrisponde l'asse reale del piano Z, in modo che alla retta $\psi = \pi$ fa riscontro il tratto $(a, +\infty)$, mentre alla retta $\psi = -\pi$ corrisponde il tratto $(-a, -\infty)$ e ai bordi del taglio fa riscontro il tratto $(-a, +a)$, e precisamente al bordo superiore il tratto $(0, a)$, all'inferiore il tratto $(0, -a)$.

Infatti, posto

$$\begin{matrix} Z + a = \rho e^{i\vartheta} \\ Z - a = \rho' e^{i\vartheta'} \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \leqq \vartheta \leqq \pi \\ 0 \leqq \vartheta' \leqq \pi \end{pmatrix},$$

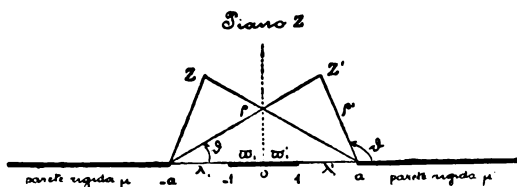
avremo

$$a^2 - Z^2 = -\rho\rho' e^{i(\vartheta+\vartheta')} = \rho\rho' e^{i(\vartheta+\vartheta'-\pi)},$$

e la (22) può essere scritta

$$a^2 e^{-\varphi - i\psi} = \rho\rho' e^{i(\vartheta+\vartheta'-\pi)};$$

da questa osservando che, nell'origine O del piano Z si ha $\vartheta = 0$, $\vartheta' = \pi$, mentre nella corrispondente origine del piano f è $\psi = 0$, si deducono le

$$\varphi = \log \frac{a^2}{\rho\rho'}, \qquad \psi = \pi - \vartheta - \vartheta'. \tag{23}$$

(Fig. 7).

Quando si fa percorrere nel piano della variabile complessa Z all'affissa Z l'asse reale, partendo dal punto o fino ad a, oppure nel senso opposto fino a $-a$, la φ varia, in entrambi i casi, sempre positivamente da o a $+\infty$: basta notare che il prodotto $\rho . \rho'$ varia da a^2 fino a o [12]).

[12]) È facile vedere che il valore massimo del prodotto $\rho . \rho'$ è a^2, quando Z si muove sull'asse reale fra $-a$ e $+a$. Infatti in tal caso è sempre costante la somma $\rho + \rho'$ ed eguale a $2a$. Pertanto il prodotto $\rho . \rho'$ diverrà massimo quando $\rho = \rho' = a$.

È allora (Fig. 7) $\vartheta = 0$ e $\vartheta' = \pi$, perciò $\psi = 0$. Dunque quando Z descrive l'asse reale da o ad a, l'affissa f descrive l'asse reale da o a $+\infty$; lo stesso accade quando Z va lungo l'asse reale da o a $-a$; faremo perciò corrispondere a $(0, a)$ il bordo superiore del taglio della striscia S e a $(0, -a)$ il bordo inferiore.

Quando Z percorre l'asse reale da a fino a $+\infty$, variando allora il prodotto $\rho . \rho'$ da o fino a $+\infty$, φ varia da $+\infty$ a $-\infty$; mentre essendo $\vartheta = 0$ e $\vartheta' = 0$ è $\psi = \pi$; dunque al tratto $(a, +\infty)$ dell'asse reale del piano Z corrisponde tutta la retta $\psi = \pi$ del piano f.

Quando Z descrive l'asse reale da $-a$ a $-\infty$, $\rho . \rho'$ varia ancora da $+\infty$ a $-\infty$ e quindi φ da $+\infty$ a $-\infty$; inoltre essendo allora $\vartheta = \pi$ e $\vartheta' = \pi$ è $\psi = -\pi$: dunque al tratto $(-a, -\infty)$ dell'asse reale del piano Z fa riscontro tutta la retta $\psi = -\pi$ del piano f.

Notiamo infine che se Z è un punto del semipiano, non situato sull'asse reale, è

$$0 < \vartheta < \pi \quad \text{e} \quad 0 < \vartheta' < \pi ;$$

ad esso corrisponde nel piano f un punto tale che

$$|\psi| < \pi .$$

Pertanto la (22) definisce l'annunciata rappresentazione biunivoca tra il semipiano Z di ordinate positive e la striscia tagliata S.

Ai punti f_1 ed f'_1 (corrispondenti ai punti P_1 e P'_1 del piano z) fanno riscontro, a norma della (22), i punti

$$Z_1 = a\sqrt{1 - e^{-f_1}},$$
$$Z'_1 = -Z_1 = -a\sqrt{1 - e^{-f_1}},$$

il radicale intendendosi preso positivamente.

Ponendo

$$a = \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-f_1}}}, \tag{24}$$

avremo

$$Z_1 = 1, \qquad Z'_1 = -1.$$

Osserviamo che, essendo f_1 reale e > 0, è a reale e > 1.

Vogliamo infine eseguire un ulteriore cambiamento di variabile per cui il semipiano Z (di ordinate positive) venga sostituito da un rettangolo.

A tal uopo introduciamo una nuova variabile complessa $\mathfrak{u} = \mathfrak{v} + i\mathfrak{w}$ e poniamo, come è manifestamente lecito,

$$\begin{cases} Z^2 - a^2 = \wp\mathfrak{u} - e_1, \\ Z^2 - 1 = \wp\mathfrak{u} - e_2, \\ Z^2 = \wp\mathfrak{u} - e_3, \end{cases} \tag{25}$$

indicando $\wp\mathfrak{u}$ la funzione ellittica di WEIERSTRASS corrispondente alle radici e_1, e_2, e_3.

Osserviamo intanto come dalle (25) scendono le relazioni

$$\begin{cases} e_1 - e_3 = a^2, \\ e_2 - e_3 = 1 ; \end{cases} \tag{26}$$

le quali, colla ulteriore ben nota relazione

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0,$$

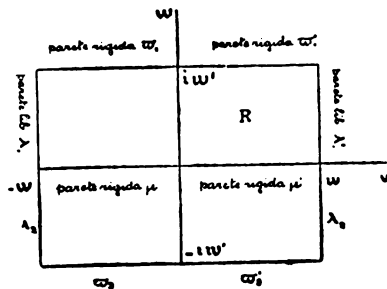
definiscono e_1, e_2, e_3 in funzione di a^2, nel modo seguente

$$(27) \qquad \begin{cases} e_1 = \dfrac{2a^2 - 1}{3}, \\ e_2 = \dfrac{2 - a^2}{3}, \\ e_3 = -\dfrac{1 + a^2}{3}. \end{cases}$$

Queste, tenendo presente che $a > 1$, soddisfanno manifestamente alla condizione qualitativa $e_1 > e_2 > e_3$.

Facciamo ora constatare che le (25) permettono di riferire in modo conforme il semipiano Z ad un rettangolo.

Sieno 2ω e $2i\omega'$ i periodi, reale ed immaginario, della $\wp u$, e prendiamo a considerare nel piano della variabile complessa $u = v + iw$ il rettangolo limitato dalle rette

$$v = +\omega, \qquad v = -\omega, \qquad w = 0, \qquad w = \omega'.$$

(*Fig. 8*).

Facendo percorrere all'affissa u l'asse reale da 0 fino ad ω, oppure nel verso opposto da 0 fino a $-\omega$, la $\wp u$ (notiamo che è funzione pari) decresce, assumendo valori puramente reali, da $+\infty$ fino ad e_1; allora, per la prima delle (25), la Z^2 varierà da $+\infty$ fino a a^2: potremo perciò far corrispondere al tratto $(0, \omega)$ dell'asse reale del piano u, il tratto $(+\infty, a)$ dell'asse reale del piano Z, e al tratto $(0, -\omega)$ del primo, il tratto $(-\infty, -a)$ del secondo.

Quando u percorre il perimetro del rettangolo da ω fino a $\omega + i\omega'$, (oppure da $-\omega$ fino a $-\omega + i\omega'$) la $\wp u$ varia per valori reali da e_1 fino ad e_2 e quindi, per le (25), Z^2 decrescerà da a^2 fino ad 1; potremo così far corrispondere al lato $(\omega, \omega + i\omega')$ del rettangolo, il tratto $(a, 1)$ dell'asse reale del piano Z, ed al lato $(-\omega, -\omega + i\omega')$ del rettangolo, il tratto $(-a, -1)$ dell'asse reale.

Infine quando u va, sempre seguendo il perimetro del rettangolo, da $\omega + i\omega'$ fino a $i\omega'$ (oppure da $-\omega + i\omega'$ fino a $i\omega'$) la $\wp u$ decresce per valori reali da e_2 fino

ad e_3, e Z^2 in conseguenza decresce da 1 fino a 0: al tratto $(\omega + i\omega', i\omega')$ potremo così far corrispondere il tratto (1, 0) dell'asse reale del piano Z e al tratto $(-\omega + i\omega', i\omega')$ del perimetro del rettangolo, il segmento (— 1, 0) dell'asse reale nel piano Z.

Come si vede al perimetro del rettangolo del piano u, corrisponde l'asse reale del piano Z.

Notiamo ancora che ai punti u del perimetro corrispondono valori di Z tutti differenti, e che le (25), tenendo conto delle convenzioni fatte riguardo al contorno, definiscono la Z come funzione olomorfa di u.

Possiamo concludere [13]) che le (25) forniscono l'accennata rappresentazione conforme del semipiano Z sul rettangolo R del piano u.

Vediamo quali sono le coppie di punti del piano u corrispondenti a coppie di punti del piano f, simmetrici rispetto all'asse reale.

Prendiamo a considerare nel piano Z due punti Z e Z' simmetrici rispetto all'asse immaginario (Fig. 7); è manifesto che il passaggio dall'uno all'altro si opera mediante lo scambio di ρ e ρ' ed il cambiamento di ϑ e ϑ' in $\pi - \vartheta$ e $\pi - \vartheta'$ rispettivamente; ora tale operazione riportata alle (23) lascia immutato φ e cambia segno alla ψ: ciò significa che a coppie di punti del piano Z, simmetrici rispetto all'asse immaginario, corrispondono nel piano f coppie di punti simmetrici rispetto all'asse reale.

È facile ora constatare che a coppie di punti u, simmetrici rispetto all'asse immaginario, corrispondono nel piano Z coppie di punti simmetrici rispetto all'asse immaginario.

Dacchè la $\wp u$ è funzione *pari*, reale sull'asse reale [14]), possiamo dire che a coppie di valori della variabile complessa u che differiscono soltanto pel segno della parte reale, corrispondono valori coniugati della $\wp u$, cioè per le (25) valori coniugati della Z^2.

Posto per un momento

$$Z = X + iY,$$

avendosi allora

$$Z^2 = X^2 - Y^2 + 2iXY,$$

vediamo che a valori coniugati di Z^2 corrispondono, essendo $Y > 0$, valori di X eguali e di segno opposto; dunque a coppie di punti del piano u simmetrici rispetto all'asse immaginario corrispondono nel piano Z coppie di punti simmetrici rispetto all'asse immaginario. C. D. D.

Per ciò e per quanto si è detto alla fine del § 5, possiamo concludere che a coppie di punti simmetrici rispetto all'asse reale nel piano del moto corrispondono nel rettangolo R coppie di punti simmetrici rispetto all'asse immaginario.

[13]) Cfr. PICARD, *Traité d'Analyse*, tome II (Paris, Gauthier-Villars, 1905), p. 309.

[14]) Cfr. HALPHEN, *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications*, t. I (Paris, Gauthier-Villars, 1886), p. 34.

§ 8.

Riflessione. — Comportamento della funzione $t(\mathfrak{u})$ nel rettangolo $\mathfrak{v}^2 \leqq \omega^2$, $\mathfrak{w}^2 \leqq \omega'^2$.

Per quanto si è visto nel § precedente, ogni funzione di f, regolare nella striscia tagliata S, si può considerare come funzione di $\mathfrak{u}$, regolare entro il rettangolo R.

In particolare sarà regolare entro R la funzione t definita dalla (21)

$$w = e^{-it}.$$

Per $f = \infty$ è $|w| = 1$ e $t = 0$ [Cfr. § 6]; siccome a $f = \infty + i\pi$ e $f = \infty - i\pi$ corrispondono nel piano $\mathfrak{u}$ i due punti ω e $-\omega$, possiamo dire che la funzione $t(\mathfrak{u})$ si annulla per $\mathfrak{u} = \pm\,\omega$.

Abbiamo visto (§ 6) che la t assume valori reali sulle linee libere λ_1 e λ_1', che corrispondono nel piano $\mathfrak{u}$ ai lati $(-\omega, -\omega + i\omega')$ e $(\omega, \omega + i\omega')$ del rettangolo R; e valori puramente immaginari sulle pareti μ e μ' del canale, che corrispondono al lato $(\omega, -\omega)$ di R.

Dunque, prendendo a considerare la funzione it, possiamo dire che essa è puramente immaginaria sui primi lati e reale sul secondo, mantenendosi su questi finita e continua.

Ne consegue pel noto principio di SCHWARZ [15]) che la funzione it è prolungabile per riflessione analitica nel rettangolo simmetrico ad R rispetto all'asse reale (vedi Fig. 8), assumendo quivi valori coniugati di quelli che le spettano in R.

E precisamente, posto

$$t = \vartheta + i\tau \qquad (\vartheta \text{ e } \tau \text{ reali}), \tag{28}$$

se in un punto $\mathfrak{v} + i\mathfrak{w}$ di R è

$$it(\mathfrak{v} + i\mathfrak{w}) = -\tau + i\vartheta,$$

nel punto coniugato $\mathfrak{v} - i\mathfrak{w}$ del rettangolo riflesso si avrà

$$it(\mathfrak{v} - i\mathfrak{w}) = -\tau - i\vartheta,$$

ovvero, riferendoci senz'altro alla funzione t, si deve avere

$$\left\{\begin{array}{l} t(\mathfrak{v} - i\mathfrak{w}) = -\vartheta + i\tau, \\ \text{se} \\ t(\mathfrak{v} + i\mathfrak{w}) = \vartheta + i\tau. \end{array}\right. \tag{29}$$

Sul lato $(-\omega + i\omega', \omega + i\omega')$ di R la t è ancora finita e continua, eccezion fatta nel punto $i\omega'$ che corrisponde a $f = 0$.

Sul lato $(-\omega - i\omega', \omega - i\omega')$ del rettangolo riflesso, si ha il comportamento che risulta per riflessione.

Alla (29) abbiamo da aggiungere una ulteriore condizione cui deve soddisfare la t

---

[15]) Cfr. per es. DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. I (Paris, Gauthier-Villars, 1887), pp. 174-175.

entro il rettangolo

$$\mathfrak{v}^2 \leqq \omega^2, \qquad \mathfrak{w}^2 \leqq \omega'^2.$$

Essa dipende dalla simmetria del moto delle particelle liquide rispetto all'asse reale nel piano z.

In questo piano in punti simmetrici rispetto all'asse reale la $w = u - iv$ deve assumere valori coniugati (cfr. § 5); tenendo presente la (21) si conclude che la funzione it deve assumere valori coniugati in coppie di punti del piano $\mathfrak{u}$, simmetrici rispetto all'asse immaginario (§ 7).

Ciò implica

$$(30) \qquad \begin{cases} t(-\mathfrak{v} + i\mathfrak{w}) = -\vartheta + i\tau, \\ \text{se} \\ \quad t(\mathfrak{v} + i\mathfrak{w}) = \vartheta + i\tau. \end{cases}$$

Riassumendo: *la funzione $t(\mathfrak{u})$ dev'essere finita e continua entro il rettangolo*

$$\mathfrak{v}^2 = \omega^2, \qquad \mathfrak{w}^2 = \omega'^2,$$

deve soddisfare alle (29) e (30), sui lati paralleli all'asse immaginario dev'essere reale, deve mantenersi finita e continua anche sul contorno, eccettuato nei punti $\pm i\omega'$.

Dalle (29) e (30) si deduce, in particolare, la relazione

$$(31) \qquad t(\mathfrak{u}) = t(-\mathfrak{u});$$

cioè *la t dev'essere funzione pari di $\mathfrak{u}$.*

§ 9.

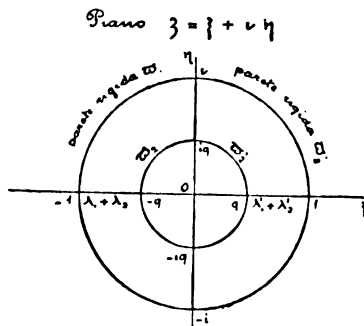
Rappresentazione conforme del rettangolo sopra una semicorona circolare.

Poniamo

$$(32) \qquad \zeta = i\sqrt{q}\, e^{-i\frac{\pi \mathfrak{u}}{2\omega}},$$

dove q è una costante reale e positiva, definita dalla relazione

$$(33) \qquad q = e^{-\pi\frac{\omega'}{\omega}}.$$

Ci proponiamo di far vedere come la (32) definisca una corrispondenza biunivoca tra il rettangolo $\mathfrak{v}^2 \leqq \omega^2$, $\mathfrak{w}^2 \leqq \omega'^2$, e la semicorona circolare di raggi 1 e $q < 1$ e di ordinate positive (Fig. 9), nel piano complesso $\zeta = \xi + i\eta$.

(Fig. 9).

E precisamente al perimetro del rettangolo corrisponde il contorno della semicorona in modo che, ai lati del rettangolo paralleli all'asse reale corrispondono le semicirconferenze $(-1, i, 1)$ e $(-q, iq, q)$ del piano ζ (la prima corrisponde alle pareti rigide $\varpi_1 + \varpi'_1$, la seconda al lato $\varpi_2 + \varpi'_2$); e ai lati del rettangolo, paralleli all'asse immaginario i tratti $(-q, -1)$ e $(1, q)$ dell'asse reale del piano ζ (il primo corrisponde al lato $\lambda_1 + \lambda_2$, il secondo all'altro).

Infatti facciamo percorrere all'affissa $\mathfrak{u}$, nel piano del rettangolo, il lato $(-\omega + i\omega', \omega + i\omega')$, oppure il suo opposto; allora la $\mathfrak{u}$ assume valori del tipo

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{v} \pm i\omega \qquad (-\omega \leqq \mathfrak{v} \leqq \omega),$$

valendo il primo segno oppure il secondo, secondochè $\mathfrak{u}$ percorre il lato $\mathfrak{w} = \omega'$, oppure il lato $\mathfrak{w} = -\omega'$. Portando questa espressione di $\mathfrak{u}$ nella (32), e facendo nella stessa

$$\zeta = \rho e^{i\sigma},$$

avremo, tenendo presente la (33),

$$\rho e^{i\sigma} = q^{\frac{1}{2}(1 \mp 1)} . e^{i\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{\mathfrak{v}}{\omega}\right)}.$$

Da questa si deducono le

$$\begin{cases} \rho = 1, \\ \sigma = \dfrac{\pi}{2}\left(1 - \dfrac{\mathfrak{v}}{\omega}\right), \end{cases}$$

quando $\mathfrak{u}$ percorre il lato $(-\omega + i\omega', \omega + i\omega')$;

$$\begin{cases} \rho = q, \\ \sigma = \dfrac{\pi}{2}\left(1 - \dfrac{\mathfrak{v}}{\omega}\right), \end{cases}$$

quando $\mathfrak{u}$ percorre il lato $(-\omega - i\omega', \omega - i\omega')$.

Da queste si deduce che, facendo variare $\mathfrak{v}$ da ω a $-\omega$, ζ descrive, nel primo caso la semicirconferenza $(1, i, -1)$, nel secondo la semicirconferenza $(q, iq, -q)$.

Facciamo ora percorrere all'affissa $\mathfrak{u}$ i lati del rettangolo paralleli all'asse immaginario; allora la $\mathfrak{u}$ assume valori del tipo

$$\mathfrak{u} = \pm \omega + i\mathfrak{w} \qquad (-\omega' \leqq \mathfrak{w} \leqq \omega'),$$

valendo il primo oppure il secondo segno, secondochè ci si riferisce al lato $(\omega - i\omega', \omega + i\omega')$ oppure al suo opposto.

Portando nella (32), e ponendo come precedentemente $\zeta = \rho e^{i\sigma}$, avremo

$$\rho e^{i\sigma} = \sqrt{q} . e^{\frac{\pi\mathfrak{w}}{2\omega}} . e^{i\frac{\pi}{2}(1 \mp 1)};$$

dalla quale si deducono le

$$\rho = \sqrt{q} . e^{\frac{\pi\mathfrak{w}}{2\omega}} \quad \text{e} \quad \sigma = 0,$$

quando $\mathfrak{u}$ percorre il lato $(\omega - i\omega', \omega + i\omega')$;

$$\rho = \sqrt{q} . e^{\frac{\pi\mathfrak{w}}{2\omega}} \quad \text{e} \quad \sigma = \pi,$$

quando $\mathfrak{u}$ percorre il lato opposto.

Dalle precedenti, tenendo conto della (33), si deduce che quando $\mathfrak{w}$ varia da ω' fino a $-\omega'$, l'affissa ζ descrive, nel primo caso l'asse reale da 1 fino a $+q$, nel secondo caso l'asse reale da -1 fino a $-q$.

Supponiamo infine che $\mathfrak{u}$ sia interno al rettangolo; avremo allora

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{v} + i\mathfrak{w} \qquad (\text{con } |\mathfrak{v}| < \omega \text{ e } |\mathfrak{w}| < \omega').$$

La (32) porge allora, nel solito modo,

$$\rho e^{i\sigma} = \sqrt{q}\, e^{\frac{\pi\mathfrak{w}}{2\omega}} . e^{i\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{\mathfrak{v}}{\omega}\right)},$$

da cui si ricavano le

$$(32') \qquad \rho = \sqrt{q} . e^{\frac{\pi\mathfrak{w}}{2\omega}}, \qquad \sigma = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{\mathfrak{v}}{\omega}\right),$$

dalle quali, tenendo conto che $|\mathfrak{v}| < \omega$ e $|\mathfrak{w}| < \omega'$, e tenendo presente la (33), si deduce

$$q < \rho < 1 \quad \text{e} \quad 0 < \sigma < \pi.$$

Queste ci dicono che il punto ζ corrispondente è interno alla semicorona circolare $1, i, -1, -q, iq, q, 1$.

Pertanto possiamo concludere che la (32) porge la rappresentazione conforme del rettangolo sulla semicorona circolare nel modo asserito.

A coppie di punti del piano $\mathfrak{u}$ simmetrici rispetto all'asse immaginario corrispondono nel piano ζ ancora coppie di punti simmetrici rispetto all'asse immaginario.

Basta infatti osservare che cambiando nelle (32') $\mathfrak{v}$ in $-\mathfrak{v}$, ρ rimane immutato, e σ si cambia in $\pi - \sigma$.

Per questo e per quanto abbiamo detto alla fine dei §§ 5 e 7 possiamo concludere che *a coppie di punti del piano del moto simmetrici rispetto all'asse reale, corrispondono nel piano ζ coppie di punti simmetrici rispetto all'asse immaginario.*

§ 10.

Riflessione. — Comportamento della funzione $t(\zeta)$ nella corona circolare $q \leqq |\zeta| \leqq 1$.

Riferendoci a quanto è stato detto nel § precedente possiamo aggiungere che ogni funzione di $\mathfrak{u}$, regolare nel rettangolo $\mathfrak{v}^2 \leqq \omega^2$, $\mathfrak{w}^2 \leqq \omega'^2$, si può considerare come funzione di ζ regolare entro la semicorona circolare di ordinate positive; in particolare sarà regolare in tal campo la funzione t di cui ci siamo occupati nel § 8.

Riferendoci al comportamento della funzione $t(\mathfrak{u})$ nel rettangolo (§ 8), possiamo dire, passando dal rettangolo alla semicorona circolare per mezzo della (32), che la funzione $t(\zeta)$ deve mantenersi finita e continua per $q \leqq |\zeta| \leqq 1$, eccettuato nei punti $\zeta = i$ e $\zeta = iq$ (corrispondenti a $\mathfrak{u} = i\omega'$ e $\mathfrak{u} = -i\omega'$) in cui diviene infinita.

Notiamo ora che se $\mathfrak{u}_1$ e $\mathfrak{u}_2$ rappresentano due punti del piano $\mathfrak{u}$, opposti rispetto all'origine delle coordinate, tali cioè che $\mathfrak{u}_1 + \mathfrak{u}_2 = 0$, chiamando ζ_1 e ζ_2 i corrispon-

denti punti del piano ζ, dovremo avere per la (32)

$$\zeta_1 . \zeta_2 = -q.$$

Ciò posto alla relazione (31), cui deve soddisfare la $t(u)$ nel rettangolo, fa riscontro sulla semicorona circolare del piano ζ la relazione funzionale

$$t(\zeta) = t\left(\frac{-q}{\zeta}\right). \tag{34}$$

Notiamo che la $t(\zeta)$ dev'essere reale sui tratti del contorno della semicorona, situati sull'asse reale.

Ciò permette di asserire, pel principio di SCHWARZ [16]), che la $t(\zeta)$ è continuabile per riflessione analitica nella semicorona simmetrica alla prima rispetto all'asse reale. *Essa è quindi regolare in tutta la corona circolare* $q < |\zeta| < 1$, *deve soddisfare alla relazione funzionale* (34); *sulle semicirconferenze* $(1, i, -1)$, $(q, iq, -q)$ *è la* t *ancora finita e continua, tranne nei punti* $\zeta = i$ *e* $\zeta = iq$ *in cui diviene infinita, sulle semicirconferenze* $(1, -i, -1)$, $(q, -iq, -q)$ *si ha il comportamento che risulta per riflessione.*

Dobbiamo ancora tener conto della condizione corrispondente alla (30), la quale sta ad esprimere che il moto è simmetrico rispetto all'asse reale.

Ricordando (§ 5) che in punti coniugati del piano $z = x + iy$ la w assume valori coniugati, e tenendo conto che a coppie di punti coniugati del piano z corrispondono (§ 9) nel piano ζ coppie di punti simmetrici rispetto all'asse immaginario, dalla (21)

$$w = e^{-it},$$

si deduce che $it(\zeta)$ *è funzione di* ζ *reale sull'asse immaginario, oppure, essendo la* $t(\zeta)$ *regolare per* $q < |\zeta| < 1$, *è* $t(\zeta)$ *funzione dispari di* ζ, *tale cioè che*

$$t(-\zeta) = -t(\zeta).$$

§ 11.

Singolarità caratteristiche della $t(\zeta)$. Integrale generale del moto.

Dalla (21)

$$w = e^{-it},$$

per la posizione (28)

$$t = \vartheta + i\tau \qquad (\vartheta \text{ e } \tau \text{ reali}),$$

si deducono le relazioni

$$\left\{\begin{aligned} |w| &= \sqrt{u^2 + v^2} = V = e^{\tau}, \\ \frac{u + iv}{V} &= e^{i\vartheta}. \end{aligned}\right. \tag{35}$$

---

[16]) Loco citato [15]).

Dalla prima delle quali apparisce che τ *è il logaritmo naturale del valore assoluto della velocità del liquido in un generico punto* z *del piano del moto;* dalla seconda, se si nota che $\frac{u}{V}$ e $\frac{v}{V}$ sono i coseni direttori del vettore velocità nel piano del moto, si deduce che ϑ *rappresenta l'angolo che la direzione della velocità forma colla direzione positiva dell'asse delle ascisse, cioè colle pareti del canale, nel verso della corrente.*

Per le ipotesi fatte (§ 4) facilmente si vede che ϑ va contato fra $-\pi$ e $+\pi$, positivamente nel verso $x \rightarrow y$, partendo dalla direzione positiva dell'asse x, negativamente nel verso opposto.

Avendosi per $\zeta = i$ (corrispondente all'origine delle coordinate nel piano del moto) $|w| = 0$, sarà $\tau = -\infty$, come risulta dalla prima delle (35) e quindi la t diviene infinita, come del resto abbiamo già notato a § 6.

Vediamo di caratterizzare la natura della singolarità.

Sia $-\alpha$ l'angolo che la tangente in z' a ϖ_1 (Fig. 3), nel verso del flusso, forma colla direzione positiva dell'asse x; sarà $+\alpha$ l'angolo formato collo stesso asse dalla tangente in z' a ϖ'_1 diretta sempre nel verso del flusso.

Tenendo presente il significato di ϑ abbiamo

$$(36)\qquad \begin{cases} \lim \vartheta = \alpha, \text{ tendendo ad } i \text{ lungo l'arco } (1, i), \\ \lim \vartheta = -\alpha, \text{ tendendo ad } i \text{ lungo l'arco } (-1, i), \end{cases}$$

mentre in ogni altro punto della semicirconferenza $(1, i, -1)$, ϑ deve essere funzione continua.

Sulla semicirconferenza $(1, -i, -1)$ si ha il comportamento che risulta per riflessione rispetto all'asse reale.

Come si è visto nel § precedente anche per $\zeta = iq$ la t diviene infinita. La singolarità ha la stessa natura di quella che t presenta nel punto $\zeta = i$.

Infatti prendiamo a considerare un punto della circonferenza $|\zeta| = q$, potremo porre

$$\zeta = q e^{i\sigma}.$$

Per la (34) si deve avere

$$t(q e^{i\sigma}) = t(e^{i(\pi-\sigma)}).$$

Da questa apparisce che la $t(\zeta)$ deve assumere lo stesso valore in coppie di punti ζ_1, ζ_2 soddisfacenti alle condizioni: di appartenere uno alla circonferenza $|\zeta| = 1$ e l'altro alla circonferenza $|\zeta| = q$, e di più d'avere l'angolo $\zeta_1 O \zeta_2$ bissecato dall'asse immaginario.

In particolare la t assume lo stesso valore nei punti i e iq.

Da quanto precede segue che

$$(36')\qquad \begin{cases} \lim \vartheta = -\alpha, \text{ tendendo ad } iq \text{ lungo l'arco } (q, iq), \\ \lim \vartheta = +\alpha, \text{ tendendo a } -iq \text{ lungo l'arco } (-q, iq); \end{cases}$$

mentre in ogni altro punto della semicirconferenza $(q, iq, -q)$ la ϑ dev'essere funzione continua.

Sulla semicirconferenza $(q, -iq, -q)$ si ha il comportamento simmetrico rispetto all'asse reale.

Sia $t_0 = \vartheta_0 + i\tau_0$ una funzione dispari della variabile complessa ζ, soddisfacente alla (34), reale sull'asse reale, regolare entro la corona circolare $q < |\zeta| < 1$ e tale che la sua parte reale ϑ_0 si comporti nei punti $\zeta = i$, $\zeta = iq$ a norma delle (36), (36') e nei punti $\zeta = -i$, $\zeta = -iq$ in modo simmetrico [17].

Poniamo

$$T = t_0 - t.$$

La parte reale di T si mantiene manifestamente *continua su tutte le circonferenze* $|\zeta| = 1$ *e* $|\zeta| = q$ *e deve annullarsi per* $\zeta = \pm i$, *e per* $\zeta = \pm iq$ per cui in definitiva si ha

$$t = t_0 - T, \tag{37}$$

designando T una funzione dispari della variabile complessa ζ, reale sull'asse reale e regolare entro la corona $q < |\zeta| < 1$, come le t_0 e t, ma avente su esse il vantaggio di restare finita e continua anche sulle circonferenze $|\zeta| = 1$, $|\zeta| = q$.

In tali condizioni la T è sviluppabile entro la corona circolare (contorno incluso) in serie del LAURENT.

Potremo porre pertanto

$$T(\zeta) = \sum_0^\infty {}_n c_n \zeta^{2n+1} + \sum_0^\infty {}_n \frac{d_n}{\zeta^{2n+1}}, \tag{38}$$

dove le c_n e d_n sono costanti reali e la serie è convergente per $q \leqq |\zeta| \leqq 1$.

La condizione (34)

$$T(\zeta) = T\left(\frac{-q}{\zeta}\right),$$

porta un vincolo tra le costanti reali c_n e d_n, come ora vedremo.

Essendo per la (38)

$$T\left(\frac{-q}{\zeta}\right) = -\sum_0^\infty {}_n c_n \frac{q^{2n+1}}{\zeta^{2n+1}} - \sum_0^\infty {}_n d_n \frac{\zeta^{2n+1}}{q^{2n+1}},$$

la identicità di questa colla (38) esige che sieno soddisfatte tra i coefficienti c_n e d_n le relazioni

$$d_n = -c_n q^{2n+1};$$

portando questo valore per d_n nella (38) avremo per T l'espressione

$$T(\zeta) = \sum_0^\infty {}_n c_n \left\{\zeta^{2n+1} - \frac{q^{2n+1}}{\zeta^{2n+1}}\right\}. \tag{38'}$$

Per questa la (37) diviene

$$t(\zeta) = t_0 - \sum_0^\infty {}_n c_n \left\{\zeta^{2n+1} - \frac{q^{2n+1}}{\zeta^{2n+1}}\right\}. \tag{37'}$$

Poichè, come vedremo nei §§ 13 e 14, mediante la $t(\zeta)$ si possono definire tutti gli elementi del moto, *la* (37') *costituisce l'integrale generale del moto fluido del piano* ζ, *e la* (38') *ne mette in evidenza il grado di arbitrarietà.*

---

[17]) Vedremo nel paragrafo seguente come si possa costruire una t_0 soddisfacente a tutte queste condizioni.

La introduzione della variabile ausiliaria $\zeta = \xi + i\eta$ ci ha permesso di porre nettamente in evidenza il grado di arbitrarietà della questione. Però per la effettiva determinazione degli elementi del moto gioverà, come vedremo nei successivi paragrafi, riferirci al piano complesso $\mathfrak{u} = \mathfrak{v} + i\mathfrak{w}$.

§ 12.

Costruzione di una funzione t_0 dotata delle singolarità caratteristiche.

Riferendoci adunque alla variabile $\mathfrak{u} = \mathfrak{v} + i\mathfrak{w}$, prendiamo a considerare una funzione t_0 il cui sviluppo in serie di FOURIER è

$$t_0 = 2i\sum_m \alpha_m \cos\frac{m\pi}{2\omega}\mathfrak{u} \qquad (m = 1, 3, 5, \ldots), \tag{39}$$

dove le α_m sono costanti reali a priori indeterminate, e tali da rendere la serie convergente.

Notando che

$$2\cos\frac{m\pi}{2\omega}\mathfrak{u} = e^{-i\frac{m\pi}{2\omega}\mathfrak{u}} + e^{i\frac{m\pi}{2\omega}\mathfrak{u}},$$

la (39) può scriversi anche

$$t_0 = \mathfrak{z}_0 + i\tau_0 = i\sum_m \alpha_m [e^{-i\frac{m\pi}{2\omega}\mathfrak{u}} + e^{i\frac{m\pi}{2\omega}\mathfrak{u}}],$$

dalla quale scendono le

$$\begin{cases} \mathfrak{z}_0 = \sum_m \alpha_m [e^{\frac{m\pi}{2\omega}\mathfrak{w}} - e^{-\frac{m\pi}{2\omega}\mathfrak{w}}] \operatorname{sen}\frac{m\pi}{2\omega}\mathfrak{v}, \\ \tau_0 = \sum_m \alpha_m [e^{\frac{m\pi}{2\omega}\mathfrak{w}} + e^{-\frac{m\pi}{2\omega}\mathfrak{w}}] \cos\frac{m\pi}{2\omega}\mathfrak{v}. \end{cases} \tag{40}$$

Facilmente si constata che la $t_0 = \mathfrak{z}_0 + i\tau_0$ soddisfa alle (29) e (30), è puramente immaginaria sull'asse reale (perchè è $\mathfrak{z}_0 = 0$ per $\mathfrak{w} = 0$) e di più è reale sui lati del rettangolo paralleli all'asse immaginario (essendo $\tau_0 = 0$ per $\mathfrak{v} = \pm\omega$).

Prendiamo a considerare i valori che la parte reale $\mathfrak{z}_0$ di t_0 assume sul lato $\mathfrak{w} = \omega'$. Avremo a norma della prima delle (40)

$$\mathfrak{z}_0 = \sum_m \alpha_m [e^{\frac{m\pi}{2\omega}\omega'} - e^{-\frac{m\pi}{2\omega}\omega'}] \operatorname{sen}\frac{m\pi}{2\omega}\mathfrak{v}, \qquad (-\omega \leqq \mathfrak{v} \leqq \omega),$$

ovvero, introducendo la quantità reale q, definita dalla (33),

$$q = e^{-\frac{\pi\omega'}{\omega}},$$

avremo

$$\mathfrak{z}_0 = \sum_m \alpha_m [q^{-\frac{m}{2}} - q^{\frac{m}{2}}] \operatorname{sen}\frac{m\pi}{2\omega}\mathfrak{v}, \qquad (-\omega \leqq \mathfrak{v} \leqq \omega). \tag{41}$$

Vogliamo ora valutare le costanti reali α_m in guisa che la $\mathfrak{z}_0$, definita dalla pre-

cedente, assuma il valore costante α per $o < \mathfrak{v} \leqq \omega$ ed il valore costante $-\alpha$ per $-\omega \leqq \mathfrak{v} < o$.

A tal uopo, applicando un noto metodo, moltiplichiamo ambo i membri della (41) per $\operatorname{sen} \frac{n\pi}{2\omega} \mathfrak{v}\, d\mathfrak{v}$, essendo n un intero dispari qualsiasi, ed integriamo ambo i membri fra $-\omega$ ed ω; avremo

$$\int_{-\omega}^{\omega} \mathfrak{z}_0 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2\omega}\mathfrak{v}\right) d\mathfrak{v} = \sum_m \alpha_m [q^{-\frac{m}{2}} - q^{\frac{m}{2}}] \int_{-\omega}^{\omega} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{2\omega}\mathfrak{v}\right) . \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2\omega}\mathfrak{v}\right) d\mathfrak{v};$$

ovvero, ponendo

$$\frac{\pi \mathfrak{v}}{2\omega} = \mathfrak{v}_1,$$

si avrà

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathfrak{z}_0 \operatorname{sen}(n\mathfrak{v}_1) d\mathfrak{v}_1 = \sum_m \alpha_m [q^{-\frac{m}{2}} - q^{\frac{m}{2}}] \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(m\mathfrak{v}_1) . \operatorname{sen}(n\mathfrak{v}_1) . d\mathfrak{v}_1 .$$

Se si osserva che

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(m\mathfrak{v}_1) . \operatorname{sen}(n\mathfrak{v}_1) d\mathfrak{v}_1 = \begin{cases} o & \text{per} \quad m \neq n, \\ \frac{\pi}{2} & \text{per} \quad m = n, \end{cases}$$

potremo scrivere

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathfrak{z}_0 \operatorname{sen}(n\mathfrak{v}_1) d\mathfrak{v}_1 = \alpha_n (q^{-\frac{n}{2}} - q^{\frac{n}{2}}).$$

Se ora introduciamo l'ipotesi che per $-\omega \leqq \mathfrak{v} < o$, e quindi per $-\frac{\pi}{2} \leqq \mathfrak{v}_1 < o$, sia $\mathfrak{z}_0 = -\alpha$ e per $o < \mathfrak{v} \leqq \omega$, e quindi per $o < \mathfrak{v}_1 \leqq \frac{\pi}{2}$, sia $\mathfrak{z}_0 = \alpha$, dalla precedente si ricava la relazione seguente

$$\frac{\pi}{2} \alpha_n (q^{-\frac{n}{2}} - q^{\frac{n}{2}}) = -\alpha \int_{-\frac{\pi}{2}}^{o} \operatorname{sen}(n\mathfrak{v}_1) d\mathfrak{v}_1 + \alpha \int_{o}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(n\mathfrak{v}_1) d\mathfrak{v}_1$$
$$= \frac{2\alpha}{n}.$$

Da questa si ricavano per le α_m le espressioni

$$\alpha_m = \frac{4\alpha}{m\pi(q^{-\frac{m}{2}} - q^{\frac{m}{2}})} = \frac{4\alpha}{\pi} \frac{\sqrt{q^m}}{m(1 - q^m)} .$$

Portando queste espressioni nella (39), abbiamo

$$t_0 = \frac{8\alpha i}{\pi} \sum_m \frac{\sqrt{q^m}}{m(1 - q^m)} \cos \frac{m\pi}{2\omega} \mathfrak{u}. \tag{39'}$$

Questa funzione t_0 godrà senz'altro di tutti i requisiti voluti, quando si possa a posteriori accertare che la serie del secondo membro è convergente.

A tal uopo, derivando la (39'), otterremo

$$\frac{d t_0}{d \mathfrak{u}} = - \frac{4\alpha i}{\omega} \sum_m \frac{\sqrt{q^m}}{1 - q^m} \operatorname{sen} \frac{m \pi}{2 \omega} \mathfrak{u};$$

introducendo le funzioni σ di WEIERSTRASS, le cui radici e_1, e_2, e_3 sono quelle stesse che definiscono la $\wp \mathfrak{u}$ del § 7, e tenendo presenti le (27), avremo

$$4 \sum_m \frac{\sqrt{q^m}}{1 - q^m} \operatorname{sen} \frac{m \pi}{2 \omega} \mathfrak{u} = \frac{2 a \omega}{\pi} \cdot \frac{\sigma \mathfrak{u}}{\sigma_3 \mathfrak{u}} \quad ^{18)}.$$

Per questa la precedente diviene

$$\frac{d t_0}{d \mathfrak{u}} = - \frac{2 a \alpha i}{\pi} \cdot \frac{\sigma \mathfrak{u}}{\sigma_3 \mathfrak{u}};$$

se si osserva infine che, come risulta dalla (39), per $\mathfrak{u} = \omega$ è $t_0 = 0$, avremo integrando

(39'') $$t_0 = \frac{2 a \alpha i}{\pi} \int_{\mathfrak{u}}^{\omega} \frac{\sigma \mathfrak{u}}{\sigma_3 \mathfrak{u}} d \mathfrak{u}.$$

§ 13.

Elementi del moto espressi mediante la $\mathfrak{u}$ e la $t(\mathfrak{u})$.

Posizione e velocità corrispondenti ad un generico punto $\mathfrak{u}$ del rettangolo R. — La (12)

$$\frac{d f}{d z} = w,$$

per la (21)

$$w = e^{-it},$$

dà la relazione

(42) $$d z = e^{it} d f,$$

la quale, come ora vedremo, serve a definire il punto del piano z corrispondente ad un generico punto $\mathfrak{u}$ del rettangolo R.

Dalle (22) e (25), tenuto conto della (24), si ricava

(43) $$d f = \frac{\wp' \mathfrak{u} \, d \mathfrak{u}}{e_1 - \wp \mathfrak{u}} = - d \log [e_1 - \wp \mathfrak{u}].$$

Ricordando che al punto $z = 0$ del piano del moto, corrisponde in R il punto $\mathfrak{u} = i \omega'$, sarà il punto z, corrispondente ad un generico $\mathfrak{u}$ di R, definito dall'integrale

(44) $$z = \int_{i\omega'}^{\mathfrak{u}} e^{it} d f,$$

dove il $d f$ è dato dalla (43) e l'integrale s'intende preso lungo un cammino qualsiasi che dal punto $i \omega'$, senza uscire da R, vada fino al generico punto $\mathfrak{u}$.

---

[18]) Loco citato [14]), pag. 431.

In quanto alla velocità, essa è già espressa esplicitamente in funzione di t dalla (21)

$$w = e^{-it}.$$

Rappresentazione delle pareti rigide ϖ_1 e ϖ'_1. — Quando l'affissa $\mathfrak{u}$ descrive il lato $(-\omega + i\omega', \omega + i\omega')$ di R la z descrive nel suo piano le pareti rigide ϖ_1 e ϖ'_1; e precisamente quando $\mathfrak{u}$ va da $i\omega'$ fino a $-\omega + i\omega'$ la z descrive la parete rigida ϖ_1 da z' fino a P_1, quando $\mathfrak{u}$ va da $i\omega'$ fino a $\omega + i\omega'$ la z descrive la parete rigida ϖ'_1 da z' fino a P'_1.

Sia z un generico punto di ϖ_1, per la (44) avremo

$$z = \int_{i\omega'}^{\mathfrak{u}} e^{it}\, df,$$

dove $\mathfrak{u}$ è un punto del segmento $(i\omega', -\omega + i\omega')$.

Ponendo

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{v} + i\omega', \qquad (-\omega \leqq \mathfrak{v} \leqq 0),$$

dalla (43) si ha

$$(43') \qquad df = \frac{\wp'(\mathfrak{v} + i\omega')\, d\mathfrak{v}}{e_1 - \wp(\mathfrak{v} + i\omega')} = -\, d \log [e_1 - \wp(\mathfrak{v} + i\omega')],$$

e quindi

$$z = \int_0^{\mathfrak{v}} e^{it} \frac{\wp'(\mathfrak{v} + i\omega')}{e_1 - \wp(\mathfrak{v} + i\omega')} d\mathfrak{v} \qquad (-\omega \leqq \mathfrak{v} \leqq 0).$$

Separando in questa espressione la parte reale dall'immaginaria avremo l'espressione parametrica delle coordinate x, y dei punti di ϖ_1.

Osserviamo intanto che l'espressione differenziale corrispondente al df è reale, essendo $\wp(\mathfrak{v} + i\omega')$ reale e $< e_1$.

Ciò posto, facciamo $z = x + iy$ e $t = \vartheta + i\tau$; avremo

$$(45) \qquad \begin{cases} x = \displaystyle\int_0^{\mathfrak{v}} e^{-\tau} \frac{\wp'(\mathfrak{v} + i\omega')}{e_1 - \wp(\mathfrak{v} + i\omega')} \cos \vartheta\, d\mathfrak{v}, \\ y = \displaystyle\int_0^{\mathfrak{v}} e^{-\tau} \frac{\wp'(\mathfrak{v} + i\omega')}{e_1 - \wp(\mathfrak{v} + i\omega')} \operatorname{sen} \vartheta\, d\mathfrak{v}. \end{cases}$$

Dall'espressione

$$|dz| = |\sqrt{dx^2 + dy^2}|$$

del valore assoluto dell'elemento lineare del piano z, si deduce, per le (12) e (21),

$$(46) \qquad |dz| = \frac{|df|}{|w|} = e^{-\tau}\, |df|.$$

Possiamo usufruire di questa formola per determinare l'elemento $d\varpi_1$ della parete rigida ϖ_1 in funzione di $\mathfrak{u}$.

Per la (43') si ha

$$d\varpi_1 = e^{-\tau} \frac{\wp'(\mathfrak{v} + i\omega')}{e_1 - \wp(\mathfrak{v} + i\omega')} d\mathfrak{v} \qquad (-\omega \leqq \mathfrak{v} \leqq 0).$$

Da questa, chiamando ϖ_1 la lunghezza di arco compresa tra o e un generico punto,

avremo

$$(47) \qquad \varpi_1 = \int_0^{\mathfrak{v}} e^{-\tau} \frac{\wp'(\mathfrak{v}+i\omega')}{e_1 - \wp(\mathfrak{v}+i\omega')} d\mathfrak{v} \qquad (-\omega \leqq \mathfrak{v} \leqq 0).$$

Quanto abbiamo trovato riguardo alla parete rigida ϖ_1 si può applicare manifestamente alla sua simmetrica ϖ'_1 mediante il cambio di $\mathfrak{v}$ in $-\mathfrak{v}$.

Rappresentazione delle linee libere λ_1 *e* λ'_1. — Quando u descrive i lati $(-\omega, -\omega+i\omega')$ e $(\omega, \omega+i\omega')$ di R, la z si muove rispettivamente sulle linee libere λ_1 e λ'_1.

Se z è un generico punto di λ_1, notando che al punto P_1 del piano z corrisponde il punto $u = -\omega + i\omega'$ di R, si ha dalla (42), integrando e chiamando z_1 l'affissa del punto P_1,

$$z - z_1 = \int_{-\omega+i\omega'}^{u} e^{it} df,$$

essendo il df dato sempre dalla (43).

Ponendo in questa

$$u = -\omega + i\mathfrak{w} \qquad (0 \leqq \mathfrak{w} \leqq \omega'),$$

avremo dalla (43)

$$(43'') \qquad df = i\frac{\wp'(-\omega+i\mathfrak{w})d\mathfrak{w}}{e_1 - \wp(-\omega+i\mathfrak{w})} = -d\log[e_1 - \wp(-\omega+i\mathfrak{w})],$$

e quindi

$$z - z_1 = i\int_{\omega'}^{\mathfrak{w}} e^{it}\frac{\wp'(-\omega+i\mathfrak{w})}{e_1 - \wp(-\omega+i\mathfrak{w})}d\mathfrak{w} \qquad (0 \leqq \mathfrak{w} \leqq \omega').$$

Come si vede la funzione integranda diviene infinita (di primo ordine) per $\mathfrak{w} = 0$.

Avremo l'espressione parametrica delle coordinate x, y dei punti di λ_1, separando nella precedente la parte reale dall'immaginaria. — Se si nota anche qui che l'espressione (43'') del df è reale, essendo $\wp(-\omega+i\mathfrak{w})$ reale e $\leqq e_1$, avremo, ponendo $z = x+iy$, $z_1 = x_1 + iy_1$ e $t = \vartheta + i\tau$:

$$(48) \qquad \begin{cases} x - x_1 = -\displaystyle\int_{\omega'}^{\mathfrak{w}} e^{-\tau}\frac{\wp'(-\omega+i\mathfrak{w})}{e_1 - \wp(-\omega+i\mathfrak{w})} \operatorname{sen}\vartheta\, d\mathfrak{w}, \\ y - y_1 = \displaystyle\int_{\omega'}^{\mathfrak{w}} e^{-\tau}\frac{\wp'(-\omega+i\mathfrak{w})}{e_1 - \wp(-\omega+i\mathfrak{w})} \cos\vartheta\, d\mathfrak{w}. \end{cases}$$

Dalla (46) si ricava per l'elemento d'arco $d\lambda_1$ l'espressione

$$|d\lambda_1| = e^{-\tau}|df|,$$

ovvero, per la prima delle (35) e per la (17),

$$d\lambda_1 = |df|.$$

Quando la z percorre λ_1 da P_1 in poi la f cresce per valori reali da f_1 fino a $+\infty$ (§ 5), avremo quindi

$$d\lambda_1 = df.$$

Integrando si avrà la lunghezza λ_1 dell'arco di linea libera da P_1 fino ad un generico punto P corrispondente al valore f:

$$\lambda_1 = f - f_1,$$

ovvero, essendo per le (22) e (25),

$$f = -\log \frac{e_1 - \wp u}{a^2},$$

e per la (24)

$$-f_1 = \log \frac{a^2 - 1}{a^2},$$

avremo in definitiva

$$\lambda_1 = \log \frac{a^2 - 1}{e_1 - \wp u}. \tag{49}$$

Osserviamo che l'espressione sotto il segno log è essenzialmente positiva, essendo (§ 7) $a > 1$ ed essendo su λ_1, $e_1 \geq \wp u$. Quindi il secondo membro della (49) è reale, come del resto era prevedibile a priori pel significato del primo membro.

Sull'altra linea libera λ_2 abbiamo il comportamento che risulta per simmetria rispetto all'asse reale.

§ 14.

Resistenza del profilo. — Coefficiente di contrazione. Loro espressione mediante la u e la $t(u)$.

L'azione complessiva esercitata dalla massa liquida sopra il solido immerso è caratterizzata, com'è noto (vedi anche § 1), dalla risultante $\boldsymbol{R}$ e dal momento risultante $\boldsymbol{M}$ delle pressioni subite dai singoli elementi $d\gamma$ del contorno γ.

Nel nostro caso, trattandosi di un sistema piano, basterà considerare le due componenti R_x, R_y della risultante ed il momento M normale al piano (x, y).

Chiamando n la normale in un generico punto di γ, volta verso l'interno di C (vedi Fig. 3), avremo

$$R_x = \int_\gamma p \cos(n x)\, d\gamma, \qquad (p = \text{pressione specifica})$$

$$R_y = \int_\gamma p \cos(n y)\, d\gamma,$$

$$M = \int_\gamma p\,[x \cos(n y) - y \cos(n x)]\, d\gamma.$$

R_x misura la resistenza *diretta*, R_y ed M le *azioni deviatrici*.

È manifestamente $R_y = M = 0$ se (come si ammette) tutto il profilo rigido γ è simmetrico rispetto all'asse x.

Ci rimane da considerare la resistenza diretta R_x che chiameremo senz'altro R.

Richiamiamo la relazione (18)

$$p = p_0 + \tfrac{1}{2}(1 - V^2),$$

che definisce la pressione in ogni punto di A, mentre in $B - C$ (§ 4) la pressione ha il valore costante p_0.

Sostituendo in R_x, e notando che il contorno γ di C confina con A lungo la parete $\varpi_1 + \varpi'_1$ e con $B - C$ nella parete rimanente, avremo scrivendo R al posto di R_x,

$$R = p_0 \int_\gamma \cos(nx)\, d\gamma + \frac{1}{2} \int_{\varpi_1+\varpi'_1} (1 - V^2) \cos(nx)\, d\varpi;$$

se si nota che

$$\int_\gamma \cos(nx)\, d\gamma = 0,$$

e si tiene conto della simmetria delle due pareti rigide ϖ_1 e ϖ'_1 rispetto all'asse delle x, avremo in definitiva

$$R = \int_{\varpi_1} (1 - V^2) \cos(nx)\, d\varpi_1. \tag{50}$$

Abbiamo già chiamato 2Ω e V_∞ (§ 4) la larghezza del canale e la velocità del liquido all'infinito a monte di C. Chiamiamo Δ_1 la larghezza all'∞ di ciascuna delle due vene in cui si scinde la corrente dopo il suo incontro col profilo rigido C.

Pel modo con cui si sono fissate le unità di misura è (cfr. § 4) $\Delta_1 = \pi$.

Poniamo

$$\Delta = \overline{P_1 P_2}$$

(vedi Fig. 3).

Il coefficiente di contrazione di ciascuna delle due vene è $\frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\pi}{\Delta}$.

Esso sarà noto quando si conosca il Δ.

Per calcolare il Δ prendiamo le mosse da una immediata conseguenza del lemma di Green [19]. « Se $\varphi(x, y)$ è una funzione uniforme, armonica e regolare in un campo limitato da una linea chiusa s (o più generalmente da un sistema di linee chiuse) e si pone

$$V^2 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2,$$

si ha

$$\int_s \frac{\partial \varphi}{\partial n} \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, ds = \frac{1}{2} \int_s V^2 \alpha\, ds, \tag{51}$$

designando n la normale in un generico punto di s, volta verso l'interno del campo, ed α il coseno dell'angolo che n forma colla direzione positiva dell'asse x ».

Applichiamo la (51) al campo limitato dalla linea (vedi Fig. 3)

$$s = \lambda_1 + \varpi_1 + \nu + \Omega + \mu + \Delta_1,$$

avendo chiamato ν il semiasse negativo delle x.

Se φ rappresenta il potenziale di velocità in A e quindi V il valore assoluto della

[19]) Cfr. Levi-Civita, *Sulla contrazione delle vene liquide* [Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, t. LXIV (1905), pp. 1466-1467].

velocità di una generica particella liquida, ricordiamo (§ 4) che

$$\text{sopra } \mu \text{ e sopra } \nu + \varpi_1 + \lambda_1 \text{ è } \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0,$$

$$\text{sopra } \Omega \text{ è } \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = V_\infty,$$

$$\text{sopra } \Delta_1 \text{ è } \frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -1.$$

Il primo membro della (51) diviene per queste

$$\int_s \frac{\partial \varphi}{\partial n}\frac{\partial \varphi}{\partial x} ds = \int_{\Omega+\Delta_1} \frac{\partial \varphi}{\partial n}\frac{\partial \varphi}{\partial x} ds = \Omega V_\infty^2 - \Delta_1,$$

ed essendo [§ 4, formole (16) e (14')]

$$V_\infty = \frac{\pi}{\Omega}, \qquad \Delta_1 = \pi,$$

avremo

$$\int_s \frac{\partial \varphi}{\partial n}\frac{\partial \varphi}{\partial x} ds = \frac{\pi}{\Omega}(\pi - \Omega). \tag{52}$$

Occupiamoci ora del secondo menbro della (51).

A tal uopo rammentiamo (§ 4) che

$$\text{sopra } \lambda_1 \text{ è } V = 1,$$

ed osserviamo che

$$\text{sopra } \nu \text{ e } \mu \text{ è } \alpha = 0,$$

$$\text{sopra } \Omega \text{ è } \alpha = 1;$$

avremo perciò

$$\int_s V^2 \alpha\, ds = \int_{\Delta_1+\lambda_1} \alpha\, ds + V_\infty^2 \Omega + \int_{\varpi_1} V^2 \alpha\, d\varpi_1;$$

se si pone $\frac{\pi}{\Omega}$ al posto di V_∞ e si nota che

$$\int_{\Delta_1+\lambda_1+\Delta+\mu} \alpha\, ds = 0,$$

da cui osservando che su Δ è $\alpha = 1$

$$\int_{\Delta_1+\lambda_1} \alpha\, ds = -\Delta,$$

avremo in definitiva

$$\int_s V^2 \alpha\, ds = \frac{\pi^2}{\Omega} - \Delta + \int_{\varpi_1} V^2 \alpha\, d\varpi_1.$$

Per questa e la (52), la (51) porge

$$\Delta = \frac{\pi}{\Omega}(2\Omega - \pi) + \int_{\varpi_1} V^2 \alpha\, d\varpi_1. \tag{53}$$

Il coefficiente di contrazione di ciascuna delle due vene sarà pertanto definito dalla

relazione

$$(54) \qquad \frac{\pi}{\Delta} = \frac{\pi\,\Omega}{\pi(2\,\Omega - \pi) + \Omega \int_{\varpi_1} V^2 \alpha\, d\varpi_1}.$$

Come si vede il coefficiente di contrazione dipende dalla larghezza del canale e dallo stato di moto delle molecole liquide sulla parete rigida ϖ_1.

Ci proponiamo ora di ricavare una notevole formola che definisce la resistenza R in funzione assai semplice della larghezza del canale e della larghezza assintotica della *scia.*

Prendiamo le mosse, a tal uopo, dalla (50), notando che su ϖ_1 è $\cos(n\,x) = -\alpha$; avremo

$$R = -\int_{\varpi_1} (1 - V^2)\alpha\, d\varpi_1 = \int_{\varpi_1} V^2 \alpha\, d\varpi_1 - \int_{\varpi_1} \alpha\, d\varpi_1.$$

Notando che

$$-\int_{\varpi_1} \alpha\, d\varpi_1 = \int_{\nu+\Omega+\mu+\Delta} \alpha\, ds = \Omega - \Delta,$$

potremo scrivere

$$(50') \qquad R = \Omega - \Delta + \int_{\varpi_1} V^2 \alpha\, d\varpi_1.$$

Ora dalla (53) si ricava

$$-\Delta + \int_{\varpi_1} V^2 \alpha\, d\varpi_1 = \frac{\pi}{\Omega}(\pi - 2\,\Omega),$$

avremo perciò sostituendo

$$R = \Omega + \frac{\pi}{\Omega}(\pi - 2\,\Omega)$$

$$= \frac{(\Omega - \pi)^2}{\Omega}.$$

Chiamando $2\,H$ la larghezza assintotica della *scia,* cioè ponendo

$$H = \Omega - \pi,$$

la precedente assume in definitiva la forma semplicissima

$$(55) \qquad R = \frac{H^2}{\Omega}.$$

Possiamo cioè dire che *la resistenza del profilo rigido è misurata dal rapporto tra il quadrato della semilarghezza assintotica della scia e la semilarghezza del canale.*

Dalle (50'), (53), (54) si deduce che la conoscenza della resistenza R e del coefficiente di contrazione dipende dalla valutazione dell'integrale

$$I = \int_{\varpi_1} V^2 \alpha\, d\varpi_1.$$

Riportiamoci al piano complesso $\mathfrak{u} = \mathfrak{v} + i\mathfrak{w}$. Abbiamo già visto (§ 13) che l'elemento $d\varpi_1$ di parete rigida ϖ_1 è definito dalla relazione

$$d\varpi_1 = e^{-\tau} \frac{p'(\mathfrak{v} + i\omega')}{e_1 - p(\mathfrak{v} + i\omega')} d\mathfrak{v} \qquad (-\omega \leqq \mathfrak{v} \leqq 0);$$

richiamiamo ancora la prima delle (35)

$$V = e^{\tau}.$$

Perciò avremo

$$(56) \qquad I = \int_0^{-\omega} e^{\tau} \frac{p'(\mathfrak{v} + i\omega')}{e_1 - p(\mathfrak{v} + i\omega')} \alpha \, d\mathfrak{v}.$$

Portando questa espressione nelle (53), (50') e (54) si ottiene la resistenza ed il coefficiente di contrazione espressi mediante la $\mathfrak{u}$ e la τ.

§ 15.

Casi particolari notevoli: problemi di Réthy-Bobyleff e di Helmholtz nel canale.

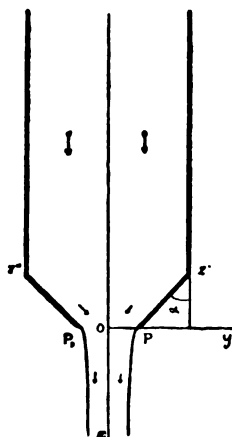
Vogliamo approfondire ora qualche caso particolare notevole di profili poligonali.

Sarà più conveniente, a tal uopo, riferirci ai criterî esposti nei §§ 2 e 3.

Abbiamo già visto come la (7) costituisca l'integrale corrispondente a un profilo rigido poligonale simmetrico qualsiasi.

Facciamo in essa $m = 1$, $\mathfrak{z} = -\alpha$; avremo

$$(57) \qquad \omega(\zeta) = \frac{i\alpha}{\pi} \log \frac{(j' - \zeta)(1 + j'\zeta)}{(j' + \zeta)(1 - j'\zeta)}.$$

Per quanto si è detto al § 3, nel caso attuale le pareti rigide procedono parallele alla direzione della vena (direzione positiva delle ascisse) partendo dall'infinito a monte dell'orifizio, fino a due punti χ' e χ'' in cui deviano di un angolo α verso l'interno del canale, come mostra la Fig. 10.

(Fig. 10).

Sappiamo già che l'apertura della vena all'infinito è π [20]), determiniamo ora l'apertura 2Ω del canale.

[20]) Cfr. CISOTTI, loco citato [5]), § 3.

Notiamo che al punto $\zeta = i$ corrisponde il punto all'infinito del piano z a cui tendono le pareti rigide a monte dell'orifizio.

Avremo perciò, chiamando V_∞ la velocità delle molecole liquide all'∞, a monte e ricordando il significato della parte immaginaria di ω (§ 3):

$$i \log V_\infty = \omega(i).$$

Ora dalla (57), posto

(58)
$$j' = e^{i\sigma'},$$

e facendo $\zeta = i$, si ricava

$$\omega(i) = \frac{i\alpha}{\pi} \log \frac{(e^{i\sigma'} - i)(1 + i e^{i\sigma'})}{(e^{i\sigma'} + i)(1 - i e^{i\sigma'})}$$
$$= \frac{i\alpha}{\pi} \log \frac{\cos^2 \sigma' + (1 - \operatorname{sen} \sigma')^2}{\cos^2 \sigma' + (1 + \operatorname{sen} \sigma')^2}$$
$$= \frac{i\alpha}{\pi} \log \frac{1 - \operatorname{sen} \sigma'}{1 + \operatorname{sen} \sigma'}.$$

Avremo dunque

(59)
$$V_\infty = \left(\frac{1 - \operatorname{sen} \sigma'}{1 + \operatorname{sen} \sigma'}\right)^{\frac{\alpha}{\pi}}.$$

Se si nota infine che π è la portata della vena all'∞ e che quindi, pel carattere stazionario del moto liquido, è

$$2\Omega . V_\infty = \pi,$$

si ricava per la larghezza del canale l'espressione

(60)
$$2\Omega = \pi \left(\frac{1 + \operatorname{sen} \sigma'}{1 - \operatorname{sen} \sigma'}\right)^{\frac{\alpha}{\pi}}.$$

Poniamo

$$\zeta = \rho e^{i\sigma},$$

ed osserviamo che sulla semicirconferenza $(1, i, -1)$ essendo $\rho = 1$ si ha

$$\zeta = e^{i\sigma} \qquad (0 \leqq \sigma \leqq \pi).$$

Avremo perciò, tenendo conto della (58)

$$\frac{(j' - \zeta)(1 + j'\zeta)}{(j' + \zeta)(1 - j'\zeta)} = \frac{(e^{i\sigma'} - e^{i\sigma})(1 + e^{i(\sigma+\sigma')})}{(e^{i\sigma'} + e^{i\sigma})(1 - e^{i(\sigma+\sigma')})}$$
$$= \frac{\operatorname{sen} \frac{\sigma - \sigma'}{2} . \cos \frac{\sigma' + \sigma}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\sigma + \sigma'}{2} . \cos \frac{\sigma' - \sigma}{2}}$$
$$= - \frac{\operatorname{tg} \frac{\sigma' - \sigma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\sigma' + \sigma}{2}};$$

da questa si deduce che il primo membro della precedente è

negativo se $0 \leqq \sigma < \sigma'$ oppure $\pi - \sigma' \leqq \sigma < \pi$;

positivo se $\sigma' < \sigma < \pi - \sigma'$.

Avremo perciò dalla (57), ricordando la posizione (6) $\omega = \vartheta + i\tau$:

per $0 < \sigma < \sigma'$

$$\vartheta = -\alpha, \qquad \tau = \frac{\alpha}{\pi} \log \frac{\operatorname{tg} \frac{\sigma' - \sigma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\sigma' + \sigma}{2}};$$

per $\sigma' < \sigma < \pi - \sigma'$

$$\vartheta = 0, \qquad \tau = \frac{\alpha}{\pi} \log \frac{\operatorname{tg} \frac{\sigma - \sigma'}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\sigma + \sigma'}{2}};$$

per $\pi - \sigma' < \sigma < \pi$

$$\vartheta = \alpha, \qquad \tau = \frac{\alpha}{\pi} \log \frac{\operatorname{tg} \frac{\sigma' - \sigma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\sigma' + \sigma}{2}};$$

in ogni caso è

$$\tau = \frac{\alpha}{\pi} \log \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{\sigma' - \sigma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\sigma' + \sigma}{2}} \right|,$$

e quindi

$$(61) \qquad e^{\tau} = \left(\left| \frac{\operatorname{tg} \frac{\sigma' - \sigma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\sigma' + \sigma}{2}} \right| \right)^{\frac{\alpha}{\pi}}$$

sopra tutta la semicirconferenza $(1, i, -1)$.

Ciò posto, valutiamo l'apertura 2Δ dell'orifizio.

Essa è data dalla formula

$$2\Delta = \pi(2 - V_\infty) - 2 \operatorname{sen} \alpha \int_0^{\sigma'} e^{\tau} \operatorname{tg} \sigma \, d\sigma \quad [21]),$$

dove per la (61), e^{τ} ha per espressione

$$e^{\tau} = \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\sigma' - \sigma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\sigma' + \sigma}{2}} \right)^{\frac{\alpha}{\pi}} = \left(\frac{\operatorname{sen} \sigma' - \operatorname{sen} \sigma}{\operatorname{sen} \sigma' + \operatorname{sen} \sigma} \right)^{\frac{\alpha}{\pi}}.$$

---

[21]) Cfr. CISOTTI, loco citato [5]), § 9 e formola (31'') in cui si faccia, per la simmetria, $\nu = \mu = 1$, $\sigma_0 = \frac{\pi}{2}$, si ponga $\Omega = 2\Delta$, e si noti che per $0 < \sigma < \sigma'$ α si cambia in $-\operatorname{sen} \alpha$, e per $\sigma' < \sigma < \frac{\pi}{2}$ è $\alpha = 0$.

Avremo quindi sostituendo

$$(62)\qquad 2\Delta = \pi(2 - V_\infty) - 2\,\mathrm{sen}\,\alpha \int_0^{\sigma'} \left(\frac{\mathrm{sen}\,\sigma' - \mathrm{sen}\,\sigma}{\mathrm{sen}\,\sigma' + \mathrm{sen}\,\sigma}\right)^{\frac{\alpha}{\pi}} \mathrm{tg}\,\sigma\, d\sigma.$$

Occupiamoci del calcolo dell'integrale

$$I = \int_0^{\sigma'} \left(\frac{\mathrm{sen}\,\sigma' - \mathrm{sen}\,\sigma}{\mathrm{sen}\,\sigma' + \mathrm{sen}\,\sigma}\right)^{\frac{\alpha}{\pi}} \mathrm{tg}\,\sigma\, d\sigma.$$

Assumiamo come variabile di integrazione la t definita dalla posizione

$$t = \frac{\mathrm{sen}\,\sigma' - \mathrm{sen}\,\sigma}{\mathrm{sen}\,\sigma' + \mathrm{sen}\,\sigma}.$$

Essendo allora

$$\mathrm{sen}\,\sigma = \frac{1-t}{1+t}\,\mathrm{sen}\,\sigma',$$

$$d(\mathrm{sen}\,\sigma) = \cos\sigma\, d\sigma = -2\,\mathrm{sen}\,\sigma' \frac{dt}{(1+t)^2},$$

risulta tosto

$$I = 2\,\mathrm{sen}^2\sigma' \int_0^1 t^{\frac{\alpha}{\pi}} \frac{1-t}{[(1+t)^2 - (1-t)^2\,\mathrm{sen}^2\sigma'].[1+t]}\, dt.$$

Ora, tenendo anche presente la (59), abbiamo

$$(1+t)^2 - (1-t)^2\,\mathrm{sen}^2\sigma' = (1+\mathrm{sen}\,\sigma')^2 \left(\frac{1-\mathrm{sen}\,\sigma'}{1+\mathrm{sen}\,\sigma'} + t\right)\left(1 + \frac{1-\mathrm{sen}\,\sigma'}{1+\mathrm{sen}\,\sigma'}\,t\right)$$

$$= \frac{4\,\mathrm{sen}^2\sigma'}{(1 - V_\infty^{\frac{\pi}{\alpha}})^2}(V_\infty^{\frac{\pi}{\alpha}} + t)(1 + V_\infty^{\frac{\pi}{\alpha}}\,t);$$

quindi sostituendo, avremo

$$I = \frac{1}{2}(1 - V_\infty^{\frac{\pi}{\alpha}})^2 \int_0^1 t^{\frac{\alpha}{\pi}} \frac{1-t}{(V_\infty^{\frac{\pi}{\alpha}} + t)(1 + V_\infty^{\frac{\pi}{\alpha}}\,t)(1+t)}\, dt.$$

Se si osserva infine che

$$\frac{1-t}{(V_\infty^{\frac{\pi}{\alpha}} + t)(1 + V_\infty^{\frac{\pi}{\alpha}}\,t)(1+t)} = \frac{1}{(1 - V_\infty^{\frac{\pi}{\alpha}})^2}\left[\frac{V_\infty^{-\frac{\pi}{\alpha}}}{1 + V_\infty^{-\frac{\pi}{\alpha}}\,t} + \frac{V_\infty^{\frac{\pi}{\alpha}}}{1 + V_\infty^{\frac{\pi}{\alpha}}\,t} - \frac{2}{1+t}\right],$$

avremo in definitiva

$$(63)\qquad I = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{\alpha}{\pi}} \left[\frac{V_\infty^{-\frac{\pi}{\alpha}}}{1 + V_\infty^{-\frac{\pi}{\alpha}}\,t} + \frac{V_\infty^{\frac{\pi}{\alpha}}}{1 + V_\infty^{\frac{\pi}{\alpha}}\,t} - \frac{2}{1+t}\right] dt.$$

Questo integrale si esprime assai semplicemente per mezzo della funzione f definita dalla relazione

$$(64)\qquad f(x) = \int_0^1 \frac{\omega\, t^{x-1}}{\omega t - 1} = \sum_0^\infty{}_s \frac{s!}{x(x+1)\ldots(x+s)}\left(\frac{\omega}{\omega - 1}\right)^{s+1} \text{[22]},$$

in cui ω designa una costante qualsiasi.

---

[22]) Cfr. Nielsen, *Handbuch der Theorie der Gammafunktion* (Leipzig, Teubner, 1906), pp. 264-265.

Infatti, chiamando $\beta(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ le funzioni corrispondenti rispettivamente ai valori -1, $-V_\infty^{-\frac{\pi}{\alpha}}$, $-V_\infty^{\frac{\pi}{\alpha}}$ di ω, cioè ponendo

$$(64')\quad \begin{cases} \beta(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{t+1} dt = \sum_0^\infty{}_s \frac{s!}{x(x+1)\ldots(x+s)} \frac{1}{2^{s+1}}, \\ f_1(x) = \int_0^1 \frac{V_\infty^{-\frac{\pi}{\alpha}} t^{x-1}}{1 + V_\infty^{-\frac{\pi}{\alpha}} t} dt = \sum_0^\infty{}_s \frac{s!}{x(x+1)\ldots(x+s)} \frac{1}{(1+V_\infty^{\frac{\pi}{\alpha}})^{s+1}}, \\ f_2(x) = \int_0^1 \frac{V_\infty^{\frac{\pi}{\alpha}} t^{x-1}}{1 + V_\infty^{\frac{\pi}{\alpha}} t} dt = \sum_0^\infty{}_s \frac{s!}{x(x+1)\ldots(x+s)} \frac{1}{(1+V_\infty^{-\frac{\pi}{\alpha}})^{s+1}}, \end{cases}$$

l'integrale I diviene

$$(63')\qquad I = \frac{1}{2}\left\{f_1\left(1+\frac{\alpha}{\pi}\right) + f_2\left(1+\frac{\alpha}{\pi}\right)\right\} - \beta\left(1+\frac{\alpha}{\pi}\right).$$

Sostituendo nella (62) avremo per l'apertura dell'orifizio l'espressione

$$2\Delta = \pi(2 - V_\infty) - \operatorname{sen}\alpha\left[f_1\left(1+\frac{\alpha}{\pi}\right) + f_2\left(1+\frac{\alpha}{\pi}\right) - 2\beta\left(1+\frac{\alpha}{\pi}\right)\right].$$

Ponendo in questa, e immaginando posto nelle (64')

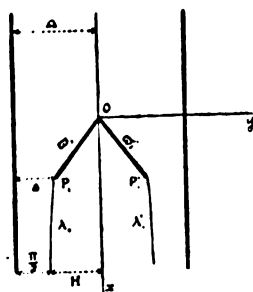
$$V_\infty = \frac{\pi}{2\Omega},$$

si otterrà 2Δ in funzione della larghezza del canale nel modo seguente

$$(62')\quad 2\Delta = \pi\left(2 - \frac{\pi}{2\Omega}\right) - \operatorname{sen}\alpha\left[f_1\left(1+\frac{\alpha}{\pi}\right) + f_2\left(1+\frac{\alpha}{\pi}\right) - 2\beta\left(1+\frac{\alpha}{\pi}\right)\right].$$

Il coefficiente di contrazione è

$$\frac{\pi}{2\Delta} = \frac{\pi}{\pi\left(2 - \frac{\pi}{2\Omega}\right) - \operatorname{sen}\alpha\left[f_1\left(1+\frac{\alpha}{\pi}\right) + f_2\left(1+\frac{\alpha}{\pi}\right) - 2\beta\left(1+\frac{\alpha}{\pi}\right)\right]}.$$

Passando dal problema della vena a quello del moto del profilo rigido nel canale a norma di quanto si è detto al § 2, vediamo che nel caso di cui ci occupiamo *il profilo consta di due segmenti eguali OP_1, OP'_1 ed egualmente inclinati di un angolo α rispetto alla direzione opposta a quella del moto del profilo* (Réthy-Bobyleff) (vedi Fig. 11).

(Fig. 11).

La lunghezza comune dei due segmenti OP_1, OP'_1 è manifestamente

$$\overline{OP}_1 = \overline{OP'_1} = \frac{\Omega - \Delta}{\operatorname{sen} \alpha}.$$

Riguardo alla larghezza asintotica della *scia* si ha

$$2H = 2\Omega - \pi,$$

da cui

$$H = \Omega - \frac{\pi}{2}.$$

Per la (55), la resistenza R, riportata all'unità di apertura del profilo, divisa cioè per

$$l = 2\,\overline{OP}_1 \operatorname{sen} \alpha = 2(\Omega - \Delta),$$

si presenta espressa nel modo seguente

$$\frac{R}{l} = \frac{\left(\Omega - \frac{\pi}{2}\right)^2}{2\Omega(\Omega - \Delta)}, \tag{65}$$

e per la (62')

$$\frac{R}{l} = \frac{\left(\Omega - \frac{\pi}{2}\right)^2}{\Omega\left[2\Omega - \pi\left(2 - \frac{\pi}{2\Omega}\right) + \operatorname{sen}\alpha\left\{f_1\left(1 + \frac{\alpha}{\pi}\right) + f_2\left(1 + \frac{\alpha}{\pi}\right) - 2\beta\left(1 + \frac{\alpha}{\pi}\right)\right\}\right]}; \tag{66}$$

formula notevole che ci dà la resistenza unitaria in funzione dell'angolo α e della larghezza 2Ω del canale.

Vediamo, in particolare, cosa accade quando si suppone che il canale sia infinitamente largo [23]). Il rapporto $\frac{2\Omega}{\pi}$ tra la semilarghezza Ω del canale e la larghezza $\frac{\pi}{2}$ di ciascuna delle due vene all'infinito tende manifestamente all'unità quando il canale si allarga indefinitamente.

Potremo allora ricavare l'espressione della resistenza unitaria, ponendo nella (66) $\Omega = \frac{\pi}{2}$. Tenendo presenti le (64'), facilmente si scorge che per $\Omega = \frac{\pi}{2}$ il secondo membro della (66) si presenta sotto la forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Applicando la regola dell'Hospital, mediante due derivazioni successive si perviene alla seguente espressione

$$\frac{R}{l} = \frac{2}{4 + 4\pi \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha^2}\{2\beta'_3 - \beta'_2\}},$$

avendo posto

$$\beta'_2 = \int_0^1 \frac{t^{\frac{\alpha}{\pi}}\,dt}{(1+t)^2}, \qquad \beta'_3 = \int_0^1 \frac{t^{\frac{\alpha}{\pi}}\,dt}{(1+t)^3}.$$

---

[23]) Veramente in tal caso i nostri risultati non sono senz'altro applicabili. Notiamo però che l'espressione (66) della resistenza unitaria vale per un canale grande quanto si vuole e quindi, passando al limite, per un canale infinitamente largo.

Facilmente si esprimono β'_2 e β'_3 mediante la funzione β (di STIRLING) definita dalla prima delle (64').

Infatti, ponendo

$$\beta_n(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}\,dt}{(1+t)^n} \qquad (x > 0 \text{ e } n \text{ intero positivo}),$$

si ha, per $n > 1$

$$\beta_n(x) = \beta_{n-1}(x) - \int_0^1 \frac{t^x\,dt}{(1+t)^n},$$

da cui integrando per parti, assumendo t^x per fattore finito e $\frac{dt}{(1+t)^n}$ per fattore differenziale si ha la formula ricorrente

$$\beta_n(x) = \frac{1}{(n-1)2^{n-1}} + \frac{n-1-x}{n-1}\beta_{n-1}(x).$$

Da questa formula facendo, in particolare, $n=2$ e $n=3$ e notando che $\beta_1(x)$ coincide con $\beta(x)$ si ricavano le due seguenti

$$\beta_2(x) = \frac{1}{2} + (1-x)\cdot\beta(x),$$

$$\beta_3(x) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2}(2-x)\beta_2(x);$$

da queste si deduce

$$2\beta_3(x) - \beta_2(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(1-x) + (1-x)^2\beta(x).$$

Notiamo ora che $2\beta'_3 - \beta'_2$ si ricava dalla precedente ponendo in essa $x = 1 + \frac{\alpha}{\pi}$; avremo quindi

$$2\beta'_3 - \beta'_2 = \frac{1}{4} - \frac{\alpha}{2\pi} + \frac{\alpha^2}{\pi^2}\beta\left(1+\frac{\alpha}{\pi}\right).$$

Sostituendo nell'espressione della resistenza unitaria, avremo

$$\frac{R}{l} = \frac{2}{4 + \pi\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha^2}\left\{1 - \frac{2\alpha}{\pi} + \frac{4\alpha^2}{\pi^2}\beta\left(1+\frac{\alpha}{\pi}\right)\right\}}.$$

Questa formola è equivalente a quella già nota. Per trovare la stessa espressione notiamo che, in generale, la funzione β soddisfa alle seguenti relazioni

$$\beta(1+x) = \frac{1}{x} - \beta(x),$$

$$\beta(x) + \beta(1-x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi x} \text{ [24]}.$$

Da queste, eliminando la $\beta(x)$, si ottiene ulteriormente

$$\beta(1+x) = \beta(1-x) + \frac{1}{x} - \frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi x}.$$

---

[24]) Cfr. NIELSEN, loco citato [22]), pag. 16.

Ponendo in questa $x = \frac{\alpha}{\pi}$ si ha

$$\beta\left(1 + \frac{\alpha}{\pi}\right) = \beta\left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right) + \frac{\pi}{\alpha} - \frac{\pi}{\operatorname{sen}\alpha};$$

per cui l'espressione della resistenza unitaria diviene in definitiva

$$(66') \qquad \frac{R}{l} = \frac{2}{\pi} \frac{\alpha^2}{\operatorname{sen}\alpha\left\{1 + \frac{2\alpha}{\pi} + \frac{4\alpha^2}{\pi^2}\beta\left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right)\right\}},$$

la quale è l'espressione cercata [25]).

Per $\alpha = \frac{\pi}{2}$ *si ha il caso* (HELMHOLTZ) *di una lamina rettilinea, di larghezza*

$$l = 2(\Omega - \Delta),$$

normale alla direzione della traslazione.

L'espressione della resistenza unitaria si ricava dalla (66), ponendovi $\alpha = \frac{\pi}{2}$; si otterrà

$$\frac{R}{l} = \frac{\left(\Omega - \frac{\pi}{2}\right)^2}{\Omega\left\{2\Omega - \pi\left(2 - \frac{\pi}{2\Omega}\right) + f_1\left(\frac{3}{2}\right) + f_2\left(\frac{3}{2}\right) - 2\beta\left(\frac{3}{2}\right)\right\}},$$

ed essendo, per le (64'),

$$\beta\left(\frac{3}{2}\right) = \int_0^1 \frac{t^{\frac{1}{2}}\,dt}{t+1} = 2 - \frac{\pi}{2},$$

$$f_1\left(\frac{3}{2}\right) = \int_0^1 \frac{V_\infty^{-2}\, t^{\frac{1}{2}}}{1 + V_\infty^{-2}\, t}\,dt = 2\left(1 - V_\infty \,.\, \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{V_\infty}\right),$$

$$f_2\left(\frac{3}{2}\right) = \int_0^1 \frac{V_\infty^2\, t^{\frac{1}{2}}}{1 + V_\infty^2\, t}\,dt = 2\left(1 - \frac{1}{V_\infty} \,.\, \operatorname{arc\,tg} V_\infty\right),$$

ed osservando che

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{V_\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} V_\infty,$$

$$V_\infty = \frac{\pi}{2\Omega},$$

avremo

$$\frac{R}{l} = \frac{\left(\Omega - \frac{\pi}{2}\right)^2}{\Omega\left\{2\Omega - \pi - 2\left(\frac{2\Omega}{\pi} - \frac{\pi}{2\Omega}\right)\operatorname{arc\,tg}\frac{\pi}{2\Omega}\right\}};$$

---

[25]) Cfr. LEVI-CIVITA, loco citato [2]), pag. 30, ed anche LAMB, *Lehrbuch der Hydrodynamik* (traduzione tedesca) (Leipzig und Berlin, Teubner, 1907), pp. 119-120.

dividendo numeratore e denominatore del secondo membro per $\Omega - \frac{\pi}{2}$, avremo in definitiva

$$\frac{R}{l} = \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{\pi}{2\Omega}}{1 - \left(\frac{2}{\pi} + \frac{1}{\Omega}\right) \operatorname{arc\,tag} \frac{\pi}{2\Omega}}. \tag{67}$$

Ponendo nella (66') $\alpha = \frac{\pi}{2}$, e notando che

$$\beta\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 \frac{t^{-\frac{1}{2}}\, dt}{1 + t} = \frac{\pi}{2},$$

si ricava

$$\frac{R}{l} = \frac{\pi}{4 + \pi},$$

che è il risultato ricavato da HELMHOLTZ, riguardo alla resistenza unitaria della lamina immersa in un liquido indefinitamente esteso [26]).

Padova, 30 Marzo 1909.

UMBERTO CISOTTI.

---

[26]) Cfr. LEVI-CIVITA, loco citato [2]), pag. 30; e LAMB, loco citato [25]), pag. 117.

SUL MOTO DI UN SOLIDO IN UN CANALE.

INDICE DEI PARAGRAFI.

SUI COMPLESSI DI RETTE DEL PRIMO ORDINE DELLO SPAZIO A QUATTRO DIMENSIONI.

Memoria di **Giuseppe Marletta** (Catania).

Adunanza del 28 marzo 1909.

Scopo di questo lavoro è di fare un primo studio sommario sui complessi di rette del primo ordine dello spazio a quattro dimensioni, cioè dei sistemi algebrici ∞^3 di raggi che occupano semplicemente un tale spazio, di modo che per ciascun punto generico di questo passi un sol raggio del sistema.

Si divideranno perciò i complessi in vari tipi, secondo il modo di spezzarsi della superficie focale [1]), considerando anche l'ipotesi per la quale dalla varietà dei fuochi si stacchi una curva.

Sull'argomento è nota una ricerca di ASCIONE [2]) nell'ipotesi più semplice, cioè quando la superficie focale del complesso è irriducibile, onde le secanti triple di questa sono le rette del complesso. Questa ricerca è stata poi completata in un lavoro di SEVERI [3]) dove, insieme con altri risultati notevoli, si trova un [4]) complesso sfuggito ad ASCIONE. A questo primo tipo di complessi è dedicato il Cap. I della presente Memoria; ma in esso si procede assai brevemente, trattandosi di cose note, poste qui solamente affinchè tutto il lavoro abbia una certa simmetria.

Quanto agli altri tipi, il numero dei sistemi proiettivamente distinti che ognuno di essi abbraccia è così grande, che il nostro studio dovrà per ora limitarsi ad alcuni fatti generali, e ad approfondire quei casi, non molto ristretti, che si presentino per qualche ragione notevoli.

Nel Cap. II si tratta dei complessi generati dalle corde di una superficie irriducibile

---

[1]) Si considereranno soltanto superficie focali generali, cioè tali che proiettate da un punto sopra uno spazio ordinario, diano superficie dotate soltanto di una linea doppia e di un numero finito di punti tripli.

[2]) ASCIONE, *Sul complesso di 1° ordine delle trisecanti di una superficie immersa in un S_4* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie V, vol. VI, 1° semestre 1897, pp. 162-169].

[3]) SEVERI, *Intorno ai punti doppi impropri di una superficie generale dello spazio a quattro dimensioni, e a' suoi punti tripli apparenti* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XV (1901), pp. 33-51], n° 13. — Notiamo che PIERI, in un lavoro rimasto inedito, era già pervenuto, diversi anni prima, ai risultati di ASCIONE e SEVERI.

[4]) È il complesso che qui si studia nel n° 8 *b*).

φ, incidenti un'altra superficie irriducibile φ_1. Si considera primieramente il caso in cui φ_1 è un piano, e si assegnano i tipi proiettivamente distinti di complessi, corrispondenti all'ipotesi che φ sia secata in cubiche gobbe dagli spazi passanti per φ_1, e inoltre abbia nessuno o un sol punto doppio improprio in questo piano. Poscia si assegnano i tipi proiettivamente distinti di complessi corrispondenti all'ipotesi che φ sia secata in due rette sghembe dagli spazi per φ_1, e inoltre abbia nessuno, uno o due punti multipli in φ_1. Si dimostra, poi, che se φ_1 non è un piano, allora φ è una rigata cubica normale, e si studiano i tipi proiettivamente distinti che soddisfano a certe relazioni assegnate.

Nel Cap. III si tratta dei complessi generati dalle rette incidenti tre superficie irriducibili φ, φ_1, φ_2. Si considera primieramente l'ipotesi che φ_1 e φ_2 siano piani, e si studiano i complessi corrispondenti all'ipotesi che φ sia a sezioni spaziali razionali o ellittiche. Poscia si suppone che sia un piano la sola superficie φ_2. Allora φ_1, per es., è una rigata secata in una sola generatrice dagli spazi per φ_2. Si studiano le ipotesi di $c_1 = m - 1$, $c_1 = m - 2$, $c_1 = m - 3$, ove c_1 è l'ordine della curva $\varphi\varphi_2$, e m è l'ordine di φ. Infine si dimostra che non esistono complessi d'ordine *uno* aventi per superficie focale tre superficie irriducibili nessuna delle quali sia un piano.

Nel Cap. IV si tratta dei complessi generati dalle rette incidenti una curva f e una superficie φ irriducibili. Si dimostra che se f appartiene a φ, essa è una retta ovvero una conica, nel qual caso φ è una rigata avente f per direttrice, e tale che ogni spazio passante per il piano di questa, la seca ulteriormente in una sola generatrice.

Se poi f non appartiene a φ, o questa è un piano, ovvero f è una retta o una curva (piana) d'ordine μ con un punto $(\mu - 1)$-plo. In quest'ultima ipotesi φ è un cono d'ordine m col vertice nel punto singolare di f, e avente nel piano di questa $m - 1$ generatrici.

Dopo questo primo lavoro sarà da tornare sull'argomento per esaminare e distinguere caso per caso tutti i complessi proiettivamente distinti.

Generalità.

1. È noto che nello spazio a quattro dimensioni, un *complesso* di rette, cioè un sistema algebrico ∞^3 di rette, ammette in generale una *ipersuperficie focale*, essendo *fuoco* del complesso ogni punto per cui passino due raggi del complesso infinitamente vicini. Ogni raggio del complesso contiene generalmente tre fuochi, in ciascuno dei quali esso è tangente alla ipersuperficie focale. Ma può anche darsi che esista una *superficie* focale incontrata in uno, due o tre punti da ogni retta del complesso, o una *linea* focale incidente a tutti i raggi del complesso [5]). Ogni punto di questa superficie o di questa linea sarà allora un punto *singolare* del complesso, vale a dire un punto comune ad infiniti

[5]) SEGRE, *Un'osservazione sui sistemi di rette degli spazi superiori* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo II (1888), pp. 148-149].

raggi del medesimo, ed equivarrà nel secondo caso a *due* fuochi per ogni raggio del complesso che lo contenga. È utile per altro di osservare (analogamente a come fece STURM in ordine alle *congruenze* di rette dello spazio ordinario aventi linee focali) come anche in questi casi particolari non cessi di esistere una varietà triplamente infinita di fuochi. Così, per es., se il complesso è formato dalle rette trisecanti una superficie data, la varietà focale viene ad essere il luogo delle ∞^2 trisecanti, per ciascuna delle quali passa un piano incidente secondo rette ciascuno dei piani tangenti alla superficie nei tre punti d'intersezione.

2. Noi ci occuperemo solamente dei complessi *d'ordine uno,* cioè tali che per un punto generico dello spazio ambiente [4], passi una sola retta del complesso. Per un siffatto complesso è noto (SEGRE) che non può esistere una ipersuperficie focale, in quanto che due raggi di un complesso del prim'ordine, non possono incontrarsi che in un punto singolare del medesimo. Ne segue che *un complesso di raggi d'ordine uno dello spazio* [4], *è necessariamente formato da rette che incontrano tre volte una data superficie, o che si appoggiano semplicemente ad una superficie e ad una linea date, o infine che passano per un punto dato.*

3. Sia Γ un complesso d'ordine *uno* e classe n di [4], ove per *classe* s'intende il grado della rigata costituita dalle rette del complesso appartenenti ad uno spazio [6]) generico.

Le ∞^2 rette di Γ incidenti un piano π arbitrariamente dato formano un'ipersuperficie V_π, la quale è d'ordine $n+1$, come si vede secandola con uno spazio passante per π.

Una retta qualunque g del complesso Γ è incontrata da ogni ipersuperficie V_π non passante per essa, in $n+1$ punti, i quali, perchè comuni a due raggi di Γ, dovranno essere di necessità singolari per questo, ossia dovranno esser tutti raccolti nei tre punti singolari (distinti o coincidenti) che appartengono alla retta g (n° 1).

4. La superficie intersezione completa di due ipersuperficie V_π e $V_{\pi'}$, essendo π e π' piani generici, si compone della rigata avente per generatrici le rette incidenti ambedue questi piani, e della superficie focale (contata una o più volte). Questa rigata è d'ordine $2n+1$, perchè uno spazio condotto per π', per es., la seca nella traccia di V_π su questo piano medesimo, e in n rette.

Se, inoltre, il complesso Γ contiene un *piano rigato* i-plo, vale a dire un piano (che sarà chiamato *parassita*) le cui singole rette siano tutte da contare i volte come raggi del complesso, esso si staccherà i^2 volte dall'intersezione di V_π e $V_{\pi'}$. Di questa non può far parte alcun'altra superficie (irriducibile) ω diversa da quelle delle quali si è parlato in questo n°. Infatti siccome un suo punto generico P apparterrebbe a due generatrici distinte una di V_π e una di $V_{\pi'}$, per esso passerebbero infinite rette del complesso, ciascuna delle quali, contenendo quattro fochi, sarebbe luogo di fochi. Ma i fochi di Γ sono ∞^2, dunque al variare di P su ω, si otterranno ∞^2 rette ciascuna luogo di fochi, e tutte appartenenti ad ω. Ne segue che questa è un piano parassita, e ciò contro l'ipo-

[6]) D'ora in poi riserberemo la parola *spazio,* soltanto per quello a tre dimensioni.

tesi fatta su ω medesima. Si osservi che i piani parassiti non sono che parti dell'*intera* superficie focale. Escludendoli da questa, rimane ciò che chiamiamo superficie focale *pura*, o semplicemente superficie focale.

Porremo $x = \sum i^2$, ove il sommatorio si ritiene esteso alle multiplicità i di tutti i piani rigati esistenti nel complesso, cioè di tutti i piani *parassiti* del complesso.

5. Una divisione in tipi dei complessi di prim'ordine, segue subito dal modo di spezzarsi della superficie focale. Si hanno così i seguenti cinque tipi:

Tipo I. — Il complesso Γ si compone delle ∞^3 rette che incontrano in tre punti generalmente distinti, una medesima superficie irriducibile immersa nell'ambiente [4].

Tipo II. — Il complesso Γ si compone delle ∞^3 rette che incontrano due volte una medesima superficie irriducibile immersa in [4], e si appoggiano ad una seconda superficie irriducibile.

Tipo III. — Il complesso Γ consta delle ∞^3 rette che incontrano simultaneamente tre diverse superficie irriducibili.

Tipo IV. — Il complesso Γ è l'insieme delle ∞^3 rette che incontrano ad un tempo una superficie ed una curva entrambe irriducibili.

Tipo V. — Il complesso Γ ha un unico punto singolare, ed è quindi una stella di raggi.

Evidentemente non ci occuperemo di quest'ultimo tipo.

CAPITOLO I.

Complessi del tipo I°.

6. Il complesso Γ appartenga al tipo I°, cioè sia generato da tutte le rette incidenti in tre punti, generalmente distinti, una superficie irriducibile φ immersa nell'ambiente [4]. Un piano parassita i-plo del complesso contiene una curva di φ d'ordine μ, con $i = \binom{\mu}{3}$.

Indicando con m l'ordine di φ, e con k la multiplicità di questa medesima per le ipersuperficie V_π, abbiamo le due seguenti relazioni:

$$k^2 m = n^2 - x \tag{1}$$

e

$$3k = n + 1, \tag{2}$$

dedotte da quanto si disse rispettivamente nei n^i 4 e 3. Da queste, e dalla $x \geq 0$, si deduce:

$$(9 - m)k^2 - 6k + 1 \geq 0.$$

Ma è $-6k + 1 < 0$, dunque dovrà essere necessariamente $9 - m > 0$, cioè $m < 9$.

Indicando con h il numero dei punti doppi apparenti della sezione spaziale generica

di φ, si ha per una nota formola (di ZEUTHEN):

$$n = (m - 2)\left[h - \frac{m(m-1)}{6}\right]. \tag{3}$$

Il numero k rappresenta anche il numero delle trisecanti di una sezione spaziale di φ, uscenti da un suo punto; onde è

$$k = h - m + 2. \tag{4}$$

Eliminando n e k dalle tre equazioni (2), (3) e (4), si ottiene:

$$6h(m - 5) = (m^2 + 2m - 6)(m - 5),$$

la quale è soddisfatta per ogni valore di h, nell'ipotesi di $m = 5$, e dà, per ogni altro valore di m:

$$h = \frac{m(m+2)}{6} - 1 \qquad \left(m \gtrless 5\right).$$

Ne segue subito che sono da escludere le ipotesi di $m = 7$ e $m = 8$, perchè h non prenderebbe valori interi. Concludendo rimangono da esaminare solamente le ipotesi di $m = 4$, $m = 5$, $m = 6$.

7. Consideriamo il caso di $m = 4$.

Si ha (n° 6): $h = 3$. Dunque la superficie φ è a sezioni spaziali razionali. Di siffatte superficie del quarto ordine abbiamo soltanto la proiezione della superficie di VERONESE, e le due rigate quartiche. Ma queste ammettendo ∞^1 cubiche piane, generano con le loro trisecanti complessi d'ordine *zero*, onde son da escludere. Rimane quindi la prima superficie ora detta, la quale effettivamente possiede un punto triplo apparente [7]). In questo caso abbiamo:

$$n = 2, \qquad k = 1, \qquad x = 0,$$

cioè il complesso Γ non ha alcun piano parassita.

8. Sia ora $m = 5$.

Dalle $k > 0$ e $x \geq 0$, segue subito $h > 4$; onde i casi da esaminare sono:

(*a*) $\qquad h = 5, \quad k = 2, \quad n = 5, \quad x = 5,$

(*b*) $\qquad h = 6, \quad k = 3, \quad n = 8, \quad x = 19.$

Consideriamo l'ipotesi *a*).

Ogni spazio condotto per una delle cinque ($x = 5$) cubiche piane di φ, seca questa in una conica [8]). Ne segue (NOETHER) che φ è razionale, e per conseguenza rappresen-

---

[7]) CASTELNUOVO, *Ricerche di Geometria della retta nello spazio a quattro dimensioni* [Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, serie VII, tomo II (1891), pp. 855-901], §§ 7 e 8.

[8]) Questa non può spezzarsi, perchè allora φ sarebbe una rigata ellittica, e come tale avrebbe ∞^1 cubiche ellittiche, onde Γ sarebbe d'ordine zero.

tabile mediante un sistema lineare ∞^4 di cubiche passanti per quattro punti fissi. Viceversa si potrebbe dimostrare [9]) che una tal superficie (avente per proiezione la nota superficie del CAPORALI) è dotata di un punto triplo apparente. Il complesso ammette cinque piani parassiti semplici.

Nell'ipotesi b), siccome ogni sezione spaziale è dotata di una quadrisecante, così la superficie φ possiede una quartica piana, e quindi essa è una rigata (razionale) del quinto ordine. Viceversa si potrebbe dimostrare che una siffatta superficie è dotata di un punto triplo apparente. Per il complesso Γ è parassita quadruplo il piano della quartica (piana) direttrice. Oltre che vi sono tre piani parassiti semplici, ciascuno dei quali contiene una cubica di φ.

9. Esaminiamo, infine, il caso di $m = 6$.

Si ha:

$$h = 7, \quad k = 3, \quad n = 8, \quad x = 10.$$

La superficie φ non può essere rigata, perchè una rigata d'ordine m e genere $p > 0$ appartenente ad un $[m - p + 1]$ con $m > 2p - 2$, non può esser che un cono [10]). Inoltre, ogni spazio passante per una delle dieci $(x = 10)$ cubiche piane di φ, secherà questa secondo una cubica gobba generalmente irriducibile. Pertanto (NOETHER) φ è razionale. D'altra parte la superficie del quinto ordine con una cubica doppia, proiezione di φ da un suo punto generico sopra uno spazio, è (CLEBSCH) rappresentabile univocamente sul piano mediante il sistema lineare (triplo) delle quartiche passanti per undici punti fissi. Dunque la superficie φ dovrà essere rappresentabile mediante il sistema lineare (quadruplo) delle quartiche passanti per dieci punti fissi. Viceversa si potrebbe dimostrare che una siffatta superficie possiede un punto triplo apparente.

10. Concludiamo che le superficie di $[4]$ per le quali il sistema delle ∞^3 trisecanti è un complesso d'ordine *uno,* sono [11]):

1) *La superficie del quarto ordine proiezione della superficie di* VERONESE.

2) *La rigata del quinto ordine proiezione della rigata razionale normale dello spazio* $[6]$.

3) *La superficie del quinto ordine rappresentabile in un piano mediante un sistema lineare quadruplo di cubiche con quattro punti fissi.*

4) *La superficie normale del sesto ordine rappresentata dal sistema lineare quadruplo delle quartiche passanti per dieci punti fissi.*

---

[9]) Come si disse nella Prefazione, questo 1° tipo di complessi, sarà trattato brevemente, perchè è già noto.

[10]) SEGRE, *Ricerche sulle rigate ellittiche di qualunque ordine* [Atti della R. Accademia di Torino, vol. XXI (1886), pp. 868-891], § 2.

[11]) ASCIONE e SEVERI, l. c. [2]) e [3]).

CAPITOLO II.

Complessi del tipo II°.

§ 1.

11. Siano φ e φ_1 due superficie irriducibili poste nel [4], aventi in comune una curva C d'ordine $c \geq 0$ (curva che supporremo semplice per entrambe le superficie), e eventualmente un numero finito di punti fuori di questa [12]).

Chiameremo Γ il complesso delle corde di φ incidenti φ_1, le quali inoltre non si appoggiano, in generale, alla curva C. Dunque φ non appartiene ad uno spazio (ordinario).

I piani parassiti di Γ sono quei piani ciascuno dei quali contiene una curva di φ d'ordine non minore di *due*, e una curva di φ_1 d'ordine non nullo. Indicheremo con k e k_1 le multiplicità di φ e φ_1 per le ipersuperficie V_π (n° 3), e con m e m_1 gli ordini di φ e φ_1 rispettivamente.

Per quanto si disse nei n^i 3 e 4, si ha:

(1) $$2k + k_1 = n + 1$$

e

(2) $$k^2 m + k_1^2 m_1 = n^2 - x,$$

essendo $x = \sum i^2$.

Osserviamo che se un piano contiene una curva d'ordine $\mu \geq 2$ di φ, e una curva d'ordine $\mu_1 \geq 1$ di φ_1, esso sarà un piano parassita i-plo per Γ, con $i = \binom{\mu}{2}\mu_1$.

12. Consideriamo primieramente l'ipotesi $m_1 = 1$, cioè supponiamo che φ_1 sia un piano.

Per la rigata ρ delle rette di Γ in uno spazio generico S, la multiplicità della retta $S\varphi_1$ è $k_1 = h - \binom{c}{2}$, essendo h il numero dei punti doppi apparenti della sezione spaziale generica di φ. Ne segue che ρ è d'ordine $n = h - \binom{c}{2} + \binom{m-c}{2}$. È chiaro inoltre che si ha:

$$k = m - 1 - c.$$

La (1) del n° precedente diverrà:

$$2(m - 1 - c) + h - \binom{c}{2} = h - \binom{c}{2} + \binom{m-c}{2} + 1,$$

cioè:

(1') $$4(m - 1 - c) = (m - c)(m - c - 1) + 2.$$

Questa eguaglianza è verificata dai soli valori $c = m - 2$ e $c = m - 3$.

---

[12]) Nel n° 40 si vedrà che l'unico complesso corrispondente all'ipotesi che φ e φ_1 abbiano in comune un numero finito di punti ($c = 0$), è quello studiato nel n° 17.

Dunque se φ_1 è un piano, la superficie φ avrà in questo una curva C d'ordine $m-2$ ovvero $m-3$.

Alla medesima conclusione si perviene più semplicemente, osservando che in uno spazio qualunque condotto per il piano φ_1 le rette del complesso Γ formeranno una congruenza d'ordine *uno*.

13. Consideriamo l'ipotesi $c = m - 3$ e supponiamo che C sia una curva irriducibile.

Si ha:

$$k_1 = h - \binom{m-3}{2}, \qquad n = h - \frac{m(m-7)}{2} - 3, \qquad k = 2,$$

e quindi per la (2) del n° 11:

$$(2') \qquad x = 17m - 3m^2 + 6h - 27 \geqq 0.$$

Siccome il cono χ delle corde di φ uscenti da un punto generico P di [4], è d'ordine h, così lo spazio $P\varphi_1$ conterrà h generatrici di χ, ciascuna delle quali deve appoggiarsi alla φ in due punti generalmente distinti. Ne segue che le h generatrici ora dette sono: la corda della cubica gobba γ ulteriore intersezione di φ con lo spazio $P\varphi_1$; e le $3(m-3)$ rette comuni ai coni $P\gamma$ e PC, meno quelle, fra queste, le quali incontrino γ e C in uno stesso punto. Onde se indichiamo con t il numero dei punti $C\gamma$, e se supponiamo, per ora, che la superficie φ non abbia in φ_1 alcun punto multiplo che valga, almeno, per un punto doppio improprio, sarà:

$$h = 3(m-3) - t + 1.$$

Sostituendo questo valore di h nella (2'), si ha:

$$x = -3m^2 + 35m - 6t - 75 \geqq 0.$$

Ma è $0 \leqq t \leqq 3$, dunque i casi da esaminare sono i seguenti.

Per $t = 0 \supset x = -3m^2 + 35m - 75 \geqq 0 \supset 2 < m < 9$

» $t = 1 \supset x = -3m^2 + 35m - 81 \geqq 0 \supset 3 < m < 9$

» $t = 2 \supset x = -3m^2 + 35m - 87 \geqq 0 \supset 3 < m < 9$

» $t = 3 \supset x = -3m^2 + 35m - 93 \geqq 0 \supset 4 < m < 8.$

14. Per $t = 3$ i casi possibili sono:

a) $m = 5$, e quindi $h = 4$. Ne segue che la sezione spaziale generica della superficie φ è di genere $p = 2$.

Si ha:

$$n = 6, \quad k = 2, \quad k_1 = 3, \quad x = 7.$$

Per quanto è noto circa i sistemi lineari d'ordine minimo [13]), possiamo affermare che la superficie φ è rappresentata dal sistema $|\lambda^4_{1^2 2345678}|$. Il piano φ_1 è quello di una delle coniche di φ, sia per es. il piano della conica C rappresentata dalla retta λ'_{23}.

[13]) Vedi, per es., FERRETTI, *Sulla riduzione all'ordine minimo dei sistemi lineari di curve piane irriducibili di genere p; in particolare per i valori* 0, 1, 2 *del genere* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XVI (1902), pp. 236-279].

Allora uno spazio qualunque passante per φ_1, seca φ lungo una cubica gobba la cui immagine piana sarà una $\lambda^3_{1^2 45678}$ [14]).

Ciascuno dei sette piani parassiti (semplici), contiene una conica di φ avente due punti in comune con C, perchè essendo $t = 3$, questa curva C è la traccia completa di φ sul piano φ_1. È chiaro che i detti piani parassiti sono i piani delle sette coniche rappresentate da:

$$\lambda^2_{14567},\quad \lambda^2_{14568},\quad \lambda^2_{14578},\quad \lambda^2_{14678},\quad \lambda^2_{15678},\quad \lambda^3_{1^2 245678},\quad \lambda^3_{1^2 345678}.$$

b) Per $m = 6$ si ha $h = 7$, e quindi $p = 3$.

La superficie φ sarà rappresentata (n° 9) dal sistema $|\lambda^4_{12345678910}|$.

Si ha:

$$n = 7, \qquad k = 2, \qquad k_1 = 4, \qquad x = 9.$$

Come si vede dalla rappresentazione piana, φ possiede $\binom{10}{9} = 10$ cubiche ellittiche, rappresentate dalle cubiche passanti per nove dei dieci punti base. Se la curva C è la cubica rappresentata da $\lambda^3_{2345\ldots 10}$, allora i nove piani parassiti (semplici) sono i piani delle nove coniche aventi per immagini le rette λ^1_{12}, λ^1_{13}, λ^1_{14}, ..., λ^1_{19}, $\lambda^1_{1,10}$; infatti ciascuna di queste coniche si appoggia in due punti alla cubica C.

c) Per $m = 7$ sarebbe $h = 10$ e $p = 5$. Ma questo caso è da escludere. Infatti, detto π il genere della curva C, si ha [15]) $\pi = 3$, cioè C sarebbe una quartica senza punti multipli. Ora è chiaro che i tre punti comuni a C e alla cubica ulteriore intersezione di φ con uno spazio passante per φ_1, generano al variare di questo spazio una g'_3. Ma una siffatta serie lineare essendo speciale sulla curva C, sarebbe secata da rette del piano φ_1, e ciò è assurdo perchè ogni gruppo della g'_3 è costituito da tre punti di una stessa cubica *gobba*.

15. Sia ora $t = 2$. I casi da esaminare sono:

a) $m = 4$ e quindi $h = 2$. La superficie φ è dunque del quart'ordine e a sezioni spaziali ellittiche, essa è cioè l'intersezione completa di due iperquadriche, ed è rappresentata dal sistema $|\lambda^3_{12345}|$. Un piano condotto ad arbitrio per una delle sedici rette di φ è il piano φ_1.

Si ha:

$$n = 5, \qquad k = 2, \qquad k_1 = 2, \qquad x = 5.$$

Per fissare le idee, supponiamo che φ_1 passi per la retta di φ rappresentata dalla retta λ^1_{12}. Il punto ulteriore intersezione di φ_1 con φ abbia per immagine il punto P del piano rappresentativo. Allora è chiaro che i cinque piani parassiti (semplici) sono i piani delle cinque coniche di φ rappresentate dalle rette λ^1_{3P}, λ^1_{4P}, λ^1_{5P}, e dalle due coniche λ^2_{1345P}, λ^2_{2345P}.

b) Per $m = 5$ è $h = 5$; dunque φ è una superficie del quinto ordine a sezioni

---

[14]) Che la cubica avente per immagine $\lambda^3_{1^2 45678}$ sia *gobba*, segue dall'osservare che esiste la sola conica rappresentata da λ^1_{23} la quale insieme con essa formi una sezione spaziale di φ.

[15]) In generale, se φ non ha alcun punto multiplo nel piano φ_1, si ha (NOETHER): $\pi + 0 + t - 1 = p$, e quindi $\pi = p - t + 1$.

spaziali ellittiche, e sarà quindi rappresentata sul piano da un sistema lineare ∞^4 di cubiche passanti per quattro punti fissi 1, 2, 3, 4. La superficie φ_1 non è altro che il piano di una conica di φ, per es. della conica C rappresentata da una certa retta λ_1^1 uscente dal punto 1. Uno spazio passante per φ_1 secherà ulteriormente φ in una cubica gobba rappresentata da una conica passante pei punti 2, 3, 4; ne segue che φ_1 seca φ secondo la conica C e oltre in un punto. L'immagine di questo sarà quel punto P che insieme coi punti 2, 3 e 4 forma la base del fascio di coniche rappresentanti le cubiche gobbe di φ in spazi per φ_1.

Si ha:

$$n = 7, \quad k = 2, \quad k_1 = 4, \quad x = 13.$$

Per il complesso Γ son piani parassiti semplici, i piani delle quattro coniche rappresentate dalle tre rette λ_{2P}^1, λ_{3P}^1, λ_{4P}^1, e dalla conica λ_{1234P}^2. Inoltre si osservi che la superficie φ possiede [16]) cinque cubiche piane, e corrispondentemente cinque sistemi ∞^1 di coniche in spazi passanti per esse. Ne segue che il piano della conica C giace in uno stesso spazio con una determinata delle dette cinque cubiche piane. Dunque Γ ha un piano parassita triplo.

c) Il caso di $m = 6$, e quindi $h = 8$, si esclude facilmente, per es. ricorrendo alla rappresentazione piana della superficie φ.

d) È da escludere pure l'ipotesi di $m = 7$, e quindi $h = 11$. Infatti la superficie φ sarebbe a sezioni spaziali di genere $p = 4$, e quindi C sarebbe di genere $\pi = 3$. Dunque C dovrebbe essere una quartica generale, e per conseguenza non ammetterebbe alcuna g_2^1, come invece dovrebbe essere essendo $t = 2$.

e) Similmente è da escludere l'ipotesi di $m = 8$, e quindi $h = 14$, perchè essendo $p = 7$, la curva C sarebbe una quintica senza punti multipli, e per conseguenza priva di alcuna g_2^1.

16. Per $t = 1$ i casi da esaminare sono:

a) $m = 4$ e quindi $h = 3$; la superficie φ è dunque d'ordine quattro e a sezioni spaziali razionali. La curva C è una retta; ne segue che φ è rigata, e φ_1 è un piano condotto genericamente per una sua generatrice.

Si ha:

$$n = 6, \quad k = 2, \quad k_1 = 3, \quad x = 11.$$

Per costruire i piani parassiti, s'indichino con A e B i due punti ulteriore intersezione di φ con φ_1. Allora è chiaro che son piani parassiti semplici i piani delle due coniche (degeneri o no) di φ, passanti una per A e una per B, perchè ciascuna incontra

[16]) Infatti la superficie normale φ' rappresentata da tutte le cubiche passanti per quattro punti fissi, possiede cinque reti di cubiche gobbe. Gli spazi delle cubiche di una qualunque di queste reti son tali che per un punto generico di [5] ne passa uno solo. Del resto è noto [Severi, l. c. [3])] che le sole superficie immerse in [5] dotate di un punto doppio apparente sono: la rigata del 4° ordine normale, e la superficie del 5° ordine normale rappresentabile sul piano dal sistema delle cubiche passanti per quattro punti dati.

φ_1 in due punti. È piano parassita triplo quello della cubica piana di φ passante per A (per B) e di conseguenza [17]) per B (per A).

b) Per gli altri casi si osservi che (n° 13) essendo $h = 3(m-3)$, la superficie φ è a sezioni spaziali di genere $p = \frac{1}{2}m(m-9)+10$.

Ma la curva C dev'essere razionale (perchè è $t=1$), e d'altra parte dev'essere di genere $\pi = p$, onde deduciamo che sarà $p = 0$, e quindi $m = 4$ e $m = 5$.

Il caso di $m = 4$ è stato studiato; l'ipotesi $m = 5$ si esclude osservando che la superficie φ sarebbe una rigata e C una sua conica direttrice. Ne segue che uno spazio condotto genericamente per φ_1, secherebbe φ in tre rette sghembe a due a due, e ciò è assurdo essendo Γ un complesso d'ordine uno.

17. Per $t = 0$ la sola ipotesi da considerare è evidentemente quella di $m = 3$, cioè che φ sia una rigata cubica normale, e φ_1 un piano generico.

Si ha:

$$n=4, \qquad k=2, \qquad k_1=1, \qquad x=3.$$

Abbiamo dunque tre piani parassiti (semplici); essi sono i piani delle tre coniche di φ passanti pei tre punti tracce di φ in φ_1, presi a due a due.

18. Nei n^i precedenti di questo Cap. II, abbiamo supposto che la superficie φ non avesse in φ_1 alcun punto multiplo.

Supponiamo ora che φ abbia in φ_1 un (sol) punto multiplo D, ed indichiamone con l la multiplicità.

Affinchè le cubiche gobbe di φ in spazi passanti per φ_1, non si spezzino, è chiaro che D dev'essere pure l-plo per la curva C, ovvero $(l-1)$-plo.

Ragionando come nel n° 13, e seguitando ad indicare con h il numero dei punti doppi apparenti della sezione spaziale generica di φ, si ha:

$$h = 3(m-3) - t + 1 + \lambda,$$

se D conta per λ punti doppi impropri di φ, cioè se una retta generica uscente da D conta per λ corde di questa superficie. Sostituendo questo valore di h nella (2') del n° 13, si ottiene:

$$x = -3m^2 + 35m - 6t + 6\lambda - 75 \geqq 0.$$

19. Considereremo solamente l'ipotesi di $l = 2$.

Sia dunque D un punto doppio di C [18]) pure doppio (improprio) per φ. Si ha:

$$x = -3m^2 + 35m - 6t - 69 \geqq 0,$$

Per $t = 0 \supset x = -3m^2 + 35m - 69 \geqq 0 \supset 2 < m < 10$

» $t = 1 \supset x = -3m^2 + 35m - 75 \geqq 0 \supset 2 < m < 9$

» $t = 2 \supset x = -3m^2 + 35m - 81 \geqq 0 \supset 3 < m < 9$

» $t = 3 \supset x = -3m^2 + 35m - 87 \geqq 0 \supset 3 < m < 9.$

---

[17]) La cubica piana di φ passante per A, si appoggia in un punto alla generatrice C di φ, e quindi il suo piano seca φ_1 lungo una retta la quale incontrerà ulteriormente la detta cubica in un punto che è precisamente il punto B.

[18]) Anche qui supporremo che la curva C sia irriducibile, eccetto il caso che essa sia una conica, perchè allora dovendo avere un punto doppio si spezza necessariamente in due rette.

20. Esaminiamo i casi possibili per $t = 3$.

a) È evidentemente da escludere l'ipotesi $m = 3$; come pure l'altra $m = 4$ perchè C sarebbe una retta e quindi non potrebbe essere dotata di punto doppio.

b) Per $m = 5$ è $h = 5$. Questo caso è da escludere, perchè φ sarebbe rappresentabile mercè un sistema lineare ∞^4 di cubiche passanti per quattro punti fissi, e quindi sarebbe $t = 2$, contro l'ipotesi di $t = 3$.

c) Per $m = 6$ è $h = 8$. La superficie φ è dunque a sezioni spaziali di genere $p = 2$, e quindi rappresentabile mediante un sistema lineare ∞^4 di curve $\lambda^4_{1^2 2 3 4 5 0 7}$.

Si ha:

$$n = 8, \qquad k = 2, \qquad k_1 = 5, \qquad x = 15.$$

La superficie φ' dello spazio [5] rappresentata dal sistema lineare ∞^5 $|\lambda^4_{1^2 2 3 4 5 6 7}|$, e della quale φ può pensarsi proiezione, possiede $\binom{6}{1} + \binom{6}{3} + \binom{6}{5} = 32$ fasci di cubiche gobbe. Dunque per costruire la superficie φ basterà proiettare φ' da un punto arbitrario O dello spazio Σ di una C' di queste cubiche. Il piano φ_1 è quello della cubica C proiezione di C'. La corda di C' uscente da O, ha per traccia in [4] il punto doppio D di C, punto che sarà pure doppio (improprio) per la superficie φ.

Supponiamo che la curva C sia rappresentata da una certa retta uscente dal punto 7. Allora i piani parassiti del complesso Γ sono i sei piani delle sei coniche di φ rappresentate da λ^2_{12345}, λ^2_{12346}, λ^2_{12356}, λ^2_{12456}, λ^2_{13456}, $\lambda^3_{1^2 234567}$, e il piano (parassita triplo) della cubica piana di φ rappresentata da una determinata $\lambda^3_{1^2 23456}$. Per dimostrare l'esistenza di questa cubica piana posta in uno stesso spazio con C, si ragioni come segue.

Ciascuna delle cubiche di φ' rappresentate dalle curve $\lambda^3_{1^2 23456}$, forma con C' una sezione iperpiana di φ', onde il suo spazio secherà secondo un piano lo spazio di C'. Dunque in questo abbiamo ∞^1 piani tracce degli spazi delle dette cubiche; e siccome queste formano un fascio, pure un fascio formeranno i piani medesimi. Ne segue che per O passa uno di questi piani, cioè per O passa lo spazio di una delle dette cubiche.

d) Per $m = 7$ si ha $h = 11$; dunque la superficie φ è a sezioni spaziali di genere $p = 4$, ed è rappresentata dal sistema lineare ∞^4 $|\lambda^5_{1^2 2^2 34 \dots 11,12}|$.

È

$$n = 8, \qquad k = 2, \qquad k_1 = 5, \qquad x = 11.$$

La quartica C sia rappresentata dalla curva $\lambda^4_{1^2 234 \dots 11,12}$; allora le cubiche gobbe ulteriori intersezioni di φ con gli spazi passanti per il piano φ_1 di C, hanno per immagini le rette uscenti dal punto 2. I piani parassiti sono i piani delle undici coniche rappresentate dal punto 1 e dalle rette λ^1_{23}, λ^1_{24}, ..., $\lambda^1_{2,11}$, $\lambda^1_{2,12}$.

La superficie φ possiede un'altra quartica piana C_1, ed è quella rappresentata dalla curva $\lambda^4_{12^2 34 \dots 11,12}$. Le due quartiche C e C_1 hanno in comune il punto doppio (improprio) di φ, punto che è doppio per entrambe queste curve ed è rappresentato dai due punti, non fondamentali, comuni a $\lambda^4_{1^2 234 \dots 11,12}$ e $\lambda^4_{12^2 34 \dots 11,12}$.

e) L'ipotesi di $m = 8$, e quindi $h = 14$, si esclude coi soliti ragionamenti.

21. Sia ora $t = 2$. I casi possibili sono:

a) $m = 4$. Questo caso è da escludere perchè C sarebbe una retta, e quindi non avrebbe alcun punto doppio.

b) Per $m = 5$ è $h = 6$, cioè la φ è a sezioni spaziali razionali, e di conseguenza è una rigata. Il piano φ_1 è quello di due generatrici incidenti.

Per costruire φ si consideri la rigata razionale (normale) φ' del 5° ordine dello spazio [6], avente una conica per direttrice minima. Conduciamo per lo spazio Σ di due generatrici g'_1 e g'_2 di φ', un iperpiano generico; questo secherà ulteriormente φ' in una cubica gobba. È chiaro che proiettando φ' in [4] da una retta o incidente Σ, si otterrà la superficie φ. Il punto doppio (improprio) D di questa sarà il punto comune alle due rette g_1 e g_2 immagini delle generatrici g'_1 e g'_2. Il piano φ_1, poi, non è altro che il piano $g_1 g_2$.

Si ha:

$$n = 8, \quad k = 2, \quad k_1 = 5, \quad x = 19.$$

Un piano parassita (semplice) è evidentemente quello della conica di φ proiezione della conica direttrice di φ'.

Per costruire gli altri piani parassiti, si ragioni come segue.

Gli spazi delle cubiche gobbe γ ulteriori intersezioni di φ' con gl'iperpiani passanti per lo spazio a quattro dimensioni $\Delta \equiv o\Sigma$, secano questo secondo piani. Questi ∞^1 piani generano un cono quadrico avente per vertice il punto *staccato* $\Delta\varphi'$, e che è secato da Σ lungo la rigata quadrica delle rette ciascuna congiungente un punto di g'_1 e un punto di g'_2 tracce in Σ di una stessa cubica gobba γ. Ne segue che la retta o incontra due degli spazi delle cubiche gobbe γ, e quindi che la superficie φ possiede due cubiche piane ciascuna posta in uno stesso spazio (ordinario) con il piano φ_1. I piani di queste *due* cubiche sono parassiti *tripli* per il complesso Γ, il quale di conseguenza non ha ($x = 19$) alcun altro piano parassita.

c) Per $m = 6$ è $h = 9$, cioè la superficie φ è a sezioni spaziali ellittiche, e quindi rappresentata da un sistema lineare ∞^4 di cubiche passanti per tre punti fissi 1, 2 e 3.

Si ha:

$$n = 9, \quad k = 2, \quad k_1 = 6, \quad x = 21.$$

La superficie normale φ' di [6] rappresentata dal sistema lineare $|\lambda^3_{123}|$, e della quale φ può pensarsi proiezione, ammette due sistemi lineari ∞^2 di cubiche gobbe, sistemi che indicheremo con $|f|$ e $|f'|$. Gli spazi di $|f|$, per es., sono ∞^2 e formano quindi un'iper-superficie F, perchè gli spazi di due cubiche f hanno in comune solamente l'unico punto comune a queste curve [19]). Dunque una retta generica r di [6] incontra almeno uno degli spazi del sistema $|f|$; e, similmente, incontra uno spazio, almeno, del sistema $|f'|$. Sia P la traccia di r sullo spazio di una cubica f_1 di $|f|$. Per P passa una corda di f_1, e siccome i due punti di appoggio di questa appartengono pure ad una determinata f', così deduciamo che r incontra nel medesimo punto P lo spazio di una de-

[19]) Infatti se avessero in comune una retta, apparterrebbero ad un [5], e ciò è assurdo trattandosi di due cubiche di φ' appartenenti ad uno stesso dei due sistemi.

terminata cubica f'_1 del sistema $|f'|$. Anzi possiamo addirittura aggiungere che le ipersuperficie F e F' coincidono.

Proiettando φ' da r in un [4], si ottiene evidentemente la superficie φ; e quindi scegliendo per piano φ_1 il piano della proiezione C di una, per es. f_1, delle due cubiche gobbe f_1 e f'_1, l'esistenza del complesso Γ è manifesta.

Osserviamo ora, che essendo $x = 21$, un piano parassita di Γ dovrà contenere o una conica o una cubica di φ. Coniche di questa superficie che giacciono in uno stesso spazio col piano φ_1, sono solamente tre; e precisamente se C ha per immagine una retta generica del piano rappresentativo, le tre coniche ora dette sono quelle aventi per immagini λ^1_{1A}, λ^1_{2A}, λ^1_{3A}, indicando con A l'immagine del punto staccato $\varphi\varphi_1$. Rimangono dunque altri due piani parassiti che saranno *tripli* per il complesso Γ. Ne segue che la retta r incontrerà ulteriormente l'ipersuperficie F in altri due punti Q ed R.

Indichiamo con f_2 e f'_2, f_3 e f'_3 le cubiche dei sistemi $|f|$ e $|f'|$ passanti pei punti Q e R rispettivamente.

La superficie φ è dunque dotata di *sei* cubiche piane, e di *tre* punti doppi impropri.

I due piani parassiti tripli del complesso Γ sono i piani delle due cubiche piane proiezioni da r delle cubiche gobbe f'_2 e f'_3 [20]).

d) L'ipotesi $m = 7$, e quindi $h = 12$, e l'altra $m = 8$ e quindi $h = 15$, sono da escludere [21]).

22. Sia ora $t = 1$.

La curva C sarà razionale. Ma d'altra parte essa dev'essere di genere $\pi = p$, essendo p il genere della sezione spaziale generica di φ; dunque il solo caso possibile è quello di $m = 6$ (n° 18). Ma anche questo caso è da escludere, perchè la superficie φ sarebbe una rigata razionale, e C una sua cubica piana direttrice.

23. Facilmente si esclude l'ipotesi $t = 0$, la qual cosa, del resto, è addirittura evidente per $m < 7$, perchè h avrebbe (n° 18) un valore maggiore di $\binom{m-1}{2}$.

---

[20]) La f'_1 determina con f_1 un iperpiano che *non* contiene r. Le cubiche piane di φ proiezioni di f_1 e f'_1, hanno in comune un punto doppio per entrambe, e doppio (improprio) per φ; esse però non giacciono in uno stesso spazio.

[21]) La superficie φ' di [5] rappresentata dal sistema lineare $|\lambda^4_{12\ldots89}|$, proiettata da un punto O dello spazio di una sua quartica gobba ellittica C' (per es. di quella rappresentata da una $\lambda^3_{123\ldots8}$), dà una superficie φ del 7° ordine con una quartica piana C, i due punti doppi della quale sono pure doppi (impropri) per φ. Si ha: $t = 3$, $h = 12$, $n = 9$, $k = 2$, $k_1 = 6$, $x = 17$. — I piani parassiti sono: i piani delle *otto* coniche rappresentate dalle rette λ^1_{19}, λ^1_{29}, λ^1_{39}, ..., λ^1_{89} e il piano (parassita *triplo*) dell'unica cubica piana posta in uno stesso spazio con il piano φ_1 di C. L'esistenza di questa cubica piana segue dall'osservare che le cubiche di φ' rappresentate dalle rette uscenti dal punto 9, secano sulla quartica C' una g^1_3, onde le tracce dei loro spazi nel [3] di C', sono piani $(3 + 3 - 4 = 2)$ di un fascio, il cui asse si appoggia a C' in un punto. Il piano di questo fascio passante per O è traccia dello spazio di quella cubica gobba di φ' avente per proiezione la cubica piana di φ posta in uno stesso spazio con φ_1. Dunque φ ha un altro punto doppio improprio.

24. Supponiamo ora (n° 18) che un punto D di φ_1 sia l-plo per φ, e $(l-1)$-plo per la curva (irriducibile) C.

Se una retta generica passante per D conta per λ corde di φ, si ha:

$$h = 3(m-3) - t - (l-1) + \lambda + 1,$$

cioè

$$h = 3m - 7 - t - l + \lambda,$$

ove $t (\leqq 2)$ indica il numero dei punti diversi da D, comuni a C e alle cubiche gobbe ulteriori intersezioni di φ con spazi passanti per φ_1.

Sostituendo questo valore di h nella (2') del n° 13, otteniamo:

$$x = 35m - 3m^2 - 69 - 6t - 6l + 6\lambda \geqq 0.$$

25. Limitiamoci al caso di $l = 2$ e $\lambda = 1$, supponiamo cioè che D sia [22]) un punto doppio improprio di φ, semplice per C.

Si ha:

$$x = -3m^2 + 35m - 6t - 75 \geqq 0.$$

Per $t = 0 \supset x = -3m^2 + 35m - 75 \geqq 0 \supset 2 < m < 9$

» $t = 1 \supset x = -3m^2 + 35m - 81 \geqq 0 \supset 3 < m < 9$

» $t = 2 \supset x = -3m^2 + 35m - 87 \geqq 0 \supset 3 < m < 9$.

26. Per $t = 2$ i casi possibili sono:

a) $m = 4$; da escludere perchè essendo C una retta, ciascuna cubica gobba in uno stesso spazio con φ_1, dovrebbe avere *tre* punti sopra questa retta, e ciò è assurdo.

b) Per $m = 5$ è $h = 5$. La superficie φ è a sezioni spaziali ellittiche, e quindi certamente proiezione della superficie normale φ' di [5] rappresentata dal sistema lineare $|\lambda^3_{1234}|$. Uno spazio condotto genericamente per una conica C' di φ' incontra questa superficie ancora in un punto D'. Proiettando φ' da un punto del cono $D'C'$, si ottiene la superficie φ.

Si ha:

$$n = 7, \quad k = 2, \quad k_1 = 4, \quad x = 13.$$

Se C è rappresentata da una retta s condotta per il punto 1, e se 0 è quello dei due punti immagini di D, che non appartiene ad s, allora i piani parassiti sono: i piani delle quattro coniche rappresentate da λ^1_{02}, λ^1_{03}, λ^1_{04}, λ^2_{01234}, e il piano, parassita *triplo,* della cubica piana di φ posta in uno stesso spazio con φ_1 [23]).

c) Per $m = 6$ è $h = 8$. Questo caso è da escludere, perchè φ sarebbe rappresentata da un sistema lineare ∞^4 di curve $\lambda^4_{1^2 2_2 3 4 5 6 7}$, e quindi si ricade nel n° 20 *c*), cioè il punto di φ_1, doppio per φ, sarebbe anche doppio per C.

d) Per $m = 7$ si ha $h = 11$, cioè la φ sarebbe a sezioni spaziali di genere $p = 4$. Osserviamo primieramente che essendo $7 > 2 \cdot 4 - 2$, la superficie φ è normale, in virtù di un noto teorema di CLIFFORD sulle curve. Inoltre se Σ è uno spazio condotto genericamente per il punto doppio (improprio) D di φ, la curva $\Sigma\varphi$ dev'essere di ge-

[22]) Se D è un punto doppio *proprio,* è $\lambda = 0$, e quindi lo studio riesce più semplice anzi che no.

[23]) L'esistenza di questa cubica piana (razionale) segue da quanto si disse nella nota del n° 15 *b*).

nere $p = 4$, e ciò è impossibile, perchè questa curva è incontrata dalla retta $\Sigma\varphi_1$ in altri tre punti oltre che in D [24]), e quindi essa proiettata dal suo punto doppio D, dà una quintica piana dotata già di un punto triplo.

e) Il caso di $m = 8$, e quindi $h = 14$, è pure da escludere [25]).

27. Sia ora $t = 1$. I casi possibili sono quelli nei quali la curva C può essere razionale. Dunque:

a) $m = 4$ e quindi $h = 3$. Dovendo C essere una retta, e la superficie φ a sezioni spaziali razionali, questa sarà una rigata. Il piano φ_1 è un piano condotto genericamente per una C delle due generatrici di φ uscenti dal punto doppio (improprio) D di questa superficie.

Si ha:

$$n = 6, \qquad k = 2, \qquad k_1 = 3, \qquad x = 11.$$

Son piani parassiti semplici il piano della conica di φ passante per il punto staccato $\varphi\varphi_1$, e quello della conica posta in uno stesso piano con la generatrice C [26]). È piano parassita triplo quello della cubica piana di φ passante per il detto punto staccato $\varphi\varphi_1$.

b) Per $m = 5$ è $h = 6$. Questo caso è da escludere. Infatti φ sarebbe proiezione della superficie normale φ' rappresentata dal sistema lineare $|\lambda^3_{1^2}|$, e quindi φ sarebbe una rigata con C per conica direttrice.

c) L'ipotesi di $m = 6$ e quindi $h = 9$ è da escludere pure, perchè φ sarebbe proiezione della superficie normale φ' rappresentata dal sistema lineare $|\lambda^3_{1\,2\,3}|$, e quindi C avrebbe un punto doppio nel punto doppio (improprio) di φ in φ_1 [27]).

d) Facilmente si escludono le ipotesi di $m = 7$ e $m = 8$, osservando che la curva C deve essere razionale.

28. Sia, infine, $t = 0$.

a) Si escludono facilmente le ipotesi di $m = 3$, $m = 4$, $m = 5$.

b) Per $m = 6$ è $h = 10$, e quindi φ sarebbe rigata. Ma allora per il punto D passerebbero due generatrici, e quindi esso dovrebbe essere pure doppio per la cubica direttrice C. Dunque questo caso è da escludere.

c) Facilmente si escludono pure le ipotesi $m = 7$ e $m = 8$.

29. Le molte altre ipotesi che non abbiamo esaminate, e che si possono fare sui punti multipli che la superficie φ può avere nel piano φ_1, si potrebbero studiare con ragionamenti analoghi a quelli fatti nei n[i] precedenti.

---

[24]) Infatti il punto D è semplice per la quartica C. — Del resto si potrebbe fare la solita dimostrazione, si potrebbe cioè osservare che essendo C una quartica di genere $\pi = 3$, essa non ammette alcuna g^1_2.

[25]) Basta osservare il genere di C.

[26]) Questa conica passa per il punto doppio della superficie φ.

[27]) Vedi lo studio fatto nel n° 21 *c*).

§ 2.

30. Supponiamo ora che la curva C sia (n° 12) d'ordine $m-2$.

Uno spazio condotto per il piano φ_1, secherà ulteriormente la superficie φ in due rette sghembe; questa dunque possiede una g_2^1, come pure la curva C.

Si ha:

$$n = h - \binom{m-2}{2} + 1, \qquad k = 1, \qquad k_1 = h - \binom{m-2}{2},$$
$$x = -m^2 + 4m + 2h - 5 \geqq 0.$$

Se φ non ha alcun punto multiplo nel piano φ_1, allora, ragionando come si fece nel n° 13, si ha:

$$h = 2m - 5.$$

Ne segue:

$$x = -m^2 + 8m - 15 \geqq 0,$$

e quindi:

$$3 \leqq m \leqq 5.$$

Sono dunque da esaminare le ipotesi:

$$m = 3, \qquad m = 4, \qquad m = 5.$$

31. *a*) Per $m = 3$ è

$$h = 1, \qquad n = 2, \qquad k = 1, \qquad k_1 = 1, \qquad x = 0.$$

La superficie φ è dunque una rigata cubica normale, e φ_1 è un piano generico condotto per la direttrice rettilinea di questa.

b) Per $m = 4$ si ha:

$$h = 3, \qquad n = 3, \qquad k = 1, \qquad k_1 = 2, \qquad x = 1.$$

La superficie φ è una rigata razionale del quarto ordine, e φ_1 è il piano di una sua conica [28]). Il piano parassita è quello delle due generatrici di φ uscenti dal punto doppio di questa.

c) Per $m = 5$ è:

$$h = 5, \qquad n = 3, \qquad k = 1, \qquad k_1 = 2, \qquad x = 0.$$

Dunque φ è la rigata ellittica normale del quinto ordine, e φ_1 è il piano di una qualunque delle ∞^1 cubiche ellittiche direttrici di questa [29]).

32. La superficie φ abbia in φ_1 un (sol) punto l-plo D con $l > 1$.

Affinchè ogni spazio passante per questo piano φ_1, sechi ulteriormente φ secondo due rette sghembe, il punto D dovrà essere per la curva C di multiplicità non inferiore ad $l-1$. Anzi possiamo escludere questo limite, perchè in tal caso una delle due ge-

---

[28]) Se φ è dotata di direttrice rettilinea, questa fa parte della sopradetta conica.

[29]) Ai medesimi risultati si perviene osservando che non avendo φ per ipotesi alcun punto multiplo in φ_1, la curva C sarà irriducibile, conterrà una g_2^1, e sarà priva di punti multipli (eccetto il caso che φ sia una rigata razionale del quart'ordine dotata di direttrice rettilinea, e C sia composta di questa e di una generatrice).

neratrici di φ in uno spazio generico per φ_1, passerebbe costantemente per D, onde φ si spezzerebbe in due rigate una delle quali sarebbe un cono di vertice D.

Ragionando come nel n° 13, ed osservando che ogni retta uscente dal punto D conta per $\binom{l}{2}$ corde di φ, abbiamo:

(1) $$h = 2m - 5 + \binom{l}{2}.$$

Inoltre si ha:

$$k=1, \quad k_1=h-\binom{m-2}{2}, \quad n=h-\binom{m-2}{2}+1, \quad x=-m^2+8m-15+l(l-1)\geqq 0.$$

Vogliamo ora dimostrare che quest'ultima relazione è soddisfatta solamente per $m = l + 3$.

Si ponga $m = l + 3 + y$. Dalla $x \geqq 0$ si deduce:

$$l(l-1) \geqq (m-3)(m-5),$$

da cui:

$$y(y + 2l - 2) \leqq l.$$

Questa relazione è verificata certamente per $y = 0$, mentre non lo è per $y > 0$.

Se poi fosse $y < 0$, allora dalla diseguaglianza $h \leqq \binom{m-1}{2}$ seguirebbe, in virtù della (1):

$$2m - 5 + \binom{l}{2} \leqq \binom{m-1}{2},$$

cioè:

$$4m - 10 + l(l-1) \leqq (m-1)(m-2),$$

ossia:

$$4(l + 3 + y) - 10 + l^2 - l \leqq (l + 2 + y)(l + 1 + y);$$

e infine:

$$y \leqq 2ly + y^2.$$

Ed essendo $y < 0$, si avrebbe:

$$1 \geqq 2l + y.$$

Ma questa relazione è assurda, perchè dalla $m > 3$ si deduce $l + y > 0$. Dunque è da escludere l'ipotesi $y < 0$.

33. Per quanto si è detto nel n° precedente, possiamo scrivere:

$$h = \tfrac{1}{2}(m-1)(m-2),$$

e quindi $p = 0$, essendo p il genere della rigata φ. Inoltre:

$$k = 1, \qquad k_1 = m - 2, \qquad n = m - 1, \qquad x = m - 3.$$

Gli $m - 3$ piani parassiti (semplici) sono i piani delle $m - 3$ coppie di genera-

trici incidenti, dovute agli $m-3$ punti doppi [30]) della rigata φ, fuori dalla curva C. Concludendo:

Se la superficie φ ha un sol punto multiplo nel piano φ_1, essa è una rigata razionale d'ordine m, avente in φ_1 una curva C d'ordine $m-2$ dotata di un punto $(m-3)$-plo. Gli $m-3$ piani parassiti sono i piani determinati dalle coppie di generatrici uscenti dagli $m-3$ punti doppi della superficie posti fuori dalla curva C.

34. Se la curva C si spezza in una curva (irriducibile) C' d'ordine $c' \leqq m-2$, e in $m-2-c'$ generatrici di φ, allora dall'ipotesi che questa rigata abbia in φ_1 un sol punto multiplo, segue che C' è dotata di un punto D $(c'-1)$-plo, e che le $m-2-c'$ generatrici di φ poste in φ_1 passano tutte per D, e sono tutte diverse dalle $c'-1$ generatrici di φ uscenti da questo medesimo punto.

a) Per es., sia $m=5$ e $c'=1$; la rigata φ è del quinto ordine e dotata di direttrice rettilinea C'. Il piano φ_1 passa per C' e per due generatrici di φ.

b) Sia $m=5$ e $c'=2$; la rigata φ è del quinto ordine e dotata di conica direttrice C'. Il piano φ_1 di questa possiede inoltre una generatrice di φ.

c) Sia $m=6$ e $c'=1$; la rigata φ è del sesto ordine e dotata di direttrice rettilinea C'. Il piano φ_1 passa per C' e per tre generatrici di φ concorrenti in uno stesso punto.

d) Sia $m=6$ e $c'=2$; la rigata φ è del sesto ordine e dotata di conica direttrice C'. Il piano φ_1 di questa contiene due generatrici di φ passanti per uno stesso punto D di C', e ciascuna diversa dalla generatrice uscente da D.

e) Sia $m=6$ e $c'=3$; la rigata φ è del sesto ordine e dotata di cubica piana razionale direttrice C'. Il piano φ_1 di questa contiene inoltre una generatrice di φ passante per il punto doppio D di C', e diversa dalle due generatrici uscenti da questo medesimo punto.

L'esistenza di questi cinque esempi di rigate, e quindi l'esistenza dei relativi complessi Γ, si rende manifesta pensando che la rigata φ si può costruire stabilendo una *conveniente* corrispondenza biunivoca fra C' e una curva (razionale) d'ordine $m-c'$, dotata di $m-c'-2$ punti in φ_1 fuori dalla C'.

35. Supponiamo ora che C sia irriducibile, e che la rigata φ abbia nella curva C un punto l_1-plo, un altro l_2-plo, etc.

---

[30]) L'esistenza di questi punti doppi, evidentemente impropri, è conseguenza del fatto che una rigata di genere p e d'ordine m, ha $d=\binom{m-2}{2}-3p$ punti doppi impropri {vedi SEVERI, l. c. [8]), e TANTURRI, *Un problema di geometria numerativa sulle varietà algebriche luogo di* ∞^1 *spazi* [Atti della R. Accademia di Torino, vol. XXXV (1900), pp. 427-442]}. Nel nostro caso quindi, essendo $p=0$, si ha: $d=\binom{m-2}{2}$. Di questi, $\binom{m-3}{2}$ sono riuniti nel punto multiplo D, gli altri $m-3$ sono precisamente i punti doppi dei quali si parla.

Si ha:

$$h = 2m - 5 + \sum \binom{l}{2}, \qquad k = 1, \qquad k_1 = \sum \binom{l}{2} - \frac{1}{2}(m^2 - 9m + 16),$$

$$n = \sum \binom{l}{2} - \frac{1}{2}(m-2)(m-7), \qquad x = \sum l(l-1) - (m-3)(m-5),$$

e, infine, indicando con p il genere della rigata φ, e quindi anche della direttrice C di questa, si ha [31]):

$$p = \frac{1}{2}(m-3)(m-4) - \frac{1}{2}\sum l(l-1).$$

Ma dalla $x \geqq 0$ si deduce

$$\sum l(l-1) \geqq (m-3)(m-5),$$

onde è $p \leqq \frac{1}{2}(m-3)$.

Inoltre è evidente la limitazione:

$$(m-3)(m-5) \leqq \sum l(l-1) \leqq (m-3)(m-4) \quad ^{32)}.$$

I piani parassiti sono i piani delle $\left[\binom{m-2}{2} - 3p\right] - \sum \binom{l}{2} = x$ coppie di generatrici di φ uscenti dai punti doppi (impropri) che questa rigata possiede [33]) fuori dal piano φ_1.

36. La rigata φ abbia in C due soli punti multipli D e D_1, ed indichiamone con $l \geqq l_1$ le rispettive multiplicità.

Si deve avere:

$$(1) \qquad (m-3)(m-5) \leqq l(l-1) + l_1(l_1-1) \leqq (m-3)(m-4),$$

con

$$l + l_1 \leqq m - 2.$$

Per

$$l = m - 4 \text{ è } l_1 = 2, \quad \text{e} \quad l(l-1) + l_1(l_1-1) = m^2 - 9m + 22.$$

Dico che, per qualsivoglia altra ipotesi sui valori di l e l_1, sarà

$$l(l-1) + l_1(l_1-1) < m^2 - 9m + 22.$$

Infatti si ponga $l = m - 4 - y$ con $y > 0$; il massimo valore che può avere l_1 è $y + 2$. Dalla $l \geqq l_1$ segue

$$(2) \qquad m - 6 \geqq 2y.$$

Inoltre abbiamo:

$$(m-4-y)(m-5-y) + (y+2)(y+1) = (m^2 - 9m + 22) + (2y^2 + 12y - 2my).$$

Per il nostro scopo basterà dimostrare che è $2y^2 + 12y - 2my < 0$.

E invero dalla (2) di questo n° si deduce $y < m - 6$, e da questa, essendo $y > 0$, si deduce:

$$2y^2 + 12y - 2my < 0.$$

---

31) Sostituendo nell'eguaglianza $p = \binom{m-1}{2} - h$, il valore di h dato sopra, si ha di nuovo

$$p = \frac{1}{2}(m-3)(m-4) - \frac{1}{2}\sum l(l-1).$$

32) Se C ha un sol punto multiplo, secondo l, da questa limitazione si deduce $l = m - 3$, come si dimostrò altrimenti nel n° 32.

33) Vedi la nota 30); abbiamo così una verifica per il numero x.

Osserviamo ora che la relazione

$$m^2 - 9m + 22 \geq (m-3)(m-5)$$

è soddisfatta solamente per $m \leq 7$. Ne segue che le condizioni (1) del presente n°, non possono essere soddisfatte per $m > 7$, e quindi che per $m > 7$ non esiste alcun complesso della specie in esame.

37. *a*) Per $m = 6$ si ha:

$$l = 2, \quad l_1 = 2, \quad h = 9, \quad k = 1, \quad k_1 = 3, \quad n = 4, \quad x = 1.$$

Dunque la superficie φ è una rigata ellittica del sesto ordine, avente per direttrice una quartica C dotata di due punti doppi; φ_1 è il piano di C. Il piano parassita (semplice) è quello (n° 35) della coppia di generatrici uscenti dal punto doppio che φ ha fuori di C.

Facilmente si potrebbe dimostrare l'effettiva esistenza del corrispondente complesso Γ, deducendola dalla possibilità di costruire una siffatta rigata φ [34]).

b) Per $m = 7$ si ha:

$$l = 3, \quad l_1 = 2, \quad h = 13, \quad k = 1, \quad k_1 = 3, \quad n = 4, \quad x = 0.$$

Dunque la superficie φ è una rigata di genere $p = 2$ e d'ordine sette, avente per direttrice una quintica C dotata di un punto triplo e di un punto doppio. La superficie φ_1 non è altro che il piano di questa curva.

Pure l'esistenza di questo complesso Γ è facile dimostrare.

38. La determinazione dei complessi relativi all'ipotesi che la curva C abbia più di due punti multipli, può sempre farsi per ogni caso assegnato mediante il sussidio delle formule precedenti (n° 35), e mercè considerazioni analoghe a quelle fatte sin ora.

§ 3.

39. Supponiamo ora che la superficie φ_1 non sia un piano, ed indichiamo con u il numero delle rette che, uscendo da un punto generico P di [4] e appoggiandosi alla curva C, possano contare per corde della superficie φ.

Delle hm_1 corde di φ uscenti da P e incidenti φ_1, una sola non si appoggia a C, ed è precisamente quella retta del complesso Γ la quale passa per questo punto. Deve essere dunque $hm_1 - 1 = u$.

D'altra parte, giacchè φ_1 non è un piano, o per un punto generico Q di φ_1 passano infinite rette incidenti C e che possono contarsi quali corde di φ, ovvero le $h(m_1 - 1)$ corde di φ, le quali partendo da Q si appoggiano ancora una volta a φ_1, devono coincidere con le u rette uscenti da Q, incidenti C, e che son corde di φ. Ciò perchè se una corda di φ uscente da Q incontrasse ancora φ_1 fuori di C, essa sarebbe luogo di fuochi, e quindi Γ avrebbe un'ipersuperficie focale. La prima ipotesi si esclude subito,

---

[34]) Un altro complesso Γ, ma nell'ipotesi che C sia riducibile, si ottiene quando φ è una rigata d'ordine *sei* avente in φ_1 una cubica ellittica (direttrice) e una generatrice. Pure in questo caso φ ha due punti doppi nel piano φ_1.

perchè, al variare di Q su φ_1, si otterrebbero ∞^3 rette di Γ, onde questo, essendo irriducibile, apparterrebbe (n° 5) al 4° tipo.

Nella seconda ipotesi [35]) sarà:

$$h(m_1 - 1) = u.$$

Da questa e dalla precedente eguaglianza, si deduce $h = 1$ e quindi $m = 3$.

Concludiamo che:

se la superficie φ_1 non è un piano, la superficie φ sarà necessariamente una rigata cubica normale.

40. Le ∞^1 corde di φ uscenti da un punto generico P di [4] giacciono in un determinato piano, contenente una conica di questa superficie. Ma il complesso Γ è d'ordine *uno,* dunque ciascun piano cui appartenga una conica di φ, si appoggerà in $m_1 - 1$ punti alla curva C. Ne segue che le superficie φ e φ_1 non possono avere in comune un numero finito di punti (perchè in tale ipotesi dovrebbe essere $m_1 = 1$). In altri termini, possiamo dire che l'unico complesso corrispondente a questa ipotesi, è quello generato dalle corde d'una rigata cubica normale, appoggiate ad un piano generico: complesso studiato nel n° 17.

La curva C, inoltre, è incontrata in un certo numero $\mu (\leqq m_1 - 1)$ di punti da ciascuna generatrice della rigata φ. Ne segue che indicando con c l'ordine di essa, si ha:

$$c \leqq 2(m_1 - 1).$$

41. Si ha:

(1) $k = 2m_1 - c;\quad k_1 = 1;\quad n = 4m_1 - 2c;\quad x = (2m_1 - c)^2 - m_1 \geqq 0.$

Da quest'ultima eguaglianza si deduce:

$$2m_1 - c \geqq \sqrt{m_1} \text{ e quindi } c \leqq 2m_1 - \sqrt{m_1}.$$

42. La superficie φ_1 è razionale, perchè ad un punto P di un piano generico si può far corrispondere quel punto di φ_1 che, non appartenendo a C, giace nell'unico piano passante per P e contenente una conica di φ.

Per avere una rappresentazione piana di φ_1, basterà far corrispondere ad ogni punto M di questa superficie, la conica di φ il cui piano passa per esso; a questa conica si coordinerà indi la retta sua immagine nella rappresentazione piana della rigata cubica φ, e infine si applicherà una dualità piana.

In tal modo le sezioni spaziali di φ_1, avranno per immagini curve λ d'ordine $2m_1 - c$. I punti fondamentali rappresenteranno i piani parassiti del complesso Γ, e le loro multiplicità saranno rispettivamente eguali agli ordini delle curve di φ_1 poste in questi piani.

Tutto ciò d'accordo con l'eguaglianza:

$$(2m_1 - c)^2 - \sum i^2 = m_1,$$

che si ricava dalla (1) del n° precedente.

---

35) La relazione $h(m_1 - 1) = u$ è vera pure se φ_1 appartiene ad uno spazio (ordinario). Infatti ciascuna delle h corde di φ poste in questo spazio e uscenti dal punto Q, sarebbe da contare $m_1 - 1$ volte, visto che in tanti punti essa incontrerebbe φ_1 fuori di Q.

43. Diremo per brevità piano σ, ogni piano contenente una conica della rigata cubica φ.

Un piano σ generico seca la superficie φ_1 in m_1 punti, uno solo dei quali non appartiene (n° 40) alla curva C. Affinchè σ contenga una curva di φ_1, occorre e basta che esso sia un piano parassita del complesso Γ; noi ci limiteremo ad esaminare l'ipotesi (1) $2i \geqq m_1 - 1$, la quale comprende, in particolare, quella per la quale gli $m_1 - 1$ punti comuni a C e a σ stiano sulla curva che in questo piano ha φ_1, indicando al solito con i l'ordine di questa curva.

Se dal punto P di φ comune a due qualunque piani parassiti, si proietta questa stessa superficie, si ottiene un cono quadrico che seca φ_1 in una curva [36]) della quale evidentemente fan parte C, e le due curve che φ_1 ha nei detti due piani parassiti. Dunque se queste curve sono d'ordine i_1 e i_2, sarà

$$2m_1 - c - i_1 - i_2 \geqq 0,$$

cioè

$$2m_1 - c \geqq i_1 + i_2.$$

Ma è $c \geqq m_1 - 1$, ove l'eguaglianza vale se C è composta di $m_1 - 1$ generatrici di φ, dunque si ha a più forte ragione [37]):

$$m_1 + 1 \geqq i_1 + i_2.$$

Inoltre dalla (1) di questo n°, si deduce:

$$i_1 \geqq \tfrac{1}{2}(m_1 - 1) \quad \text{e} \quad i_2 \geqq \tfrac{1}{2}(m_1 - 1),$$

e di conseguenza:

$$i_1 + i_2 \geqq m_1 - 1.$$

Concludendo abbiamo le seguenti limitazioni:

$$(2) \qquad m_1 + 1 \geqq i_1 + i_2 \geqq m_1 - 1, \qquad m_1 + 1 \geqq c \geqq m_1 - 1 \quad {}^{38)}.$$

44. Sia $m_1 = 2\mu$; allora nella (1) del n° precedente è da sopprimere il segno d'eguaglianza, giacchè $m_1 - 1$ è nell'ipotesi fatta un numero dispari. Ne segue che la (2) del medesimo n° diventa:

$$2\mu + 1 \geqq i_1 + i_2 > 2\mu - 1.$$

Indichiamo con s il numero dei piani parassiti del complesso Γ.

L'ipotesi $s = 1$ è da escludere. Infatti, siccome (n° 43) è

$$2\mu + 1 \geqq c \geqq 2\mu - 1, \qquad \text{per} \qquad c = 2\mu - 1, \qquad c = 2\mu, \qquad c = 2\mu + 1,$$

---

[36]) Il detto cono non può contenere φ_1, perchè se così fosse, ciascuno dei piani σ passante per P, dovrebbe contenere una curva di questa superficie, onde il complesso Γ avrebbe ∞^1 piani parassiti. Inoltre siccome questi piani sarebbero i piani generatori di un cono quadrico, il complesso (irriducibile) Γ sarebbe d'ordine *zero*, perchè formato da tutte le rette dei detti piani.

[37]) A questa medesima relazione si perviene anche osservando che uno spazio generico condotto per il piano σ_1, per es., seca ancora φ_1 in una curva d'ordine $m_1 - i_1$, la quale deve avere i_2 ovvero $i_2 - 1$ punti allineati. Dunque deve essere $m_1 - i_1 \geqq i_2 - 1$, cioè $m_1 + 1 \geqq i_1 + i_2$.

[38]) Che sia $m_1 + 1 \geqq c$ segue dalla $2m_1 - c \geqq m_1 - 1$, la quale alla sua volta si deduce dalla $2m_1 - c \geqq i_1 + i_2$ trovata poco sopra.

si avrebbe (n° 42) rispettivamente:

$$i^2 = (2\mu + 1)^2 - 2\mu, \qquad i^2 = (2\mu)^2 - 2\mu, \qquad i^2 = (2\mu - 1)^2 - 2\mu,$$

e queste sono relazioni assurde.

45. Se è $s = 2$, esaminiamo primieramente le due ipotesi:

$$i_1 = \mu + y, \quad i_2 = \mu - y, \quad \text{e} \quad i_1 = \mu + y + 1, \quad i_2 = \mu - y, \quad \text{con} \quad y > 0.$$

Esse sono da escludere, perchè ciascuna conduce (n° 42) a tre relazioni, le quali analogamente alle tre del n° precedente sono da ritenere impossibili.

46. Supponiamo ora che sia $i_1 = i_2 = \cdots = i_s = \mu$, ipotesi che per $s = 2$ coinciderebbe con la prima del n° precedente qualora fosse $y = 0$.

Si ha:

$$s\mu^2 = (2 \cdot 2\mu - c)^2 - 2\mu.$$

a) Sia $c = 2\mu - 1$; allora dev'essere $s\mu^2 = 4\mu^2 + 2\mu + 1$, e quindi siccome s è un numero intero, l'unica ipotesi possibile è $\mu = 1$, e di conseguenza $s = 7$; ipotesi che si esclude subito perchè la superficie φ_1 sarebbe rappresentata dal sistema lineare ∞^2 $|\lambda^3_{1234567}|$.

b) Sia $c = 2\mu$. Abbiamo $s\mu^2 = 4\mu^2 - 2\mu$, eguaglianza che richiede essere $\mu = 1$ ovvero $\mu = 2$.

Per $\mu = 1$ è $s = 2$; dunque φ_1 è una quadrica avente una conica C comune con la rigata cubica φ.

Si ha (n° 41):

$$k = 2, \qquad k_1 = 1, \qquad n = 4, \qquad x = 2.$$

Lo spazio di φ_1 seca φ nella conica C e in una retta che incontra ancora φ_1 in un punto. Per questo punto passano due generatrici di φ_1, ciascuna delle quali giace in un piano σ (n° 43); questi due piani σ sono i due piani parassiti (semplici) del complesso Γ. In particolare la conica C può spezzarsi in una generatrice e nella direttrice rettilinea di φ.

Per $\mu = 2$ è $s = 3$; dunque φ_1 è rappresentata da un sistema lineare ∞^4 di quartiche con tre punti doppi, cioè φ_1 è proiezione della superficie di Veronese. La curva C è una quartica razionale normale secata in tre punti da ogni conica di φ. Le due superficie φ e φ_1 oltre di C non hanno alcun'altra curva comune. Infatti questa non potrebbe essere d'ordine dispari perchè deve giacere in φ_1; nè può essere una conica, perchè se così fosse, questa avrebbe tre punti comuni con C, mentre in φ_1 una conica e una quartica hanno due soli punti comuni [39]).

Si ha:

$$k = 4, \qquad k_1 = 1, \qquad n = 8, \qquad x = 12.$$

Per costruire i tre piani parassiti doppi [40]) del complesso Γ, consideriamo uno

---

[39]) Che φ e φ_1 oltre di C non possono avere in comune una curva d'ordine maggiore di *tre*, segue dall'osservare che proiettando da un punto di questa le due superficie, si ottengono una quadrica ed una rigata cubica aventi in comune la quartica proiezione di C.

[40]) I piani parassiti sono *tre* perchè è $s = 3$, e ciascuno di essi è doppio perchè è $\mu = 2$.

spazio generico Σ. In esso i piani σ e i piani delle coniche di φ_1, generano con le loro tracce due congruenze le quali coincidono con quelle delle corde delle curve $\Sigma\varphi$ e $\Sigma\varphi_1$ rispettivamente. Queste due congruenze hanno $1.3 + 3.6 = 21$ rette comuni. Di queste fan parte le $(2.3 - 3).4 = 12$ rette che passano per uno (solo) dei quattro punti ΣC comuni alle due curve ora dette; e inoltre le $\binom{4}{2} = 6$ congiungenti a due a due questi quattro punti. Le rimanenti *tre* rette sono certamente tracce di piani parassiti doppi per Γ, perchè ciascuno di essi oltre di essere un piano σ contiene una conica di φ_1. Infatti pei due punti in cui una di queste rette si appoggia alla curva $\Sigma\varphi_1$, passa una (sola) conica di φ_1, la quale avrà due punti in comune con C. Ne segue che il piano di questa conica incontra la rigata cubica φ in quattro punti, i quali apparterranno manifestamente ad una conica di questa medesima superficie. Queste due coniche, una di φ e una di φ_1, hanno in comune quattro punti due soli dei quali appartengono a C. Il terzo punto comune a C e alla conica di φ in parola, è il punto in cui il piano di questa incontra φ_1 oltre che nella conica.

c) Infine sia $c = 2\mu + 1$.

Si ha:

$$s\mu^2 = 4\mu^2 - 6\mu + 1.$$

Questo caso è dunque da escludere, perchè l'unica ipotesi possibile $\mu = 1$ condurrebbe ad $s = -1$.

47. Sia ora $i_1 = \mu + 1$ e $i_2 = i_3 = \cdots = \mu$.

Cominciamo ad osservare che (n° 43) è $c = 2\mu - 1$, cioè C è formata da $2\mu - 1$ generatrici di φ.

Si ha:

$$s\mu^2 = 3\mu^2$$

e quindi $s = 3$, indicando con s il numero dei piani parassiti μ-pli.

Dunque la superficie φ_1 è rappresentabile mediante un sistema lineare ∞^4 di curve del tipo $\lambda^{2\mu+1}_{1\mu+1\,2\mu\,3\mu\,4\mu}$, e di conseguenza con un sistema lineare ∞^4 di curve del tipo $\lambda^{\mu+1}_{1\mu_2}$. La superficie φ_1 è perciò una rigata razionale, avente $2\mu - 1$ generatrici comuni con φ.

Il complesso Γ ha un piano parassita $(\mu + 1)$-plo e tre piani parassiti μ-pli.

Si ha:

$$k = 2\mu + 1, \qquad k_1 = 1, \qquad n = 4\mu + 2, \qquad x = (\mu + 1)^2 + 3\mu^2.$$

a) Per $\mu = 1$ la superficie φ_1 è una quadrica avente una generatrice C in comune con la rigata φ.

Si ha:

$$k = 3, \qquad k_1 = 1, \qquad n = 6, \qquad x = 7.$$

Lo spazio di φ_1 seca ulteriormente φ in una conica, il piano della quale è il piano parassita doppio del complesso Γ. Questa conica, poi, incontra φ_1 fuori di C in tre punti, per ciascuno dei quali passa una generatrice di φ_1 a questa incidente, e posta quindi in un piano σ. Si hanno così i tre piani parassiti semplici di Γ.

b) Per $\mu = 2$ abbiamo:

$$k = 5, \qquad k_1 = 1, \qquad n = 10, \qquad x = 21.$$

I piani parassiti si costruiscono come segue.

Per il punto doppio di φ_1 passa un piano σ, il quale, avendo $2+3=5>4$ punti comuni con φ_1, conterrà una cubica di questa medesima superficie: è questo il piano parassita triplo. Inoltre, per ciascuno dei tre punti staccati $\varphi\varphi_1$, passa una conica di φ_1 (rigata priva necessariamente di direttrice rettilinea), il cui piano contenendo $1+3=4>3$ punti di φ, conterrà una conica di questa medesima. In tal modo si vengono a costruire i tre piani parassiti doppi [41]).

Per costruire la rigata φ_1 basterà scegliere, nei piani ω e ω' di due coniche γ e γ' di φ, altre due coniche γ_1 e γ'_1 passanti per tre coppie di punti omologhi nell'omografia che fra i punti di γ e γ' viene stabilita dalle generatrici di φ (e non passanti per il punto $\omega\omega'$). Poscia chiamare φ_1 la rigata del quart'ordine le cui generatrici sono le congiungenti i punti omologhi di γ_1 e γ'_1 nell'omografia, etc.

Per dimostrare l'esistenza del complesso Γ, non rimane che dimostrare come φ e φ_1, oltre delle tre generatrici C, non hanno alcuna curva comune. Osserviamo intanto che può farsi sempre in modo che questa non sia una generatrice; sia, se è possibile, una curva (direttrice) δ. Una generatrice generica g_1 di φ_1 incontra δ in un punto (almeno), per cui passa una generatrice g di φ; cioè ogni generatrice di φ_1 deve incontrare (almeno) una generatrice di φ. La retta congiungente i punti $g_1\gamma_1$ e $g\gamma$, e l'altra che congiunge i punti $g_1\gamma'_1$ e $g\gamma'$, s'incontrano nel punto $\omega\omega'$. Ed ora, fissata la g_1, indichiamo con M l'altro punto comune a γ e alla retta congiungente i punti $\omega\omega'$ e $g_1\gamma_1$, e con N' l'altro punto comune a γ' e alla congiungente i punti $\omega\omega'$ e $g_1\gamma'_1$: è evidente che in generale [42]) la retta MN' non è generatrice di φ, e ciò basta per escludere l'ipotesi dell'esistenza della curva δ.

48. Supponiamo ora che m_1 sia un numero dispari, e precisamente sia $m_1=2\mu+1$.

---

[41]) I tre piani parassiti doppi del complesso Γ si possono pure costruire nel seguente modo; anzi così viene ad essere dimostrata l'esistenza dei tre punti staccati $\varphi\varphi_1$.

I piani delle coniche di φ_1 generano un'ipersuperficie cubica, la quale seca φ in una curva d d'ordine *nove*, della quale fan parte le tre generatrici comuni alle due rigate. Se è P un punto di d non posto in queste rette, per P passa un piano contenente una conica di φ_1 e $1+3=4$ punti di φ, onde questo piano conterrà una conica di φ, la quale fa parte della curva d. Etc.

Un altro complesso Γ d'ordine *uno*, si ottiene supponendo che φ_1 sia dotata di direttrice rettilinea, e precisamente che φ e φ_1 abbiano comuni tre generatrici e quindi pure la retta direttrice δ. Ma esso non entra nei limiti che ci siamo imposti nel n° 43. Nell'ipotesi ora detta si ha: $k=4$, $k_1=1$, $n=8$, $x=12$. Il complesso Γ ha un piano parassita triplo e tre piani parassiti semplici. Il piano parassita triplo si costruisce come è detto nel testo nell'ipotesi che φ_1 non abbia direttrice rettilinea; i tre piani parassiti semplici si costruiscono come segue.

La φ_1 è proiettata dalla sua retta direttrice δ, secondo un cono cubico a tre dimensioni, il quale secherà φ in una curva d d'ordine *nove*. Di questa fan parte le tre generatrici comuni alle due rigate e la direttrice contata tre volte. Se, ora, P è un punto di d fuori dalle rette ora dette, il piano $P\delta$ conterrà due generatrici, una di φ e una di φ_1; esso è dunque un piano parassita semplice. È chiaro quindi che la rimanente intersezione del cono con φ, si compone di altre tre generatrici di questa, ciascuna delle quali individua con δ un piano parassita semplice.

[42]) Basterà, per es., scegliere convenientemente la conica γ'_1.

La (2) del n° 43 diventa:

$$2\mu + 2 \geqq i_1 + i_2 \geqq 2\mu.$$

L'ipotesi $s = 1$, siccome (n° 43) è $2\mu + 2 \geqq c \geqq 2\mu$, per $c = 2\mu$, $c = 2\mu + 1$, $c = 2\mu + 2$, dà (n° 42) rispettivamente:

a) $$i^2 = 4\mu^2 + 6\mu + 3,$$

b) $$i^2 = (2\mu + 1) . 2\mu,$$

c) $$i^2 = 4\mu^2 - 2\mu - 1.$$

Le ipotesi *a*) e *b*) si escludono subito.

Nel caso *c*) si ha $i = 1$ e $\mu = 1$. In tale ipotesi φ_1 è una rigata cubica normale avente in comune con φ una quartica razionale normale C, secata in coppie di punti dalle generatrici di φ [43]).

Se pure le generatrici di φ_1 fossero corde di C, φ e φ_1 avrebbero in comune una generatrice, e quindi ogni piano σ (n° 43) secherebbe fuori di C la superficie φ_1, costantemente nella detta generatrice comune. Dunque questa ipotesi è da escludere, perchè il complesso Γ si spezzerebbe in un complesso di 4° tipo e in uno d'ordine *zero*. Questo è formato dalle rette degli ∞^1 piani σ ciascuno contenente una generatrice di φ_1, piani che generano un cono quadrico.

Supponiamo invece che le generatrici di φ_1 si appoggino una sola volta a C. Per costruire la rigata φ_1 in modo che abbia in comune con φ soltanto la curva C, si proceda come segue.

Si consideri una corda generica d di C, e un piano δ trisecante questa curva e non incidente le due generatrici di φ uscenti dai due punti di appoggio di d su C. Uno spazio Σ passante per δ seca ulteriormente, in un sol punto, sia C che d. La congiungente questi due punti genera, al variare di Σ, una rigata cubica normale φ_1 che non ha alcun punto comune con φ fuori di C. Infatti per un punto comune a φ e φ_1 fuori di C, passerebbe una generatrice di φ la quale essendo trisecante di φ_1 sarebbe o la direttrice o una generatrice di questa rigata, ipotesi entrambe assurde per le costruzioni fatte.

Si ha:

$$n = 4, \qquad k = 2, \qquad k_1 = 1, \qquad x = 1.$$

Il piano parassita (semplice) del complesso Γ, è quello della conica di φ passante pei due punti comuni a d e C.

---

[43]) Nei ragionamenti di questo e dei seguenti n^i, la C si suppone irriducibile, eccetto il caso che essa si componga di c generatrici di φ. Ma è facile vedere che essi rimangono tali e quali pure nell'ipotesi che C si spezzi, purchè si sappia bene interpetrare l'ufficio di ciascuna componente di questa curva.

Per es. nel caso in esame, se C si spezza in una cubica (gobba) ρ e in una retta r a questa incidente (in un sol punto), la r sarà direttrice di φ. Inoltre sarà pure direttrice di φ_1 se le generatrici di questa sono corde di C, e in tal caso è facile dimostrare (per es. con una corrispondenza di Chasles fra i punti di r) l'esistenza della generatrice comune a φ e φ_1. Se poi le generatrici di φ_1 si appoggiano una sola volta a C, seguendo perfettamente la costruzione di φ_1 indicata nel testo, la retta d si appoggerà a ρ e ad r, e questa, quindi, risulterà una generatrice di φ_1.

49. Sia $s = 2$; le ipotesi

a) $i_1 = \mu + y, \qquad i_2 = \mu - y;$

b) $i_1 = \mu + y + 1, \qquad i_2 = \mu - y;$

c) $i_1 = \mu + y + 1, \qquad i_2 = \mu - y + 1;$

d) $i_1 = \mu + y + 2, \qquad i_2 = \mu - y,$

con $y > 0$, si escludono (n° 43) subito.

50. Supponiamo ora che sia $i_1 = i_2 = \cdots = i_s = \mu$, ipotesi che per $s = 2$ coinciderebbe con la a) del n° precedente, qualora fosse $y = 0$.

Si ha:

$$s\mu^2 = [2(2\mu + 1) - c]^2 - (2\mu + 1).$$

a) Per $c = 2\mu$ abbiamo $(4 - s)\mu^2 + 6\mu + 3 = 0$, e quindi $\mu = 1$ ovvero $\mu = 3$.

Siccome s è intero, è da escludere la seconda ipotesi; e per $\mu = 1$ si ha $s = 13$. Ne seguirebbe $m_1 = 3$, cioè φ_1 sarebbe una superficie cubica rappresentata (n° 42) da un sistema lineare ∞^4 di quartiche passanti semplicemente per tredici punti fissi, e ciò è assurdo.

b) Per $c = 2\mu + 1$ si ha $s\mu = 4\mu + 2$, e quindi $\mu = 1$ e $s = 6$, ovvero $\mu = 2$ e $s = 5$.

Consideriamo la prima ipotesi. Allora φ_1 è rappresentata da $|\lambda^3_{123456}|$, cioè essa è una superficie cubica dello spazio (ordinario), avente una cubica (gobba) comune con φ.

Si ha (n° 41):

$$k = 3, \qquad k_1 = 1, \qquad n = 6, \qquad x = 6.$$

Esistono *sei* rette di φ_1 che son corde della cubica C; ciascuna di esse giace quindi in un piano σ. Si ottengono in tal modo i sei piani parassiti (semplici) del complesso Γ.

Nella seconda ipotesi, cioè se è $\mu = 2$, la superficie φ_1 è rappresentata da un sistema lineare ∞^4 di curve $\lambda^5_{1^2 2^2 3^2 4^2 5^2}$, e quindi da un sistema lineare ∞^4 di cubiche λ^3_{1234}. Dunque φ_1 è una superficie del quinto ordine a sezioni spaziali ellittiche. La curva C è una quintica razionale di φ_1, per es. rappresentata da una λ^2_1, e φ è la rigata cubica normale, le coniche della quale secano quattro volte C [44]).

Si ha:

$$k = 5, \qquad k_1 = 1, \qquad n = 10, \qquad x = 20.$$

Per costruire i cinque piani parassiti doppi, si ragioni in modo analogo a come si fece nel n° 46 b). Le due congruenze hanno in questo caso $1.5 + 3.10 = 35$ rette comuni, delle quali fan parte le $(2.4 - 4).5 = 20$ rette che passano per uno (solo) dei cinque punti ΣC; e inoltre le $\binom{5}{2} = 10$ congiungenti a due a due questi cinque punti. Le rimanenti *cinque* rette sono certamente tracce di piani σ ciascuno contenente una conica di φ_1. Infatti, pei due punti in cui una di queste rette si appoggia alla curva $\Sigma\varphi$, passa una (sola) conica di φ, la quale avrà quattro punti in comune con C. Ne segue che il piano di questa conica incontra φ_1 in $2 + 4 = 6 > 5$ punti, e quindi esso conterrà manifestamente una conica di questa medesima superficie.

---

[44]) MARLETTA, *Sulle curve razionali del quinto ordine* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XIX (1905), pp. 94-119], II, 2.

L'esistenza del complesso Γ avente φ e φ_1 per superficie focale, sarà manifesta dopo di aver dimostrato che queste due superficie non hanno alcuna curva comune oltre di C. E infatti, se φ e φ_1 si secassero ancora in una curva C_1 d'ordine c_1, sarebbe $c_1 - 1 \leqq (3-1)(5-1) - c$, cioè $c_1 \leqq 4$. Non può essere $c_1 = 2, 3, 4$, perchè una curva siffatta incontrerebbe C in due numeri di punti *disuguali,* considerandola una volta su φ e una volta su φ_1, e ciò è assurdo. Rimane da dimostrare che ciascuna delle quattro rette di φ_1 incidenti in un (sol) punto a C, non è generatrice di φ, visto che la direttrice di questa rigata, incontrando in tre punti C, non può appartenere a φ_1.

Le dette quattro rette di φ_1 sono quella r rappresentata dal punto fondamentale 1, e le tre rappresentate da λ^1_{12}, λ^1_{13}, λ^1_{14}. La r non può essere direttrice di φ, e quindi le altre tre rette ora dette non ne possono essere generatrici. È evidente, poi, che si può sempre pensare che r non sia generatrice di φ [45]).

c) Per $c = 2\mu + 2$ si ha $s\mu^2 = 4\mu^2 - 2\mu - 1$, e quindi $\mu = 1$ e $s = 1$; cioè φ_1 è rappresentata dal sistema $|\lambda^2_1|$, essa è perciò una rigata cubica normale, avente in comune con φ una quartica razionale (normale), secata in due punti da ogni piano σ. Questo caso è stato studiato nel n° 48.

51. Supponiamo ora che sia $i_1 = \mu - 1$. Cominciamo ad osservare che per ogni altro piano parassita sarà $i > \mu$, e ciò per la (2) del n° 43. Per questa medesima ragione e per non ricadere nelle ipotesi fatte nel n° 49, ci limiteremo a supporre che vi siano $s > 1$ piani parassiti $(\mu + 1)$-pli.

a) Per $c = 2\mu$ si avrebbe $s(\mu^2 + 2\mu + 1) = 3\mu^2 + 8\mu + 2$, relazione assurda essendo s intero.

b) Le ipotesi $c = 2\mu + 1$ e $c = 2\mu + 2$, si escludono subito osservando che (n° 43) deve essere $2m_1 - c \geqq i_2 + i_3$.

52. Consideriamo ora il caso che Γ abbia s piani parassiti μ-pli e s_1 piani parassiti $(\mu + 1)$-pli.

Cominciamo ad osservare che per la medesima ragione addotta in fine del n° precedente, per $c = 2\mu + 1$ ovvero $c = 2\mu + 2$ deve essere necessariamente $s_1 = 1$. Esamineremo primieramente queste due ipotesi, e poi quella di $c = 2\mu$.

a) Sia $c = 2\mu + 1$; si ha: $s\mu^2 = 3\mu^2 - 1$, e quindi $\mu = 1$ e $s = 2$. Dunque in questo caso la superficie φ_1 è anch'essa una rigata cubica normale, avente in comune con φ una sezione spaziale.

Si ha:

$$k = 3, \qquad k_1 = 1, \qquad n = 6, \qquad x = 6.$$

I piani parassiti sono *tre,* uno doppio e due semplici. È doppio il piano della conica

---

[45]) Infatti si consideri la superficie φ' di [5] rappresentata dal sistema lineare $|\lambda^3_{1234}|$, e siano C' e r' la curva e la retta di φ' aventi per immagini λ^2_1 e il punto fondamentale 1. Per avere la superficie φ atta ad individuare, insieme con C, il complesso Γ, basterà proiettare φ' da un punto che appartenga ad uno spazio quadrisecante C' e *non* incidente r'.

di φ passante pei due punti [46]) staccati A e B comuni alle due rigate φ e φ_1, perchè esso contiene [47]) pure una conica di φ_1. Son piani parassiti semplici, quello della conica di φ passante per A e per il punto in cui la generatrice di φ_1 uscente da A si appoggia a C, e l'altro piano passante per B e per il punto in cui la generatrice di φ_1 uscente da B si appoggia a C.

Che effettivamente possano esistere due rigate cubiche normali aventi in comune soltanto una sezione spaziale e due punti staccati, si dimostra come segue.

Per una corda di una cubica gobba C, si conduca un piano che non giaccia nello spazio di questa. Due coniche γ e γ_1 di questo piano passanti pei due punti di appoggio della detta corda hanno ancora in comune altri due punti A e B. È facile costruire intanto due rigate cubiche φ e φ_1, la prima avente per direttrici C e γ, la seconda C e γ_1. Ed ora si comprende subito che φ e φ_1 non hanno alcun punto comune fuori di C e dei punti A e B, perchè proiettando da A, per es., si ottengono due quadriche che si secano in una cubica e in una corda di questa, e quindi non possono avere alcun altro punto comune senza coincidere [48]).

b) Sia $c = 2\mu + 2$, si ha $s\mu^2 = 3\mu^2 - 4\mu - 2$, e quindi deve essere $\mu = 1$ ovvero $\mu = 2$.

Per $\mu = 1$ si deduce $s = -3$; per $\mu = 2$ si deduce $s = \frac{1}{2}$; dunque questo caso di $c = 2\mu + 2$ è da escludere.

53. Supponiamo ora che sia $c = 2\mu$.

Si ha:

$$s = (4 - s_1) - \frac{(s_1 - 3)(2\mu + 1)}{\mu^2}.$$

Ne segue subito $s_1 < 4$, perchè se fosse $s_1 \geq 4$ si avrebbe $s < 0$.

a) Per $s_1 = 1$ è $s\mu^2 = 3\mu^2 + 4\mu + 2$, e quindi $\mu = 1$ e $s = 9$. Dunque la superficie φ_1 sarebbe del terzo ordine, e rappresentata da un sistema lineare ∞^4 di curve del tipo $\lambda^4_{1^2 2_3 \dots 10}$, e ciò è assurdo.

b) Per $s_1 = 2$ si ha: $s\mu^2 = 2\mu^2 + 2\mu + 1$, e quindi $\mu = 1$ e $s = 5$. In questo caso, quindi, la superficie φ_1 è del terzo ordine e rappresentabile mediante il sistema lineare $|\lambda^4_{1^2 2^2 3 4 5 6 7}|$. La φ_1 è dunque una superficie cubica (non rigata) dello spazio ordinario, e contiene due generatrici (n° 43) di φ.

---

[46]) Un'altra costruzione di questo piano parassita doppio si può fare in modo analogo a come si fece nel n° 46 *b*); anzi così facendo ne risulta manifesta l'esistenza dei due punti staccati A e B.

[47]) Il detto piano non contiene alcuna retta di φ_1, perchè i punti A e B, e i due punti nei quali esso seca C, sono quattro punti di una conica di φ, e quindi tre qualunque di essi non sono allineati.

[48]) Dire che le dette due quadriche coincidono, vale quanto dire che ogni piano uscente da A (e analogamente per B) il quale contenga una conica di φ dovrà contenere una conica di φ_1. Ora ciò è impossibile. Infatti in tal caso se P è un punto generico di φ, i piani delle due coniche di φ passanti per le coppie AP, BP dovrebbero contenere due coniche di φ_1, il punto comune alle quali non potrebbe essere altro che P; onde sarebbe $\varphi \equiv \varphi_1$, e ciò non è.

Che i piani passanti per A e contenenti coniche di φ non possono possedere rette di φ si esclude immediatamente.

L'esistenza del complesso Γ, in questo caso, è manifesta.

Si ha:

$$k = 4, \qquad k_1 = 1, \qquad n = 8, \qquad x = 13.$$

I due piani parassiti doppi ($s_1 = 2$) sono quelli ciascuno dei quali contiene la direttrice di φ e una delle rette comuni a questa e a φ_1. È noto, poi, che esistono cinque rette di φ_1 incidenti entrambe le rette che costituiscono C. Pei due punti di appoggio di ciascuna di queste cinque rette passa una conica di φ il cui piano è un piano parassita semplice per Γ.

c) Infine, per $s_1 = 3$ abbiamo: $s\mu^2 = \mu^2$ e quindi $s = 1$. Dunque φ_1 è rappresentata da un sistema lineare ∞^4 di curve del tipo $\lambda^{2\mu+2}_{1\mu+1_2\mu+1_3\mu+1_4\mu}$.

La superficie φ_1 è di conseguenza una rigata razionale avente in comune con φ 2μ generatrici. Ciascuno dei tre piani parassiti $(\mu + 1)$-pli contiene una curva d'ordine $\mu + 1$ della rigata φ_1; il piano parassita μ-plo ne contiene una d'ordine μ.

Si ha (n° 41):

$$k = 2\mu + 2, \qquad k_1 = 1, \qquad n = 4\mu + 4, \qquad x = 4\mu^2 + 6\mu + 3.$$

Per es., per $\mu = 1$ la φ_1 è una rigata cubica normale avente due generatrici in comune con φ. Abbiamo:

$$k = 4, \qquad k_1 = 1, \qquad n = 8, \qquad x = 13.$$

Il piano parassita semplice del complesso Γ è il piano della conica di φ passante pei due punti nei quali la direttrice rettilinea di φ_1 si appoggia alle sopradette due generatrici comuni. Se, poi, P, Q e R sono i tre punti staccati [49] $\varphi\varphi_1$, è chiaro che il piano della conica di φ passante per P e Q, secando φ_1 ancora in altri due punti (posti sulle generatrici comuni), conterrà infiniti punti di φ_1, i quali appartengono manifestamente ad una conica di questa superficie. In tal modo si costruiscono i tre piani parassiti doppi di Γ.

54. Consideriamo finalmente l'ipotesi che i piani parassiti del complesso Γ sian tutti $(\mu + 1)$-pli, indicando al solito con $2\mu + 1$ l'ordine m_1 di φ_1. La curva C, intanto, si spezza (n° 43) in 2μ generatrici di φ.

Se è s_1 il numero di questi piani, si ha:

$$s_1 = 3 + \left(\frac{\mu}{\mu + 1}\right)^2,$$

e ciò è assurdo dovendo s_1 essere intero; dunque l'ipotesi fatta è da escludere.

---

[49] Ragionando come nel n° 46 *b*) si ottiene un'altra costruzione dei tre piani parassiti doppi, anzi in tal modo risulta manifesta l'esistenza dei tre punti staccati $\varphi\varphi_1$.

CAPITOLO III.

Complessi del tipo III°.

§ 1.

55. Siano φ, φ_1, φ_2 tre superficie irriducibili, due qualunque non poste in uno stesso spazio; e C_2, C, C_1 rispettivamente le curve (riducibili o no) comuni alle $\varphi\varphi_1$, $\varphi_1\varphi_2$, $\varphi_2\varphi$. Indicheremo con $c_2 \geqq 0$, $c \geqq 0$, $c_1 \geqq 0$ gli ordini di queste curve, e con m, m_1 e m_2 gli ordini di φ, φ_1 e φ_2 rispettivamente. Chiameremo Γ, al solito, il complesso delle rette incidenti le tre superficie in punti generalmente distinti, e quindi non posti sulle curve C, C_1, C_2. I piani *parassiti* di Γ son quelli ciascuno dei quali contiene tre curve, ciascuna d'ordine non nullo, una di φ, una di φ_1 e un'altra di φ_2.

Indichiamo con k, k_1 e k_2 le multiplicità di φ, φ_1 e φ_2 per le varietà V (n° 3).

Per quanto si disse nei n[i] 4 e 3 abbiamo:

$$k + k_1 + k_2 = n + 1, \tag{1}$$

$$k^2 m + k_1^2 m_1 + k_2^2 m_2 = n^2 - x, \tag{2}$$

essendo (n° 4) $x = \Sigma i^2 \geqq 0$.

Osserviamo che se un piano contiene una curva d'ordine $\mu > 0$ di φ, una d'ordine $\mu_1 > 0$ di φ_1, e un'altra d'ordine $\mu_2 > 0$ di φ_2, esso sarà un piano parassita i-plo per il complesso Γ, con $i = \mu\mu_1\mu_2$.

56. Consideriamo primieramente l'ipotesi di $m_1 = m_2 = 1$, cioè supponiamo che le superficie φ_1 e φ_2 siano due piani (aventi un sol punto comune).

Per la rigata ρ delle rette di Γ in uno spazio generico Σ, la multiplicità della retta $\Sigma\varphi_1$ è $k_1 = m - c_1$; e analogamente sarà $k_2 = m - c_2$. Inoltre si ha:

$$n = 2m - c_1 - c_2$$

e $k = 1$.

Per un punto generico P di [4] passa un sol piano incidente secondo rette φ_1 e φ_2. Questo piano evidentemente contiene il raggio di Γ uscente da P e passa per il punto $M \equiv \varphi_1\varphi_2$. Onde, indicando con χ, q_1 e q_2 le multiplicità di M per φ, C_1 e C_2 rispettivamente, è manifesto che si ha:

$$(c_1 - q_1) + (c_2 - q_2) + \chi = m - 1. \tag{1}$$

Viceversa, se questa relazione è soddisfatta, è chiaro che il complesso Γ è d'ordine *uno*.

Osserviamo che ogni piano parassita, dovendo contenere una retta di φ_1 e una retta di φ_2, passerà per il punto M.

57. Sia π un piano generico. Per un punto qualunque P' di esso passa un (sol) piano incidente secondo rette φ_1 e φ_2. Questo piano incontrerà ulteriormente la superficie φ in un (sol) punto P. Si ottiene in tal modo fra i punti di φ e quelli di π una corrispondenza biunivoca.

Se f è una sezione spaziale generica di φ, per ogni suo punto P passa un (sol) piano incidente secondo rette φ_1 e φ_2, piano che al variare di P su f, genera una ipersuperficie d'ordine [50]) $2m - c_1 - c_2$. Ne segue che nella rappresentazione piana della superficie (razionale) φ, sono d'ordine $2m - c_1 - c_2$ le curve λ immagini delle sezioni spaziali di questa. Inoltre è chiaro che la traccia in π di un piano parassita i-plo per Γ è un punto fondamentale i-plo per la rappresentazione.

Osserviamo, infine, che per la ipersuperficie di cui poco sopra si è parlato, il piano φ_1 è di multiplicità $m - c_1$. A tal fine basterà dimostrare che per un punto Q di φ_1, passano $m - c_1$ piani generatori della detta ipersuperficie. E infatti, se uno di questi piani generatori passa per Q, esso giace nello spazio $Q\varphi_2$, onde dovrà ancora passare per uno degli $m - c_1$ punti nei quali questo spazio seca f fuori di φ_2. Ne segue senz'altro che i punti $\pi\varphi_1$ e $\pi\varphi_2$ sono per la rappresentazione punti fondamentali di multiplicità $m - c_1$ e $m - c_2$ rispettivamente.

Tutto quanto si è detto in questo n° è d'accordo con la (2) del n° 55, relazione che nel nostro caso diventa:

$$m = (2m - c_1 - c_2)^2 - (m - c_1)^2 - (m - c_2)^2 - \Sigma i^2.$$

58. Vogliamo ora vedere quali *rigate* (razionali), possano insieme con due piani formare la superficie focale di un complesso Γ (d'ordine *uno*).

Cominciamo a supporre che le curve C_1 e C_2 siano due direttrici della rigata φ. Allora ciascuno dei numeri q_1 e q_2, o è nullo, ovvero è eguale a χ. Se q_1 e q_2 sono entrambi eguali a χ, come avviene se sono diversi da zero, avremo $c_1 + c_2 = m - 1 + \chi$.

Se il punto M non appartiene ad alcuna delle curve C_1, C_2, cioè se è $q_1 = q_2 = 0$, allora φ sarebbe d'ordine $m = c_1 + c_2$, mentre dalla (1) del n° 56 si deduce $m = c_1 + c_2 + 1$.

Se M, invece, appartenesse ad entrambe le dette curve, e quindi se fosse $q_1 = q_2 = \chi$, φ sarebbe d'ordine $m = c_1 + c_2 - \chi$, mentre dalla (1) del n° 56 si deduce $m = c_1 + c_2 - \chi + 1$.

Se, infine, M appartenesse, per es., alla sola C_1, se cioè fosse $q_1 = \chi$ e $q_2 = 0$, la rigata φ sarebbe d'ordine $m = c_1 + c_2$, mentre dalla (1) del n° 56 si deduce $m = c_1 + c_2 + 1$ [51]).

Dunque è impossibile che le curve C_1 e C_2 siano entrambe direttrici della rigata φ.

59. Consideriamo ora l'ipotesi che C_1 e C_2 siano due generatrici di φ. Allora per la (1) del n° 56 dovrà essere $\chi = m - 3 + q_1 + q_2$.

a) Sia $q_1 = q_2 = 0$ e quindi $\chi = m - 3$. Allora φ è una rigata (razionale) dotata in M di un punto $(m - 3)$-plo; φ_1 e φ_2 sono due piani condotti per M e per due generatrici non passanti per questo punto.

Si ha:

$$n = 2m - 2, \quad k = 1, \quad k_1 = m - 1, \quad k_2 = m - 1, \quad x = 2m^2 - 5m + 2.$$

Per costruire i piani parassiti del complesso Γ, osserviamo che proiettando φ da

[50]) Infatti lo spazio di f seca questa varietà nella rigata avente per direttrici questa curva f, e la retta di φ_1 e quella di φ_2 poste nello spazio medesimo.

[51]) Del resto in questo caso della C_2 farebbero parte χ generatrici.

M, si ottiene una rigata cubica dello spazio (ordinario). Ne segue che φ è dotata di due direttrici piane [aventi M come punto $(m-3)$-plo], una d'ordine $m-1$, l'altra d'ordine $m-2$. I piani di queste sono piani parassiti per Γ, di multiplicità $m-1$ e $m-2$ rispettivamente. Altri $m-3$ piani parassiti, semplici, sono i piani ciascuno incidente secondo rette φ_1 e φ_2, e contenente una delle $m-3$ generatrici di φ uscenti dal punto M [52]).

b) Sia ora $q_1 = q_2 = 1$, e quindi $\chi = m - 1$. Questo è un caso particolare del seguente.

Sia φ un monoide; φ_1 e φ_2 due piani non posti nello spazio di φ e aventi in comune soltanto il punto singolare M di questa superficie. L'esistenza del complesso Γ è manifesta.

Se φ_1 e φ_2 non contengono alcuna retta di φ, si ha [53]):

$$n = 2m, \qquad k = 1, \qquad k_1 = m, \qquad k_2 = m, \qquad x = 2m^2 - m.$$

Son piani parassiti semplici per Γ, gli $m(m-1)$ piani ciascuno passante per qualcuna delle rette di φ uscenti dal punto M, e inoltre incidente φ_1 e φ_2. È chiaro, poi, che il piano determinato da M e dai due punti nei quali φ è ulteriormente secata da φ_1 e φ_2, è per Γ un piano parassita m-plo.

Se poi φ_1, e così φ_2, contiene una retta di φ, allora si ha:

$$n = 2m - 2, \qquad k = 1, \qquad k_1 = m - 1, \qquad k_2 = m - 1, \qquad x = 2m^2 - 5m + 2.$$

Son piani parassiti semplici gli $m(m-1) - 2$ piani ciascuno incidente secondo rette φ_1 e φ_2, e passante per una delle rette di φ uscenti da M e diverse dalle rette C_1 e C_2. Il piano, poi, di queste due rette seca φ ulteriormente in una curva d'ordine $m-2$, onde esso è per il complesso Γ un piano parassita $(m-2)$-plo.

Se, infine, dei due piani φ_1 e φ_2, uno solo, per es. φ_1, ha una retta C_2 comune con φ, allora abbiamo:

$$n = 2m - 1, \quad k = 1, \quad k_1 = m, \quad k_2 = m - 1, \quad x = 2m^2 - 3m.$$

Son piani parassiti semplici gli $m(m-1) - 1$ piani ciascuno incidente secondo rette φ_1 e φ_2, e passante per una delle rette di φ uscenti da M e diversi da C_2. Il piano di questa retta e del punto in cui φ_2 ancora seca φ è per il complesso Γ un piano parassita $(m-1)$-plo [54]).

---

52) Si ha la verifica:

$$x = 2m^2 - 5m + 2 = (m-1)^2 + (m-2)^2 + (m-3).\,1.$$

53) Per $m = 1$ si ha il complesso delle rette appoggiate a tre piani sghembi. Questo non è altro che il complesso generato dalle congiungenti i punti omologhi di due spazi omografici aventi tre (soli) punti uniti, il piano di questi è il piano parassita del complesso.

54) Se, in particolare, φ fosse una rigata d'ordine m dotata di direttrice $(m-1)$-pla, si ragionerebbe in modo analogo.

Supponiamo, per es., che φ_1 e φ_2 siano due piani passanti per due generatrici di φ uscenti da uno stesso punto M della retta $(m-1)$-pla. Si ha:

$$n = 2m - 2, \qquad k_1 = m - 1, \qquad k_2 = m - 1, \qquad k = 1, \qquad x = 2m^2 - 5m + 2.$$

c) Consideriamo ora l'ipotesi di $q_1 = 1$ e $q_2 = 0$, onde è $\chi = m - 2$. Dunque φ è una rigata razionale con un punto M $(m-2)$-plo; il piano φ_2 passa per una delle generatrici di φ uscenti da M, mentre il piano φ_1 contiene una generatrice che non passa per M.

Si ha:

$$n = 2m - 2, \quad k = 1, \quad k_1 = m - 1, \quad k_2 = m - 1, \quad x = 2m^2 - 5m + 2.$$

Proiettando φ da M in uno spazio Σ, si ottiene una quadrica φ' passante per la retta $\Sigma\varphi_1$, e non per la retta $\Sigma\varphi_2$; onde quest'ultima secherà φ' nel punto $C_1\Sigma$ e in un altro punto che diremo P. Osserviamo inoltre che per ciascuno dei punti P e $C_1\Sigma$ passa una generatrice di φ' incidente $\Sigma\varphi_1$. Ne segue che la rigata φ conterrà due curve piane d'ordine $m - 1$ passanti ($m - 2$ volte) per M. Di queste, però, una si spezza nella C_1 e in una curva d'ordine $m-2$. Ciò posto è chiaro che i piani di queste due curve sono per il complesso Γ piani parassiti di multiplicità $m - 1$ e $m - 2$ rispettivamente. Inoltre esistono $m - 3$ piani parassiti semplici, ciascuno dei quali, oltre di essere incidente secondo rette i piani φ_1 e φ_2, contiene una delle generatrici di φ uscenti da M e diverse dalla C_1.

Per es., sia $m = 4$, etc.

60. Esaminiamo ora l'ipotesi che C_1 sia una generatrice e C_2 una direttrice della rigata φ. Allora è $M \equiv C_1 C_2$; φ è una rigata d'ordine m dotata di una direttrice C_2 d'ordine $c_2 = m - 1$ posta in un piano φ_1. Un piano genericamente condotto per la generatrice C_1, è l'altro piano focale φ_2. L'esistenza del complesso Γ è manifesta.

Evidentemente si ottiene pure un complesso d'ordine *uno* supponendo che φ_2 non contenga infiniti punti di φ.

a) Nel primo caso si ha:

$$n = m, \qquad k = 1, \qquad k_1 = m - 1, \qquad k_2 = 1, \qquad x = m - 2.$$

Il piano φ_2 incontra φ, fuori di C_1, in $m-2$ punti, per ciascuno dei quali passa una generatrice di questa rigata, generatrice che insieme con M individua un piano parassita (semplice) del complesso Γ.

b) Nel secondo caso, cioè se è $c_1 = 0$, si ha:

$$n = m + 1, \qquad k = 1, \qquad k_1 = m, \qquad k_2 = 1, \qquad x = m.$$

Il piano φ_2 seca φ in m punti per ciascuno dei quali passa una generatrice che insieme con M determina un piano parassita del complesso Γ. Si hanno così gli m piani parassiti (semplici).

61. Supponiamo ora che C_1 sia formata da c_1 generatrici di φ. Allora se C_2 è

I piani parassiti del complesso Γ sono: il piano delle rette C_1 e C_2 che per Γ è parassita $(m-2)$-plo; gli $m - 3$ piani (parassiti semplici) ciascuno passante per una delle rimanenti $m - 3$ generatrici di φ uscenti da M, e incidente secondo rette φ_1 e φ_2; e finalmente il piano, parassita $(m - 1)$-plo, passante per la retta $(m - 1)$-pla di φ e incidente questi due piani secondo rette.

Come verifica abbiamo:

$$(m-2)^2 + (m-3) + (m-1)^2 = 2m^2 - 5m + 2 = x.$$

una direttrice, affinchè i piani φ_1 e φ_2 abbiano in comune il solo punto M, tutte le c_1 generatrici ora dette devono passare per questo punto. Onde anche in questo caso sarà $c_2 = m - 1$.

Si ha:

$$n = m - c_1 + 1, \quad k = 1, \quad k_1 = m - c_1, \quad k_2 = 1, \quad x = m - 2c_1.$$

Per costruire gli $m - 2c_1$ piani parassiti (semplici) basterà osservare che uno spazio generico per φ_2 seca ulteriormente φ in una curva d'ordine $m - c_1$, la quale si appoggia a ciascuna delle c_1 generatrici poste in φ_2. Ne segue che questo piano φ_2 incontra ancora φ in $m - 2c_1$ punti. Per ciascuno di questi passa una generatrice di φ, la quale insieme con M individua un piano che è parassita semplice per Γ.

62. Consideriamo infine l'ipotesi per la quale C_1 e C_2 si compongono rispettivamente di c_1 e c_2 generatrici della rigata φ.

Per semplicità considereremo solamente il caso in cui il punto $M \equiv \varphi_1 \varphi_2$ non appartenga a φ, perchè analogamente si potrebbe studiare l'ipotesi generale per la quale fra le generatrici di C_1 e C_2 ve ne siano passanti per M.

Sia $m = 2\mu - 1$, e consideriamo la rigata razionale normale φ' d'ordine m dello spazio $[2\mu]$, avente una curva direttrice minima γ' d'ordine ν con $\nu \leqq \mu - 1$ (Segre).

Proiettando φ' da un $[2\mu - 5]$ generico in un $[4]$, si ottiene una rigata φ della quale la direttrice minima γ è la proiezione di γ'. Ne segue che se φ è la rigata focale del complesso Γ, sarà $c_1 \leqq \nu$ e $c_2 \leqq \nu$, perchè ciascuna delle generatrici che fanno parte di C_1, per es., incontra in un punto la direttrice γ. Ma deve essere $c_1 + c_2 = m - 1$, dunque sarà $m - 1 \leqq 2\nu$, cioè $\nu \geqq \mu - 1$, e di conseguenza: $\nu = \mu - 1$.

Ed ora, siccome è $c_1 \leqq \mu - 1$, $c_2 \leqq \mu - 1$ e $c_1 + c_2 = 2\mu - 2$, sarà certamente $c_1 = c_2 = \mu - 1$.

Consideriamo $\mu - 1$ generatrici generiche di φ'; esse individuano un $[2\mu - 3]$. Similmente altre $\mu - 1$ generatrici di φ', individuano un altro $[2\mu - 3]$. Si prenda ora un $[2\mu - 5]$ che sechi secondo un $[2\mu - 6]$ entrambi questi spazi $[2\mu - 3]$. È chiaro che proiettando φ' da questo $[2\mu - 5]$ in un $[4]$, si ottiene una rigata φ dotata di due piani φ_1 e φ_2 ciascuno contenente $\mu - 1$ generatrici di essa. Siccome il punto $M \equiv \varphi_1 \varphi_2$ non appartiene a φ per la generalità delle costruzioni fatte, è evidentemente d'ordine *uno* il complesso Γ che ha φ, φ_1 e φ_2 per superficie focali.

Si ha (n° 56):

$$n = 2\mu, \quad k = 1, \quad k_1 = \mu, \quad k_2 = \mu, \quad x = 2\mu^2 - 2\mu + 1.$$

Il complesso Γ ha due piani parassiti, uno μ-plo e uno $(\mu - 1)$-plo; essi sono i piani di due direttrici (piane) d'ordini μ e $\mu - 1$ rispettivamente.

Che la proiezione γ della direttrice minima γ' di φ' sia *piana,* segue dall'osservare che essa è d'ordine $\mu - 1$, e che deve avere $\mu - 1$ punti in φ_1 e altrettanti in φ_2, mentre d'altra parte φ_1 e φ_2 non giacciono in uno stesso spazio.

L'esistenza di una direttrice piana d'ordine μ si dimostra come segue.

Il piano φ_1 incontra ulteriormente φ in un punto P_1, e φ_2 incontra φ in un punto staccato P_2. Lo spazio $P_2 \varphi_1$ seca ulteriormente φ in una curva direttrice d'ordine μ pas-

sante per P_1 e P_2. Questa curva è secata da φ_2 in P_2 e nei $\mu - 1$ punti in cui essa si appoggia a C_1, cioè in μ punti; ne segue che se essa direttrice non fosse piana, φ_2 dovrebbe appartenere allo spazio $P_2\varphi_1$, e ciò è assurdo.

63. Sia ora $m = 2\mu$; allora continuando ad adoperare le lettere del n° precedente, sarà $\nu \leqq \mu$.

Proiettando in un [4] la superficie φ' da un $[2\mu - 4]$ generico di $[2\mu + 1]$ si ottiene una certa rigata φ. Se questa, insieme con due piani φ_1 e φ_2, deve formare la superficie focale di un complesso Γ d'ordine *uno,* dovrà essere anche in questo caso $c_1 \leqq \nu$ e $c_2 \leqq \nu$, se, come si vuole, Γ possiede c_1 generatrici in φ_2, e c_2 generatrici in φ_1. Ma dovendo essere $c_1 + c_2 = m - 1$, sarà $m - 1 \leqq 2\nu$, e quindi $\nu > \mu - 1$, dunque avremo certamente $\nu = \mu$. Allora, dovendo essere $c_1 \leqq \mu$, $c_2 \leqq \mu$ e $c_1 + c_2 = 2\mu - 1$, segue $c_1 = \mu - 1$ e $c_2 = \mu$.

Ed ora si prendano $\mu - 1$ generatrici generiche della rigata φ' dello spazio $[2\mu + 1]$; esse individuano un $[2\mu - 3]$. Similmente, altre μ generatrici generiche individuano un $[2\mu - 1]$; consideriamo in questo un $[2\mu - 4]$ che sechi secondo un $[2\mu - 6]$ il $[2\mu - 3]$ costruito or ora.

È manifesto che proiettando φ' da siffatto $[2\mu - 4]$ in un [4], si ottiene una rigata φ tale che esistono due piani φ_2 e φ_1, i quali la secano rispettivamente secondo $\mu - 1$ e μ generatrici. Siccome poi il punto $M \equiv \varphi_1\varphi_2$ non appartiene a φ, il complesso Γ avente φ, φ_1 e φ_2 per superficie focale è evidentemente d'ordine *uno.*

Si ha (n° 56):

$$n = 2\mu + 1, \quad k = 1, \quad k_1 = \mu + 1, \quad k_2 = \mu, \quad x = 2\mu^2.$$

È noto (SEGRE) che nelle ipotesi fatte la rigata razionale normale φ' ammette infinite direttrici minime d'ordine μ. Due di queste avranno per proiezioni curve *piane* di φ. Infatti il piano φ_2 incontra ulteriormente φ in due punti. Per ciascuno di questi passa una delle ∞^1 direttrici minime, la quale, dovendo avere μ punti su φ_1 e μ su φ_2, deve essere necessariamente piana.

I piani di queste due curve direttrici minime, sono per il complesso Γ piani parassiti μ-pli.

64. Ritorniamo al caso generale, cioè supponiamo che φ non sia rigata, e consideriamo per ora il caso di $\chi = 0$ e quindi (n° 56) $q_1 = q_2 = 0$.

Nei n[i] 58, 59, 60, 61, 62 e 63 abbiamo, in sostanza, esaminato le ipotesi che φ sia una superficie a sezioni spaziali razionali, perchè l'unica superficie siffatta che non sia rigata è la proiezione della superficie di VERONESE. Questa si esclude subito, per $\chi = 0$, perchè dev'essere $c_1 + c_2 = 3$.

Passiamo ora ad esaminare l'ipotesi che φ sia una superficie a sezioni spaziali ellittiche, e inoltre supponiamo $\chi = 0$.

a) La φ sia una superficie cubica non rigata; φ_1 e φ_2 sono piani condotti per due rette sghembe C_1 e C_2 di φ, e posti fuori dallo spazio di questa medesima.

Si ha:

$$n = 4, \quad k = 1, \quad k_1 = 2, \quad k_2 = 2, \quad x = 5.$$

I cinque piani parassiti (semplici) del complesso Γ sono quei piani ciascuno individuato dal punto $\varphi_1 \varphi_2$, e da una delle cinque rette incidenti simultaneamente le C_1 e C_2.

b) La φ sia una superficie del quarto ordine a sezioni spaziali ellittiche; φ_1 è il piano di una sua conica C_2, e φ_2 è il piano determinato da una retta C_1 di φ non incidente φ_1 e da un punto generico M di questo medesimo piano.

Si ha:

$$n = 5, \qquad k = 1, \qquad k_1 = 3, \qquad k_2 = 2, \qquad x = 8.$$

Le sezioni spaziali di φ sono rappresentate, com'è noto, da curve λ^3_{12345}. Da questa rappresentazione si deduce che esistono quattro rette [55]) incidenti C_1 e C_2; esse, congiunte con M, dànno quattro piani parassiti semplici. Inoltre esiste una conica che si appoggia in due punti a C_2, in un punto a C_1, e passa per il punto staccato P comune a φ e al piano $\varphi_2 \equiv M C_1$; il piano di questa conica è un piano parassita doppio per il complesso Γ.

c) La φ sia una superficie del quinto ordine a sezioni spaziali ellittiche; φ_1 e φ_2 siano i piani di due coniche di φ non aventi alcun punto comune.

Si ha:

$$n = 6, \qquad k = 1, \qquad k_1 = 3, \qquad k_2 = 3, \qquad x = 13.$$

I piani che dal punto $M \equiv \varphi_1 \varphi_2$ proiettano le quattro rette [56]) incidenti C_1 e C_2 son quattro piani parassiti semplici per Γ. Osserviamo inoltre che delle ∞^2 cubiche incidenti in due punti ciascuna delle coniche C_1 e C_2, ve ne sarà una (sola) passante pei due punti staccati comuni a φ e ai piani φ_1 e φ_2. Questa particolare cubica starà necessariamente in un piano contenente M, e che per il complesso Γ sarà un piano parassita triplo.

c') La φ sia la medesima superficie di sopra, φ_1 il piano di una cubica C_2, e φ_2 un piano per una retta C_1 di essa.

Si ha:

$$n = 6, \qquad k = 1, \qquad k_1 = 4, \qquad k_2 = 2, \qquad x = 11.$$

Se nella nota rappresentazione piana di φ, C_1 ha per immagine λ^1_{12}, e C_2 ha per immagine λ^2_{123}, allora i punti fondamentali 1 e 2, e la retta λ^1_{34} rappresentano tre rette di φ tali che proiettati da M dànno tre piani parassiti semplici per il complesso Γ. Se, poi, P e Q sono le immagini dei due punti nei quali il piano φ_2 incontra ancora φ, allora le rette λ^1_{4P} e λ^1_{4Q} rappresentano due coniche di φ, i piani delle quali sono per Γ due piani parassiti doppi.

d) Per amor di brevità non si continua a considerare le altre ipotesi di $m = 6$, $m = 7$, $m = 8$, $m = 9$ (quest'ultimo caso si esclude), cosa del resto che sarebbe assai facile a farsi.

---

[55]) Se λ^1_1 e λ^0_2 sono le immagini rispettivamente di C_2 e C_1, le quattro rette sono rappresentate da λ^1_{23}, λ^1_{24}, λ^1_{25}, λ^2_{12345}. La conica di φ che sta nel piano parassita doppio, è rappresentata dalla conica λ^2_{2345p}, essendo p l'immagine di P.

[56]) La φ è rappresentata da ∞^4 curve λ^3_{1234}. Se λ^1_1 e λ'^1_1 sono le immagini di C_1 e C_2, le quattro rette sono rappresentate da λ^0_1, λ^1_{23}, λ^1_{34}, λ^1_{42}. La cubica piana ha per immagine λ^2_{234PQ}.

65. Con considerazioni analoghe a quelle dei n[i] precedenti, si potrebbero studiare altre ipotesi sul valore di χ. Qui ci limiteremo a dare tre esempi di complessi, nell'ipotesi di $\chi = 1$.

a) Sia φ la proiezione della superficie di VERONESE; i piani φ_1 e φ_2 possono essere i piani di due coniche di φ (non poste in uno stesso spazio).

Si ha:

$$n = 4, \quad k = 1, \quad k_1 = 2, \quad k_2 = 2, \quad x = 4.$$

L'unico piano parassita (doppio) del complesso Γ è quello della conica di φ passante pei due punti staccati $\varphi\varphi_1$ e $\varphi\varphi_2$.

b) Sia φ la superficie di *a*), e φ_2 un piano generico. Assumeremo come piano φ_1 il piano uscente da uno P dei quattro punti $\varphi\varphi_2$, e inoltre contenente una conica C_2 di φ non passante per questo punto.

Si ha:

$$n = 6, \quad k = 1, \quad k_1 = 4, \quad k_2 = 2, \quad x = 12.$$

La conica γ di φ individuata dal punto P e da uno qualunque degli altri tre punti $\varphi\varphi_2$ giace in un piano che seca φ_2 secondo una retta. Inoltre γ ha due punti in comune con φ_1; uno di questi è P, l'altro è sulla conica C_2, onde il piano di γ seca secondo una retta pure φ_1. Ne segue che il complesso Γ possiede tre piani parassiti doppi.

c) L'altra superficie di quart'ordine a sezioni razionali è la rigata razionale. Sia φ una siffatta rigata, e φ_2 un piano generico. Se è P uno dei quattro punti $\varphi\varphi_2$, assumeremo come piano φ_1 quello della cubica piana C_2 passante per P.

Si ha:

$$n = 5, \quad k = 1, \quad k_1 = 4, \quad k_2 = 1, \quad x = 4.$$

Per ciascuno dei quattro punti $\varphi\varphi_2$ passa una generatrice che si appoggia alla cubica C_2. Ciascuna di queste quattro generatrici giace in un piano incidente secondo rette φ_1 e φ_2. Si costruiscono così quattro piani i quali sono parassiti semplici per il complesso Γ.

§ 2.

66. Supponiamo ora che delle tre superficie φ, φ_1, φ_2 la sola φ_2 sia un piano.

Si ha:

$$n = 2mm_1 - (c_2 + cm + c_1 m_1), \quad k = m_1 - c, \quad k_1 = m - c_1, \quad k_2 = mm_1 - c_2 - cc_1.$$

In uno spazio qualunque Σ condotto per il piano φ_2 le rette del complesso Γ formano una congruenza d'ordine *uno*, onde Σ secherà una delle due superficie φ e φ_1, per es. φ_1, nella curva C (di φ_2) e in una retta; questa, poi, si deve appoggiare in $m - c_1 - 1$ punti alla curva d'ordine $m - c_1$ ulteriore intersezione di Σ con φ.

Da quanto abbiamo detto segue, intanto, che è $c = m_1 - 1$. La (1) del n° 55 diventa:

$$(m_1 - c) + (m - c_1) + (mm_1 - c_2 - cc_1) = 2mm_1 - (c_2 + cm + c_1 m_1) + 1,$$

e questa è una identità per la $c = m_1 - 1$.

Concludiamo che φ_1 è una rigata razionale d'ordine m_1 avente in φ_2 una direttrice C' d'ordine $c' \leqq m_1 - 1$, e $m_1 - 1 - c'$ generatrici. Uno spazio generico condotto per il piano φ_2 seca ancora la superficie φ in una curva d'ordine $m - c_1$ avente $m - c_1 - 1$ punti sulla generatrice di φ_1 posta in detto spazio. Quest'ultima condizione ci dice che la curva C_2 (comune a φ e φ_1) ha $c_2 - (m - c_1 - 1)$ punti in φ_2.

67. Sia π un piano generico. Per un punto qualunque di π passa un (sol) piano, incidente secondo una retta il piano φ_2, e che contiene una generatrice della rigata φ_1. Esso, inoltre, incontrerà ulteriormente la superficie φ in un (sol) punto. Si ottiene in tal modo fra i punti di π e i punti di φ una corrispondenza evidentemente biunivoca.

Se f è una sezione spaziale generica di φ, per ogni suo punto P passa un (sol) piano incidente secondo una retta φ_2 e che contiene una generatrice di φ_1. Questo piano, al variare di P su f, genera una ipersuperficie d'ordine [57])

$$2mm_1 . 1 - c_2 . 1 - cm - c_1 m_1 = n.$$

Ne segue che nella rappresentazione piana della superficie φ, sono d'ordine n le curve λ immagini delle sezioni spaziali di questa.

È chiaro, poi, che la traccia in π di un piano parassita i-plo per il complesso Γ è un punto fondamentale i-plo per la rappresentazione.

Inoltre, la ipersuperficie della quale poco sopra si è detto, possiede il piano φ_2 con la multiplicità $mm_1 - c_2 - cc_1 = k_2$ e la superficie φ_1 con la multiplicità $m - c_1 = k_1$. Onde le curve λ avranno un punto k_2-plo in $\varphi_2\pi$, e m_1 punti k_1-pli nei punti $\varphi_1\pi$.

Tutto ciò d'accordo con la (2) del n° 55, la quale dà:

$$n^2 - \sum i^2 - k_2^2 - k_1^2 m_1 = k^2 m = (m_1 - c)^2 m = m,$$

essendo (n° 66) $c = m_1 - 1$.

68. Supponiamo ora che la superficie φ sia anch'essa rigata, e che alla curva C_1 appartenga una sua direttrice C_1'.

Uno spazio passante per φ_2 secherà ulteriormente φ in $m - c_1$ generatrici le quali si appoggeranno tutte o nessuna alla generatrice di φ_1 posta in questo spazio. Nel primo caso il complesso Γ avrebbe ∞^1 piani parassiti, e quindi di esso farebbe parte un complesso d'ordine *zero*; nel secondo caso uno spazio per φ_2 conterrà una sola generatrice di φ, e ciò perchè Γ è d'ordine uno.

Dunque sarà $c_1 = m - 1$, cioè φ sarà, a simiglianza di φ_1, una rigata d'ordine m, avente in φ_2 una direttrice C_1' d'ordine $c_1' \leqq m - 1$ e $m - 1 - c_1'$ generatrici.

Evidentemente uno spazio generico passante per φ_2, non incontra la curva C_2 in alcun punto fuori di questo piano. Se, come supporremo per semplicità, C_2 si compone di c_2 generatrici comuni a φ e φ_1, nessuna delle quali giaccia in φ_2, si ha:

$$n = m + m_1 - c_2, \quad k = 1, \quad k_1 = 1, \quad k_2 = m + m_1 - c_2 - 1, \quad x = m + m_1 - 2c_2 - 1.$$

---

57) Infatti lo spazio di f seca questa ipersuperficie nella rigata avente per direttrici questa curva, e la retta di φ_2 e la curva di φ_1 poste in questo spazio medesimo.

Le rigate φ e φ_1 hanno $m + m_1 - 2c_2 - 1$ punti staccati comuni [58]) fuori di φ_2, per ciascuno dei quali passano dunque due generatrici, una di φ e una di φ_1. Si hanno così gli $m + m_1 - 2c_2 - 1$ piani parassiti (semplici) del complesso Γ.

69. Consideriamo ora l'ipotesi di $c_1 = m - 2$, cioè supponiamo che φ sia secata ulteriormente in una conica da uno spazio genericamente condotto per il piano φ_2. La curva C_2 sarà da questo spazio secata ancora in un (sol) punto, cioè C_2 avrà in φ_2 $c_2 - 1$ punti posti sulla curva [59]) C.

Si ha:

$$n=2m_1+m-c_2,\quad k=1,\quad k_1=2,\quad k_2=2m_1+m-c_2-2,\quad x=4m_1+3m-4c_2-4.$$

Supponiamo primieramente che la superficie φ non appartenga ad uno spazio. Allora uno spazio condotto genericamente per φ_2, seca ulteriormente φ in una conica il cui piano ω non contiene la generatrice di φ_1 posta in questo spazio. Indicheremo con ε la classe dell'inviluppo delle tracce in φ_2 dei piani ω. Chiamando omologhi la traccia di questa generatrice e i c' punti comuni ad ω e alla direttrice C' di φ_1 posta in φ_2 (n° 66), si viene a stabilire una corrispondenza (ε, c'). Gli

$$\varepsilon + c' - [c_2 - 1 - (m_1 - 1 - c')] = \varepsilon + m_1 - c_2$$

punti uniti di questa, diversi dai $c_2 - 1 - (m_1 - 1 - c') = c_2 - m_1 + c'$ punti che C_2 ha in C', sono tracce di generatrici di φ_1 ciascuna g delle quali giace nel piano della conica ulteriore intersezione di φ con lo spazio $g\varphi_2$. Si hanno così $\varepsilon + m_1 - c_2$ piani parassiti doppi per il complesso Γ. Inoltre esistono $3m - 4 - 4\varepsilon$ rette di φ che si appoggiano [60]) alla curva C_2; ciascuna di queste, insieme con la generatrice di φ_1 che è ad essa incidente, dà un piano parassita semplice. Dunque il complesso Γ ammette $3m - 4 - 4\varepsilon$ piani parassiti semplici [61]).

70. Consideriamo ora l'ipotesi di φ posta (n° 69) in uno spazio.

La curva C_1 sarà in questo caso una retta $(m - 2)$-pla per φ.

Si ha:

$$n=2m_1+m-c_2,\quad k=1,\quad k_1=2,\quad k_2=2m_1+m-c_2-2,\quad x=4m_1+3m-4c_2-4.$$

---

[58]) Se φ e φ_1 si considerano come un'unica rigata d'ordine $m + m_1$, la cui sezione spaziale è di genere $p = 0 + 0 + c_2 - 1 = c_2 - 1$, si hanno $d = \binom{m + m_1 - 2}{2} - 3p$ punti doppi impropri. Il numero di questi situati fuori di φ_2 è uguale a:

$$d - [(m-1)(m_1-1) - c_2] - \binom{m-2}{2} - \binom{m_1-2}{2} = m + m_1 - 2c_2 - 1.$$

[59]) Se φ_2 non possiede punti staccati di φ, allora i detti $c_2 - 1$ punti apparterranno ad entrambe le curve C_1 e C, onde dovrà essere $c_2 - 1 \leqq cc_1$, cioè $c_2 - 1 \leqq (m_1 - 1)(m - 2)$. Si suppone che la curva C_2 non si componga di generatrici di φ_1 soltanto.

[60]) Proiettando φ da un punto generico O di φ_2, si ottiene una superficie, dello spazio ordinario, d'ordine m e dotata di una retta $(m-2)$-pla. Questa superficie ammette, com'è noto, $3m - 4$ piani ciascuno dei quali passa per la retta singolare, e possiede due rette della superficie. Ma di questi piani 4ε sono assorbiti dai piani che passano per le rette doppie tracce degli ε piani uscenti dal punto O e secanti φ in una conica; dunque i piani che servono al nostro scopo sono $3m - 4 - 4\varepsilon$.

[61]) Verifica: $2^2(m_1 - c_2 + \varepsilon) + (3m - 4 - 4\varepsilon) = 4m_1 - 4c_2 + 3m - 4 = x$.

Per il complesso Γ son piani parassiti doppi gli $m_1 - c_2$ piani ciascuno comune allo spazio di φ e ad uno degli spazi individuati da φ_2 e dalle $m_1 - c_2$ generatrici di φ_1 incidenti la retta C_1 in punti non posti in C_2. Sono poi piani parassiti semplici i $3m - 4$ piani ciascuno determinato da una delle $3m - 4$ rette incidenti C_1 e C_2 e dalla generatrice di φ_1 che ad essa si appoggia [62]).

71. Vogliamo studiare ora il caso in cui è $c_1 = m - 3$.

La superficie φ è dunque secata in cubiche gobbe dagli spazi passanti per il piano φ_2, e la curva C_2, che per semplicità supporremo irriducibile e priva di punti multipli, ha $c_2 - 2$ punti in questo stesso piano. La φ_1 non è altro che la rigata delle corde di C_2 incidenti φ_2.

Indicando con p_2 il genere di C_2, si ha intanto:

$$m_1 = \left[\binom{c_2 - 1}{2} - p_2 - \binom{c_2 - 2}{2}\right] + 1 = c_2 - p_2 - 1.$$

Si ha:

$$n = 2c_2 - 3p_2 + m - 3, \quad k = 1, \quad k_1 = 3, \quad k_2 = m + 2c_2 - 3p_2 - 6,$$
$$x = 5m - 9p_2 - 18 + 3c_2.$$

a) Supponiamo, per es., che la superficie φ sia quella rappresentata da un sistema lineare ∞^4 di curve λ^3_{1234}, e che φ_2 sia il piano della conica C_1 avente per immagine una certa λ^1_1. La curva C_2 sia, per es., la quartica $(c_2 = 4)$ rappresentata da una certa conica λ^2_{34}. Ogni spazio passante per φ_2 seca C_2 in due punti variabili, la cui congiungente genera la rigata φ_1 che sarà una cubica (normale) avente in φ_2 una conica C.

Si ha:

$$n = 10, \qquad k = 1, \qquad k_1 = 3, \qquad k_2 = 7, \qquad x = 19.$$

Per il complesso Γ è piano parassita triplo quello della cubica piana (n° 15, *b*) posta in uno stesso spazio con φ_2. Inoltre se P è l'immagine del punto staccato comune a φ_2 e a φ, sono per Γ piani parassiti doppi i piani delle due coniche rappresentate da λ^1_{2P} e λ^2_{1234P}. Infine osserviamo che le due rette di φ aventi per immagini λ^1_{23} e λ^1_{24} incontrano (sulla C_2) due generatrici di φ_1. Si hanno così due piani parassiti semplici per il complesso Γ.

b) Sia, per altro esempio, φ la superficie d'ordine $m = 6$, rappresentata dal sistema lineare $|\lambda^4_{123\ldots10}|$. Il piano φ_2 sia quello della cubica C_1 rappresentata da $C'_1 \equiv \lambda^3_{23\ldots10}$. La curva C_2 sia, per es., la curva d'ordine $c_2 = 11$ avente per immagine $C'_2 \equiv \lambda^5_1$, essendo C'_2 di genere $p_2 = 1$. Ogni spazio condotto per φ_2 seca C_2 in due punti variabili, la cui congiungente genera la rigata φ_1, la quale sarà d'ordine $m_1 = 9$ e avrà in φ_2 una curva C d'ordine $c = 8$.

Si ha:

$$n = 22, \qquad k = 1, \qquad k_1 = 3, \qquad k_2 = 19, \qquad x = 36.$$

Com'è noto (n° 14, *b*) ciascuna delle nove coniche di φ rappresentate da λ^1_{12},

[62]) Verifica: $2^2(m_1 - c_2) + (3m - 4) = 4m_1 - 4c_2 + 3m - 4 = x$.

$\lambda^1_{13}, \ldots, \lambda^1_{1.10}$, ha due punti comuni con C_1; inoltre ciascuna di esse incontra C_2 in due punti. Ne segue che i piani di queste coniche son piani parassiti doppi per il complesso Γ.

§ 3.

72. Vediamo ora se esistono complessi di prim'ordine aventi per superficie focale *tre* superficie (irriducibili) φ, φ_1, φ_2, nessuna delle quali sia un piano.

Le rette uscenti da un punto generico P di [4] e incidenti in due punti (generalmente distinti) le superficie φ e φ_1 formano un cono a due dimensioni d'ordine $mm_1 - c_2$. Se quindi indichiamo con u il numero delle rette uscenti da P, incidenti C_1 o C, e che possono contarsi fra le rette che si appoggiano a φ e φ_1 (in punti generalmente distinti), si ha:

$$(1) \qquad (m m_1 - c_2) m_2 - u = 1,$$

e ciò perchè il complesso Γ è d'ordine *uno*.

D'altra parte sia Q un punto generico di φ_2; allora il numero delle rette uscenti da Q, incidenti C_1 o C, e che possono contarsi fra le rette che si appoggiano a φ e φ_1 (in punti generalmente distinti), o è infinito, ovvero è precisamente uguale ad u. Onde in questo secondo caso avremo:

$$(2) \qquad (m m_1 - c_2)(m_2 - 1) - u = 0,$$

perchè essendo Q un punto generico di φ_2, una retta passante per esso e incidente φ e φ_1, non incontra φ_2 ancora in un altro punto.

Dalle (1) e (2) si deduce: $m m_1 - c_2 = 1$. Ne seguirebbe che uno dei due numeri m e m_1 sarebbe eguale ad *uno*, e ciò per quanto è noto circa le congruenze del prim'ordine, mentre per ipotesi nessuna delle superficie φ, φ_1, φ_2 è un piano.

Se poi il numero delle sopradette rette passanti per Q fosse infinito, al variare di Q su φ_2 si otterrebbero ∞^3 rette di Γ, tutte incidenti C_1 (o C). Ma allora questo complesso, essendo irriducibile, avrebbe come luogo di fuochi la superficie φ_2 e la curva C_1 (o C), mentre i complessi aventi curve focali non appartengono al tipo in esame e saranno studiati nel capitolo seguente.

Concludiamo dunque che:

non esistono complessi d'ordine uno *aventi per superficie focale tre superficie irriducibili nessuna delle quali sia un piano.*

CAPITOLO IV.

Complessi del tipo IV°.

73. Facciamo ora lo studio dei complessi del quarto tipo, cioè di quelli ciascuno Γ dei quali è generato dalle ∞^3 rette incidenti (in punti generalmente distinti) una curva f e una superficie φ entrambe irriducibili (e non poste in uno stesso spazio).

Distingueremo due casi: il primo quando f appartiene a φ, l'altro nell'ipotesi contraria.

74. Supponiamo primieramente che f sia una curva posta in un piano π. Allora in uno spazio condotto genericamente per π, le rette del compleso Γ formeranno una congruenza d'ordine *uno;* ne segue che o f è una retta, ovvero f è una curva d'ordine μ avente un punto O $(\mu - 1)$-plo. In quest'ultimo caso la superficie φ è secata ulteriormente dagli spazi passanti per π, in una sola retta uscente dal punto O.

Se fosse $\mu > 2$, allora φ sarebbe un cono di vertice O, e quindi, essendo φ irriducibile, non potrebbe questa superficie passare per f, e ciò contro l'ipotesi. Dunque deve essere $\mu = 2$, cioè f è una conica, e φ è una rigata razionale avente f per direttrice, e tale che ogni spazio passante per il piano di f la seca ulteriormente in una sola generatrice.

75. La curva f non può essere non piana, perchè, se così fosse, ciascuna delle sue corde sarebbe da contare per due rette di Γ, e quindi questo complesso avrebbe una ipersuperficie focale, e ciò non può essere.

76. Supponiamo ora che la curva f non appartenga alla superficie φ.

Se φ è un piano, allora f è evidentemente di un certo ordine μ con $\mu - 1$ punti in φ.

Se invece φ non è un piano, ma f è una curva piana, allora siccome in uno spazio qualunque condotto per il piano di f le rette del complesso Γ formano una congruenza d'ordine *uno,* o la f è una retta, ovvero è una curva d'ordine μ con un punto O $(\mu - 1)$-plo, e la φ è un cono d'ordine m, avente O per vertice e $m - 1$ generatrici nel piano di f.

77. Vogliamo ora dimostrare che se f non è una curva piana, la superficie φ è necessariamente un piano.

Supponiamo infatti che le rette uscenti da un punto generico P di [4], e passanti pei c punti comuni ad f e φ, contino per u fra le generatrici comuni ai coni Pf e $P\varphi$.

Si ha evidentemente $m\mu - u = 1$ e quindi $m\mu - 1 = u$ (1).

Sia ora Q un punto generico di f; il cono Qf non può essere contenuto nel cono $Q\varphi$, perchè allora una corda generica di f dovrebbe incontrare φ, e quindi Γ avrebbe ∞^3 fuochi. Dunque i coni Qf e $Q\varphi$ hanno $m(\mu - 1)$ generatrici comuni, fra le quali sono le u che si ottengono proiettando da Q i c punti $f\varphi$.

Se, inoltre, per Q passasse una corda di f incidente φ in nessuno di questi c punti, essa conterebbe per due rette di Γ, e quindi al variare del punto generico Q su f si otterrebbe una rigata di corde di f incidenti φ, cioè una rigata passante per f e luogo di fuochi per Γ. Ma allora Γ non sarebbe altro che il complesso delle rette incidenti questa rigata e la curva f, e ciò è assurdo essendo f non piana (n° 75).

Dunque per Q non passa alcuna corda di f incidente φ in un punto distinto dai c punti $f\varphi$. Ne segue: $m(\mu - 1) = u$.

Dalla (1) del presente n° e da questa eguaglianza si deduce $m = 1$; cioè se f è una curva non piana, φ è certamente un piano.

78. Sia φ una rigata d'ordine m avente una conica f per direttrice, e tale inoltre che uno spazio per il piano di questa la sechi ulteriormente in una sola generatrice.

L'esistenza del complesso Γ è manifesta.

Si ha:

$$n = 2(m - r),$$

se r è la multiplicità di f per φ.

Inoltre:

$$k = 2, \qquad x = 4(m - r)^2 - 4m.$$

La rigata γ delle rette di Γ poste in uno spazio Σ è formata da due coni d'ordine $m - r$, aventi per vertici i due punti Σf, che chiameremo A e B. La retta AB è per ciascuno multipla secondo $r + (m - 1 - 2r) = m - r - 1$.

Inoltre questi due coni hanno in comune $m - 2r - 1$ piani tangenti lungo la AB. Dunque γ è d'ordine $2(m-r)$, ha la retta AB multipla secondo $2(m-r-1)$, e possiede inoltre $m - 2r - 1$ generatrici doppie infinitamente vicine a questa.

Ne segue che il piano di f è da contare non solo come piano parassita $2(m-r-1)$-plo, ma inoltre come la riunione di $m-2r-1$ piani parassiti doppi [63]).

Il caso più semplice si ottiene per $m = 3$ e quindi $r = 1$. Il complesso Γ è generato dalle corde di una rigata cubica normale incidenti una stessa conica f di questa. Il piano di f è parassita doppio per Γ.

79. Sia ora f una curva piana d'ordine μ con un punto O $(\mu - 1)$-plo, e φ un cono d'ordine m di vertice O, e avente $m - 1$ generatrici nel piano di f.

Uno spazio generico seca φ in una curva d'ordine m avente $m - 1$ punti sopra una stessa retta l, sulla quale sono μ punti di f. Dunque la rigata γ delle rette di Γ in detto spazio, si compone di μ coni d'ordine m. Inoltre tutti questi coni hanno, lungo la retta l, $m - 1$ piani tangenti comuni. Ne segue:

$$n = \mu m, \qquad k = \mu, \qquad x = \mu^2 m^2 - \mu^2 m.$$

È chiaro che il piano di f è da considerare rispetto al complesso Γ, non solo come piano parassita $\mu(m-1)$-plo, ma anche come la riunione di $m-1$ piani parassiti μ-pli; ciò d'accordo con la relazione:

$$\mu^2(m - 1)^2 + (m - 1)\mu^2 = \mu^2 m^2 - \mu^2 m = x.$$

80. Sia ora φ un piano e f una curva d'ordine μ avente $\mu - 1$ punti in φ.

Si ha:

$$n = \mu, \qquad k = \mu, \qquad x = \mu^2 - \mu^2 . 1 = 0,$$

ciò d'accordo col fatto che il complesso Γ evidentemente non ha alcun piano parassita.

81. Consideriamo infine l'ipotesi che f sia una retta, che supporremo r-pla, con $r \geqq 0$, per la superficie φ. Ogni piano passante per f seca ulteriormente φ in un sol punto.

Si ha:

$$n = m - r, \qquad k = 1, \qquad x = (m - r)^2 - m.$$

---

[63]) Verifica: $2^2(m - r - 1)^2 + 4(m - 2r - 1) = 4(m - r)^2 - 4m = x.$

Indichiamo con (P) il cono ottenuto proiettando φ da un punto P di f. Due coni siffatti (P) e (P'), ciascuno dei quali è d'ordine $m-r$, si secheranno in una superficie d'ordine $(m-r)^2$, composta della φ e dei piani parassiti, ciascuno dei quali sarà da contare i^2 volte se è i-plo per Γ [64]). La retta f è evidentemente $(m-r-1)$-pla per (P) e per (P').

Viceversa, sian dati due coni (a tre dimensioni) (P) e (P'), ciascuno d'un certo ordine ν, e avente come $(\nu-1)$-pla la retta $f \equiv PP'$. Due coni siffatti si secheranno, oltre che in piani passanti per f, in una superficie irriducibile φ, la quale sarà incontrata in un sol punto (variabile) da ogni piano condotto per questa retta medesima.

Concludiamo che tutte e sole le superficie focali dei complessi del 4° tipo, nell'ipotesi che f sia una retta, si possono costruire come intersezione di due coni, nel modo ora detto.

82. Consideriamo alcuni casi particolari.

a) Se φ è immersa in uno spazio, allora f non potrà appartenere ad essa, e precisamente avremo in φ un monoide, e in f una retta avente per traccia nello spazio di φ, il punto singolare O di questa.

I piani parassiti sono gli $m(m-1)$ piani ciascuno individuato da f e da una delle altrettante rette di φ uscenti dal punto O [65]).

b) Sia φ la rigata cubica normale.

Se f è una sua generatrice, abbiamo un sol piano parassita, ed è quello individuato da f e dalla retta direttrice di φ; e ciò d'accordo con la relazione $x=(3-1)^2-3$.

Se, invece, f incontra φ nei due punti M ed N, abbiamo tre piani parassiti, e precisamente uno doppio e due semplici. È doppio il piano della conica di φ passante per M ed N; son semplici i due piani individuati da f e dalle generatrici di φ uscenti da M ed N. Come verifica si può osservare che si ha:

$$x = 3^2 - 3 = 6 = 2^2 + 1 + 1.$$

c) Sia φ una rigata razionale del quart'ordine.

Se f è una trisecante di φ, il complesso Γ avrà un piano parassita triplo nel piano della cubica passante pei tre punti $f\varphi$. Inoltre, le tre generatrici di φ uscenti da questi medesimi punti, individuano con f tre piani parassiti semplici. Ciò d'accordo con la relazione $x = 4^2 - 4 = 12 = 3^2 + 1 + 1 + 1$.

Se, invece, f è una delle due generatrici di φ uscenti dal punto doppio di questa, il complesso Γ ha un piano parassita doppio in quel piano che passa per f e che contiene una conica di φ; ha inoltre un piano parassita semplice in quello individuato da f e dall'altra generatrice di φ uscente dal punto doppio di questa. Verifica:

$$x = (4-1)^2 - 4 = 5 = 2^2 + 1.$$

d) Sia φ la superficie completa intersezione di due iperquadriche in posizione generica. Allora la retta f non può essere altro che una delle sedici rette di φ. Il com-

[64]) Ciò d'accordo con la relazione $x = (m-r)^2 - m$.

[65]) D'accordo con l'eguaglianza $x = m^2 - m$.

plesso Γ possiede cinque piani parassiti semplici, ciascuno individuato da f e da una delle cinque rette di φ ad f incidenti. Come verifica si osservi:

$$x = (4 - 1)^2 - 4 = 5.$$

e) Supponiamo, infine, che φ sia una rigata d'ordine m avente una direttrice piana C d'ordine $m - 1$; e che f sia una retta generica del piano di questa. I piani parassiti saranno m; e precisamente: $m - 1$ semplici e uno $(m - 1)$-plo. Quest'ultimo è il piano di C; gli altri sono quelli individuati da f e da ciascuna delle $m - 1$ generatrici di φ che si appoggiano ad f. Ciò d'accordo con la relazione

$$x = m^2 - m = (m - 1)^2 + (m - 1).$$

Catania, novembre 1908.

GIUSEPPE MARLETTA.

SOPRA UNA CERTA CLASSE DI VARIETÀ RAZIONALI.

Nota di **Gaetano Scorza** (Palermo).

Adunanza dell'8 agosto 1909.

1. È ben noto che una V_3^4 di S_6 la quale sia tagliata da ogni S_5 in una superficie di VERONESE è necessariamente un cono [1]).

Per alcune mie ricerche ho dovuto occuparmi di una questione analoga a quella cui si riferisce questo teorema; e allora ne ho trovato una dimostrazione assai semplice che mi ha fatto vedere come esso fosse suscettibile di una grande generalizzazione.

Scopo di questa breve Nota è appunto l'esposizione del teorema generale.

2. Sia F la superficie d'ordine n^2 di $S_{\frac{1}{2}n(n+3)}$, che è rappresentata sul piano dal sistema lineare di tutte le curve d'ordine n, e sia $C^{n(n-1)}$ una sua curva d'ordine $n(n-1)$ avente per immagine una curva piana d'ordine $n-1$.

È chiaro che $C^{n(n-1)}$ *appartiene* a un $S_{\frac{1}{2}n(n+3)-3}$ e che ogni iperpiano per $C^{n(n-1)}$ seca ulteriormente F in una curva (razionale normale) d'ordine n appoggiata in $n-1$ punti a $C^{n(n-1)}$; quindi la suddetta rappresentazione di F può considerarsi come ottenuta semplicemente per proiezione.

3. Ciò premesso, sia $V_3^{n^2}$ una varietà (a tre dimensioni) di $S_{\frac{n(n+3)}{2}+1}$ che da ogni iperpiano sia tagliata in una superficie del tipo ora considerato.

Dico che $V_3^{n^2}$ è necessariamente un cono.

Infatti sia F una sua sezione iperpiana generica e $C^{n(n-1)}$ una delle sue curve d'ordine $n(n-1)$, e dallo spazio α di $C^{n(n-1)}$ proiettiamo $V_3^{n^2}$ sopra un S_3. La proiezione risulterà generalmente biunivoca, le immagini delle sezioni iperpiane passanti per $C^{n(n-1)}$ saranno i piani dell'S_3 rappresentativo, e l'immagine di una sezione iperpiana generica [che ha $n(n-1)$ punti comuni con $C^{n(n-1)}$] sarà una superficie dell'ordine $n^2-n(n-1)=n$.

Ora $V_3^{n^2}$ (che per il ragionamento fatto è razionale) è normale al pari di F, quindi il sistema lineare $|\varphi|$ delle immagini delle sue sezioni iperpiane è un sistema lineare completo di superficie d'ordine n che stacca sopra ogni piano dello spazio rappresentativo il sistema lineare di *tutte* le curve d'ordine n.

[1]) SEGRE, *Sulle varietà normali a tre dimensioni composte di serie semplici razionali di piani* [Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XXI (1885), pp. 95-115]; o anche BERTINI, *Introduzione alla geometria projettiva degli iperspazi con appendice sulle curve algebriche e loro singolarità* (Pisa, Enrico Spoerri, 1907), p. 321 e p. 342.

Segue che $|\varphi|$ non può avere altri elementi base che punti isolati, e di tali punti ne deve esistere certo almeno uno, O, perchè altrimenti $|\varphi|$ sarebbe il sistema di *tutte* le superficie d'ordine n dello spazio rappresentativo e avrebbe una dimensione superiore a $\frac{1}{2} n(n+3)+1$; quindi lo spazio β congiungente α con O contiene una superficie Φ di $V_3^{n^2}$, perchè ogni iperpiano per β taglia ulteriormente $V_3^{n^2}$ in una superficie d'ordine inferiore ad n^2.

Ora si osservi che gli ∞^2 punti di $V_3^{n^2}$ infinitamente vicini a un punto A di $C^{n(n-1)}$ hanno per immagini i punti di una retta a e che la retta a al variare di A sopra la $C^{n(n-1)}$ descrive *la* superficie d'ordine $n-1$, φ', che costituisce il *resto* rispetto a $|\varphi|$ dei piani dello spazio rappresentativo. D'altra parte i punti di a, mediante la proiezione da α, vengono ad essere riferiti proiettivamente ai piani del fascio che sta nell'S_3 tangente alla $V_3^{n^2}$ in A ed ha per asse la retta tangente in A alla $C^{n(n-1)}$ (per modo che ogni punto di a rappresenta i punti di un intorno *piano* di $V_3^{n^2}$ relativo ad A), dunque la retta a passa costantemente per O (immagine del piano tangente in A alla superficie Φ) e la curva intersezione di φ' con una superficie generica φ di $|\varphi|$ si spezza in $n(n-1)$ rette; cioè, nelle $n(n-1)$ rette che rappresentano i punti di $V_3^{n^2}$ infinitamente vicini agli $n(n-1)$ punti ove la sezione iperpiana che ha per immagine φ incontra la curva $C^{n(n-1)}$. Segue che φ' è un cono col vertice in O e che $|\varphi|$ è un sistema di monoidi col punto $(n-1)$-plo in O e col cono tangente fisso φ'.

Di qua si trae subito che $V_3^{n^2}$ è un cono [2]).

4. I ragionamenti fatti, come il lettore scorge subito, si estendono immediatamente. Così si vedrà, come al n° 2, che la $V_r^{n^r}$ di $S_{\binom{n+r}{r}-1}$ rappresentata sopra un S_r dal sistema di *tutte* le forme d'ordine n è proiettata biunivocamente dallo spazio di una sua $V_{r-1}^{(n-1)n^{r-1}}$ che abbia per immagine una forma generica d'ordine $n-1$ dello spazio rappresentativo e che tale proiezione dà luogo appunto alla considerata rappresentazione di $V_r^{n^r}$; e poi imitando il ragionamento del n° 3 si perverrà a dimostrare che ogni $V_{r+1}^{n^r}$ di $S_{\binom{n+r}{r}}$ avente per sezioni iperpiane delle cosiffatte $V_r^{n^r}$ è necessariamente un cono.

Segue allora il teorema generale:

Se le sezioni iperpiane di una $V_{r+i}^{n^r}$ di $S_{\binom{n+r}{r}+i-1}$ con gli $S_{\binom{n+r}{r}-1}$ dello spazio ambiente sono delle $V_r^{n^r}$ rappresentate sopra un S_r dal sistema lineare di tutte le sue forme d'ordine n, necessariamente quella $V_{r+i}^{n^r}$ è un S_{i-1}-cono proiettante dal suo vertice una cosiffatta $V_r^{n^r}$.

Palermo, 7 agosto 1909.

GAETANO SCORZA.

[2]) A questa conclusione avremmo potuto arrivare assai più rapidamente, se non avessimo voluto presentare il ragionamento in maniera da renderne immediata la generalizzazione di cui si parla nel n° 4.

EINE STETIGE FUNKTION DEREN FOURIER'SCHE REIHE DIVERGIERT.

Von **Leopold Fejér** (Kolozsvár).

Adunanza dell'8 agosto 1909.

Kürzlich habe ich ein einfaches Beispiel mitgeteilt für eine überall stetige Funktion, deren FOURIER'sche Reihe an einer Stelle divergiert.

Noch leichter ist vielleicht die Divergenzerscheinung an dem Beispiele zu verfolgen, das ich in den folgenden Zeilen auseinandersetzen werde. Bei der Bildung dieses neuen Beispieles habe ich wieder die allgemeinen Konstruktionsmethoden der Herren LEBESGUE und HAAR vor Augen gehalten.

Ich betrachte die Kosinuspolynome

$$\varphi(1, x) = \frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 2x}{1},$$

$$\varphi(2, x) = \frac{\cos x}{2} + \frac{\cos 2x}{1} - \frac{\cos 3x}{1} - \frac{\cos 4x}{2},$$

$$\varphi(3, x) = \frac{\cos x}{3} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{1} - \frac{\cos 4x}{1} - \frac{\cos 5x}{2} - \frac{\cos 6x}{3},$$

. . . .

$$\varphi(n, x) = \frac{\cos x}{n} + \frac{\cos 2x}{n-1} + \cdots + \frac{\cos nx}{1} - \frac{\cos(n+1)x}{1} - \cdots - \frac{\cos 2nx}{n},$$

. . . .

Das Kosinuspolynom $\varphi(n, x)$ kann als eine unendliche Kosinusreihe aufgefasst werden. Sämmtliche Partialsummen dieser Kosinusreihe sind an der Stelle $x = 0$, wie aus der Definition ersichtlich, *nicht negativ*. Die an der Stelle $x = 0$ *grösste* Partialsumme hat den Wert

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{2} + 1,$$

und ist also grösser als $\log(n+1)$. Der Index dieser maximalen Partialsumme ist n.

Schliesslich haben die $\varphi(n, x)$ noch die merkwürdige Eigenschaft, dass sie für jedes reelle x dem absoluten Betrage nach alle kleiner sind als 34. (Diese Konstante

kann noch verkleinert werden). Es ist nämlich

$$\varphi(n, x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(n - k + 1)x}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(n + k)x}{k}$$

$$= 2 \sin(2n + 1)\frac{x}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(2k - 1)\frac{x}{2}}{k}.$$

Da aber für jedes reelle t, und für jeden ganzzahligen Wert von n

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(2k - 1)t}{k}\right| < 17,$$

also ist

$$|\varphi(n, x)| < 34$$

für jedes reelle x, *und für jeden ganzzahligen Wert von* n.

Dies vorausgeschickt, *behaupte ich nun, dass die Reihe*

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi(2^{\nu^3}, x)}{\nu^2} \tag{1}$$

(*deren Glieder Kosinuspolynome sind*) *im Intervalle* $0 \leqq x \leqq \pi$ *eine solche stetige Funktion darstellt, deren auf das Intervall* $(0, \pi)$ *bezügliche* FOURIER'*sche Kosinusreihe an der Stelle* $x = 0$ *divergiert.*

Zunächst ist die Reihe (1) in jedem Intervalle gewiss gleichmässig (und absolut) konvergent, weil $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{34}{\nu^2}$ konvergiert. Die Funktion $f(x)$ ist also überall stetig.

Ich betrachte jetzt, für die Stelle $x = 0$, diejenige Partialsumme der FOURIER'schen Kosinusreihe von $f(x)$, deren Index 2^{ν^3} ist. Bei der Bildung dieser Partialsumme kann ich in der Reihe (1) *gliedweise* vorgehen, da doch diese Reihe für $0 \leqq x \leqq \pi$ gleichmässig konvergiert. Jedes Glied dieser Reihe liefert für den Wert der fraglichen Partialsumme einen Beitrag. *Alle* diese Beiträge sind (da es sich um die Stelle $x = 0$ handelt) *nicht negativ*, und speziell das Glied

$$\frac{\varphi(2^{\nu^3}, x)}{\nu^2}$$

liefert einen positiven Beitrag, der grösser ist als

$$\frac{1}{\nu^2} \log(2^{\nu^3} + 1),$$

und also grösser ist als $\frac{\nu}{2}$. Daher ist die fragliche Partialsumme an der Stelle $x = 0$ auch grösser als $\frac{\nu}{2}$, und da $\frac{\nu}{2}$ mit ν über allen Grenzen wächst, *habe ich hiermit bewiesen, dass die* FOURIER'*sche Kosinusreihe der überall stetigen Funktion* $f(x)$ *an der Stelle* $x = 0$ *divergiert.*

Die Funktion $f(x)$ hat an der Stelle $x = 0$ den Wert Null. Sämmtliche Partialsummen s_n ihrer FOURIER'schen Kosinusreihe haben an der Stelle $x = 0$ einen positiven

Wert. Unter diesen s_n befinden sich, wie ich eben gezeigt habe, beliebig grosse. Es lässt sich aber leicht direkt zeigen, dass auch beliebig kleine vorkommen, undzwar in solcher Frequenz, dass

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_n}{n} = 0.$$

Mein Theorem über die arithmetischen Mittel der Partialsummen der FOURIER-reihe kann also im Falle des Beispiels (1) *verifiziert* werden. Dies, und andere Betrachtungen über die Reihe (1) werde ich in einer ausführlicheren Arbeit veröffentlichen.

Budapest, den 2. August 1909.

LEOPOLD FEJÉR.

RENDICONTI DEL CIRCOLO MATEMATICO DI PALERMO

INDICI DEL TOMO XXVIII (2° SEMESTRE 1909).

INDICE DELLE MATERIE

MEMORIE E COMUNICAZIONI.

INDICE ALFABETICO DEI NOMI

Fine del Tomo XXVIII (2° semestre 1909).

Pubblicazione bimestrale.

TOMO XXVIII. **ANNO 1909**
2° SEMESTRE.

RENDICONTI
DEL
CIRCOLO MATEMATICO
DI PALERMO

DIRETTORE: G. B. GUCCIA

Fascicolo III.

Novembre-Dicembre.

Conto corrente con la posta.

DIREZIONE E REDAZIONE:
80, VIA RUGGIERO SETTIMO—PALERMO (ITALIA).

RENDICONTI DEL CIRCOLO MATEMATICO DI PALERMO

Fondatore e Direttore: Prof. Dr. **G. B. GUCCIA.**

(Segue in 3ª pagina).

ESTRATTI DALLO STATUTO. — INFORMAZIONI DIVERSE.

(RIASSUNTO IN ITALIANO).

Le Memorie (o Note) de' Soci destinate a' "RENDICONTI,,, devono essere inedite e scritte in italiano, o latino, spagnuolo, francese, tedesco, inglese. Per quelle redatte in una di queste ultime 5 lingue, è richiesto l'uso della macchina da scrivere, tranne che per le formole. Se vi sono figure, i relativi « clichés » devono essere mandati da' Sigg. Autori insieme al manoscritto.

Perchè possa pubblicarsi nel "RENDICONTI,,, ogni manoscritto dev'essere preventivamente esaminato e approvato dal Comitato di Redazione. L'Autore ne assume, esso solo, la responsabilità scientifica.

Ogni Autore (socio del Circolo) ha diritto a 100 estratti gratis. Gli Estratti sono mandati ai Sigg. Autori a mano a mano che procede la tiratura dei fogli dei "RENDICONTI,, e senza aspettare che si pubblichi il fascicolo che contiene la Memoria.

L'Ufficio di Redazione dei RENDICONTI rimane chiuso nei mesi di agosto, settembre e ottobre.

EXTRAITS DES STATUTS. — RENSEIGNEMENTS DIVERS.

(RÉSUMÉ EN FRANÇAIS).

Les Mémoires (ou Notes) des membres de la Société, destinés aux "RENDICONTI,,, doivent être inédits et écrits en italien, ou latin, espagnol, français, allemand, anglais. Ceux qui sont rédigés en une de ces 5 dernières langues, doivent être écrits (sauf les formules) par la machine à écrire. S'il y a des figures, les « clichés » relatifs doivent être envoyés par MM. les Auteurs en même temps que le manuscrit.

Pour être publié dans les "RENDICONTI,,, tout manuscrit doit être préalablement examiné et approuvé par le Comité de Rédaction. L'Auteur en garde, lui seul, la responsabilité scientifique.

Chaque auteur (membre de la Société) a droit à 100 tirages à part gratis. Les tirages à part sont envoyés à MM. les Auteurs au fur et à mesure du tirage des feuilles des "RENDICONTI,, et sans attendre que paraisse le fascicule qui contient le Mémoire.

Le Bureau de Rédaction des RENDICONTI reste fermé pendant les mois d'août, septembre et octobre.

AUSZUG AUS DEN STATUTEN. — VESCHIEDENE MITTEILUNGEN.

(AUSZUG AUF DEUTSCH).

Die für die "RENDICONTI,, bestimmten Abhandlungen (oder Mitteilungen) der Gesellschaftsmitglieder dürfen noch nicht veröffentlicht sein und müssen auf italienisch, lateinisch, spanisch, französisch, deutsch oder englisch verfasst sein. Trifft eine der 5 letztgenannten Sprachen zu, so muss der Text, mit Ausnahme der Formeln, mittels Schreibmaschine geschrieben sein. Kommen Figuren vor, so müssen die betreffenden « clichés » von den Herren Verfassern gleichzeitig mit dem Manuskript eingesandt werden.

Vor Veröffentlichung in den "RENDICONTI,, muss das Manuskript vom Redaktionskomité geprüft und gebilligt werden. Der Verfasser allein aber trägt die wissenschaftliche Verantwortlichkeit.

Jeder Verfasser (Mitglied der Gesellschaft) hat Anspruch auf 100 kostenfreie Sonderabdrücke. Sie werden nach Massgabe der Fertigstellung der Druckbogen der "RENDICONTI,, und unabhängig vom Zeitpunkt des Erscheinens des betreffenden Heftes versandt.

Die Redaktion der RENDICONTI ist im August, September und Oktober geschlossen.

EXTRACTS FROM THE CONSTITUTION. — GENERAL INFORMATION.

(ABSTRACT IN ENGLISH)

Memoirs (or Notes) by Members of the Society intended for publication in the "RENDICONTI,,, must not have been previously published. They must be written in Italian, Latin, Spanish, French, German, or English, and, unless in Italian, must be type-written (except the formulae); if illustrated by diagrams, the « clichés » for the diagrams must accompany the manuscript.

No Paper can be published in the "RENDICONTI,, without having been previously read and approved by the Editorial Committee. The author, however, has the sole and entire scientific responsability for his work.

Every author, who is a member of the Society, is entitled to receive gratis 100 separate copies. These separate copies will be sent him as soon as the sheets of the "RENDICONTI,, leave the press, and without awaiting the publication of the number in which his work is to appear.

The Office of the RENDICONTI is closed during the months of August, September, and October.

TOMO XXVIII (2° semestre 1909). — Fasc. III (Novembre-Dicembre).

(Pubblicato il 2 dicembre 1909).

INDICE DELLE MATERIE

Direttore responsabile a' sensi di legge: G. B. Guccia.

Tipografia Matematica di Palermo, Piazza Regalmici, Vicolo Guccia, 6, Palermo. (772.1900.15) 19-11-1909.